



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques

2022

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Ce problème étudie quelques propriétés des endomorphismes cycliques d'un espace vectoriel E de dimension finie, ainsi qu'une décomposition en sous-espaces stables sur lesquels l'endomorphisme induit est cyclique.

Dans tout le problème :

- n est un entier supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel réel de dimension n ;
- $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E ;
- une homothétie est une application λid_E , avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et id_E l'identité de E ;
- un sous-espace F de E est stable par u si $u(x) \in F$ pour tout $x \in F$. On note alors $u_F : F \rightarrow F, x \mapsto u(x)$, l'endomorphisme induit par u ;
- $u^0 = \text{id}_E$ et $u^k = u \circ u^{k-1}$ pour $k \geq 1$;
- pour $e \in E$, on pose

$$E_u(e) = \text{Vect}(u^k(e) \mid 0 \leq k \leq n-1) = \text{Vect}(e, u(e), \dots, u^{n-1}(e));$$

- pour $k \geq 1$, on note $\mathcal{B}(e, k) = (e, u(e), \dots, u^{k-1}(e))$;
- u est cyclique s'il existe $e \in E$ tel que $E = E_u(e)$. En dimension 1, tout endomorphisme est considéré comme cyclique;
- une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de Frobenius, ou matrice compagnon, s'il

existe $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Plus précisément, ses coefficients valent $A_{i,j} = 1$ si $i = j + 1$ et $j < n$, $A_{i,n} = a_{i-1}$, et 0 ailleurs. On lui associe le polynôme $P_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1X - a_0$;

- u est nilpotent s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $u^k = 0$. Son indice de nilpotence est $r = \min\{k \geq 1 \mid u^k = 0\}$.

Le problème comporte trois parties. La première étudie les premières propriétés des endomorphismes cycliques et quelques exemples, notamment en Python. La deuxième traite les endomorphismes diagonalisables et nilpotents. La troisième établit une décomposition en sous-espaces stables à restrictions cycliques et montre notamment que toute matrice carrée réelle est semblable à sa transposée.

Partie I — Premières propriétés

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $e \in E \setminus \{0\}$.

Section A — Étude des sous-espaces $E_u(e)$

1. Justifier que la famille $\mathcal{B}(e, n + 1)$ est liée.
2. On note $d(e) = \max\{k \in \mathbb{N}^* \mid \mathcal{B}(e, k) \text{ est libre}\}$. Justifier l'existence de $d(e)$.

3. Montrer qu'il existe des scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{d(e)-1}$ tels que

$$u^{d(e)}(e) = a_0 e + a_1 u(e) + \dots + a_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^i(e).$$

Montrer alors que, pour tout entier $k \geq d(e)$, le vecteur $u^k(e)$ est une combinaison linéaire de $e, u(e), \dots, u^{d(e)-1}(e)$. En déduire que $\mathcal{B}(e, d(e))$ est une base de $E_u(e)$.

4. Montrer que $E_u(e)$ est stable par u . Montrer également que tout sous-espace F de E contenant e et stable par u contient $E_u(e)$.
5. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $d(e)$ le vecteur e est-il un vecteur propre de u ?
6. Montrer que u est une homothétie si et seulement si $d(e) = 1$ pour tout vecteur non nul $e \in E$.
7. Montrer que u est cyclique si et seulement s'il existe $e \neq 0$ tel que $d(e) = n$.

Section B — Premières propriétés des endomorphismes cycliques

On suppose ici que u est cyclique et on choisit $e \neq 0$ tel que $E = E_u(e)$.

8. On note A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}(e, n)$. Vérifier que A est une matrice de Frobenius.
9. On note $P_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0$ le polynôme associé à A . Que vaut $(P_A(u))(e)$? Calculer $(P_A(u))(u^k(e))$ pour $1 \leq k \leq n-1$. Montrer que P_A est un polynôme annulateur de u .
10. Vérifier que $(\text{id}_E, u, u^2, \dots, u^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

11. En déduire que P_A est un polynôme annulateur non nul de degré minimal.
12. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est valeur propre de u si et seulement si λ est racine de P_A .
Vérifier que l'espace propre associé à chaque valeur propre est de dimension 1.
13. En déduire une caractérisation portant sur P_A pour que u soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Section C — Un premier exemple

On suppose $E = \mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{B}_3$ sa base canonique. Les matrices de f et g dans cette base sont respectivement

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

14. Justifier que f est diagonalisable. On notera $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ ses valeurs propres rangées par ordre croissant.
15. Déterminer une base de diagonalisation (V_1, V_2, V_3) de f telle que $f(V_i) = \lambda_i V_i$ et que la première coordonnée de chaque V_i dans $\mathcal{B}_3$ soit 1.
16. On pose $V = V_1 + V_2 + V_3$. Déterminer $d(V)$ et en déduire que f est cyclique.
17. Déterminer un polynôme annulateur non nul de g de degré minimal.
L'endomorphisme g est-il cyclique ?
18. Vérifier que (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres de g .

Section D — Avec Python

Les polynômes sont à coefficients réels. On étudie deux méthodes indépendantes liées à la caractérisation de la question 13. Les questions 22 et suivantes sont indépendantes des

précédentes questions de cette section.

Un polynôme est représenté par un tableau de coefficients dans l'ordre croissant des puissances. Ainsi, $2 - 3X + X^3$ est représenté par `np.array([2., -3., 0., 1.])`. Le dernier coefficient est non nul, sauf pour le polynôme nul représenté par `np.array([0.])`. La commande `len(c)` donne le nombre de coefficients; `c[j]` désigne le coefficient de X^j .

On utilisera les fonctions suivantes : `eval_poly(c, x)` évalue le polynôme de coefficients `c` en `x`; `derivee(c)` renvoie les coefficients de sa dérivée; `degre(c)` renvoie son degré, avec la convention $\deg(0) = -1$; `pgcd(p, q)` renvoie les coefficients d'un pgcd unitaire des deux polynômes, supposés non tous deux nuls. L'utilisation de `pgcd` est autorisée sans en programmer le calcul dans les questions 21 et 24. Pour les raisonnements mathématiques, ces opérations sont considérées exactes; une réalisation en nombres flottants nécessite des précautions numériques.

19. Soient P et Q deux polynômes réels non nuls. Montrer qu'il existe un polynôme Δ , diviseur commun de P et Q , de degré maximum et dont le coefficient dominant est 1. Un tel polynôme est appelé un pgcd de P et Q .
20. Soit P un polynôme réel de degré au moins 2, que l'on suppose scindé sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire produit de facteurs de degré 1. Montrer que P admet une racine réelle de multiplicité strictement supérieure à 1 si et seulement si un pgcd de P et P' est de degré au moins 1.
21. Compléter la fonction Python suivante, qui reçoit le tableau `c` des coefficients d'un polynôme réel P de degré au moins 2, supposé scindé sur $\mathbb{R}$, et renvoie `True` ou `False` selon que toutes ses racines sont simples ou non.

Python

```
def racSimp(c):
    # À compléter
    ...
    return ...
```

Comment utiliser cette fonction pour tester si une matrice de Frobenius est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, lorsque l'on sait déjà que son polynôme associé est scindé sur $\mathbb{R}$? Expliquer pourquoi, sans cette dernière hypothèse, le seul test de simplicité ne suffit pas.

Dans la suite, on propose une deuxième méthode approximative permettant de tester si un polynôme réel de degré n admet exactement n racines réelles distinctes. On parcourt les réels de gauche à droite à partir d'un réel situé en deçà de toute racine. Si l'on détecte n changements stricts de signe sur des intervalles successifs, on conclut à l'existence de n racines réelles distinctes ; sinon, on renvoie une valeur d'indétermination.

22. Justifier que, si un polynôme P de degré n et des réels $x_1 < \dots < x_{n+1}$ vérifient $P(x_k)P(x_{k+1}) < 0$ pour $1 \leq k \leq n$, alors P admet n racines distinctes.

23. Soit

$$P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

à coefficients réels. Montrer que toute racine réelle z de P vérifie

$$|z| \leq \max \left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right).$$

On pourra montrer que, si $|z| > 1$, alors

$$|z| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|.$$

Dans la suite, on note

$$m = \max \left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right).$$

24. Compléter la fonction Python suivante, qui reçoit le tableau c des coefficients $a_0, \dots, a_{n-1}$ du polynôme

$$P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

et un réel pas strictement positif. Elle renvoie True si elle détecte n changements stricts de signe, en partant de $-m - \text{pas}/2$ et en testant les valeurs de pas en pas, jusqu'à dépasser $m + \text{pas}/2$. Sinon, elle renvoie la chaîne de caractères "ind".

Python

```
def racSimpApprox(c, pas):
    # À compléter
    ...
    return ...
```

25. Comment utiliser cette fonction pour tester si une matrice de Frobenius est diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Expliquer dans quels cas la fonction renvoie la valeur indéterminée "ind".

Partie II — Étude de deux cas particuliers

Section A — Endomorphismes diagonalisables qui sont cycliques

On suppose u diagonalisable et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes.

26. En considérant son action sur une base de vecteurs propres de u , établir que

$$(u - \lambda_1 \text{id}_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_p \text{id}_E) = 0.$$

27. En déduire que $(\text{id}_E, u, \dots, u^p)$ est une famille liée dans $\mathcal{L}(E)$.

28. Quelle est la valeur de p si u est cyclique?

On suppose jusqu'à la fin de cette section que $p = n$, et on note $(e_1, \dots, e_n)$ une base telle que $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

29. Soit

$$e = \sum_{i=1}^n e_i.$$

Montrer que $\mathcal{B}(e, n)$ est libre et conclure que u est cyclique.

30. On reprend uniquement dans cette question l'exemple de la section C de la partie I.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $u_\alpha = g + \alpha f$. Montrer que u_α est diagonalisable et discuter, selon α , les cas où il est cyclique.

Section B — Endomorphismes nilpotents qui sont cycliques

On suppose u nilpotent d'indice r .

31. Soit $e \in E$ tel que $u^{r-1}(e) \neq 0$. Montrer que $(e, u(e), \dots, u^{r-1}(e))$ est libre.

32. En déduire que $r \leq n$ et montrer que $r = n$ si et seulement si u est cyclique. Dans le cas $r = n$, écrire la matrice de u dans $\mathcal{B}(e, n)$, où $u^{n-1}(e) \neq 0$.

Section C — Un second exemple

Ici, E est l'espace des fonctions polynomiales réelles de degré au plus $n - 1$. Pour $0 \leq k \leq n - 1$, on note X^k la fonction $x \mapsto x^k$. La famille $(X^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de E .

33. Soit $P \in E$. Montrer que, pour tout réel x , l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t} dt$ converge et que la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t} dt$ appartient à E .

On définit u par $u(P)(x) = \int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t} dt$.

34. Vérifier que u est un endomorphisme de E .

35. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $P \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(P)(x) = P(x) + u(P')(x).$$

36. En déduire que

$$u(P) = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)}$$

pour tout $P \in E$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P .

37. À l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$u(P)(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(s) e^{-s} ds.$$

38. Montrer que la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} P(s) e^{-s} ds$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que $u(P)$ est dérivable et que $(u(P))' = u(P) - P$. En déduire que $(u(P))' = u(P')$.

39. Déterminer la matrice de u dans $(X^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ et en déduire son spectre.

40. On pose $v = u - \text{id}_E$. Montrer que $\text{Im}(v)$ est le sous-espace des fonctions polynomiales de degré au plus $n - 2$.

41. Montrer que v est nilpotent. Est-il cyclique ?

Partie III — Décomposition de Frobenius et applications

On se propose de démontrer, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, la propriété $(\mathcal{R})$ suivante : il existe $p \in \{1, \dots, n\}$ et des sous-espaces non nuls $F_1, \dots, F_p$, stables par u , tels que

$$E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$$

et que $u|_{F_i}$ soit cyclique pour tout $1 \leq i \leq p$.

Section A — Cas d'une homothétie

42. Démontrer $(\mathcal{R})$ lorsque u est une homothétie.

Section B — Cas où u n'est pas une homothétie

43. Justifier qu'il existe un vecteur non nul e tel que $d(e) \neq 1$.

Pour le reste de cette section, on choisit $e \neq 0$ tel que $d = d(e)$ soit maximal ; ainsi $d \geq 2$.

On pose $e_k = u^k(e)$ pour $0 \leq k \leq d-1$, $\mathcal{B}(e, d) = (e_0, \dots, e_{d-1})$, $F_1 = E_u(e)$ et

$$u^d(e) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(e).$$

44. Justifier que $(\mathcal{R})$ est réalisée si $d = n$.

Dans la suite, on suppose $2 \leq d \leq n-1$, donc $n \geq 3$, et on complète $\mathcal{B}(e, d)$ en une base $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_{n-1})$ de E .

45. Démontrer que l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k \right) = x_{d-1}$$

est une forme linéaire non nulle.

On considère $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^d$ définie par

$$\Phi(x) = (\varphi(u^{d-1}(x)), \varphi(u^{d-2}(x)), \dots, \varphi(u(x)), \varphi(x)).$$

46. Vérifier que Φ est linéaire. On note $G = \text{Ker}(\Phi)$ et $\tilde{\Phi}$ sa restriction à F_1 .

47. Calculer $\Phi(e_0)$ et $\Phi(e_1)$. Plus généralement, justifier que, pour $1 \leq k \leq d-1$, il existe $\beta_{0,k}, \dots, \beta_{k-1,k} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\Phi(e_k) = (\beta_{0,k}, \dots, \beta_{k-1,k}, 1, 0, \dots, 0).$$

48. Écrire la matrice de $\tilde{\Phi}$ dans les bases $\mathcal{B}(e, d)$ et canonique de $\mathbb{R}^d$. Justifier que $\tilde{\Phi}$ est bijective.

49. Montrer que $E = F_1 \oplus G$ et justifier que G est stable par u .

50. Dire pourquoi u_{F_1} est cyclique.

51. Justifier que $d(e') \leq d$ pour tout vecteur non nul $e' \in G$.

52. Démontrer la propriété $(\mathcal{R})$.

Section C — Première application : forme par blocs des endomorphismes nilpotents

53. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $p \in \{1, \dots, n\}$ et des sous-espaces non nuls $F_1, \dots, F_p$, stables par u , tels que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$. Pour chaque k , on note $\mathcal{B}_{F_k}$ une base de F_k . La concaténation $\mathcal{B}$ de ces bases est une base de E . Quelle est la forme de la matrice de u dans $\mathcal{B}$?

Dans la suite de cette section, u est nilpotent d'indice p .

54. Montrer, à l'aide de $(\mathcal{R})$, qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de u est triangulaire inférieure, vérifie $t_{i,i} = 0$ pour tout i ,

$t_{i,i-1} \in \{0, 1\}$ pour $2 \leq i \leq n$, et a tous ses autres coefficients nuls.

Section D — Deuxième application : toute matrice carrée réelle est semblable à sa transposée

Ici, $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_n$ est sa base canonique. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit u l'endomorphisme dont la matrice dans $\mathcal{B}_n$ est M . On veut établir la propriété (S) : il existe deux matrices symétriques réelles V, W , avec W inversible, telles que $M = VW$.

55. Cas où u est cyclique. Choisir e tel que $E = E_u(e)$ et noter A la matrice de u dans $\mathcal{B}(e, n)$. C'est la matrice de Frobenius associée à $a_0, \dots, a_{n-1}$.

On définit $S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ par

$$s_{i,j} = \begin{cases} -a_{i+j-1} & \text{si } i+j \leq n, \\ 1 & \text{si } i+j = n+1, \\ 0 & \text{si } i+j \geq n+2. \end{cases}$$

Ainsi,

$$S = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & 1 \\ -a_2 & -a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de matrice S dans $\mathcal{B}(e, n)$. On a

$$f(e) = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^{k-1}(e) + u^{n-1}(e),$$

$$f(u(e)) = - \sum_{k=2}^{n-1} a_k u^{k-2}(e) + u^{n-2}(e),$$

et, plus généralement, pour $0 \leq j \leq n-2$,

$$f(u^j(e)) = - \sum_{k=j+1}^{n-1} a_k u^{k-j-1}(e) + u^{n-j-1}(e),$$

ainsi que $f(u^{n-1}(e)) = e$.

Calculer $u(f(e))$, $u(f(u(e)))$, puis $u(f(u^j(e)))$ pour $0 \leq j \leq n-2$, et enfin $u(f(u^{n-1}(e)))$.

56. En déduire que $AS = S_1$, où S_1 a pour première ligne et première colonne $(a_0, 0, \dots, 0)$ et pour bloc inférieur droit la matrice $(b_{i,j})_{2 \leq i,j \leq n}$ définie par

$$b_{i,j} = \begin{cases} -a_{i+j-2} & \text{si } i+j \leq n+1, \\ 1 & \text{si } i+j = n+2, \\ 0 & \text{si } i+j \geq n+3. \end{cases}$$

57. Justifier que S est inversible. On note $S_2 = S^{-1}$. On a donc $A = S_1 S_2$, où S_1 et S_2 sont deux matrices symétriques réelles.

58. On note P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de la base $\mathcal{B}(e, n)$ dans la base $\mathcal{B}_n$. Vérifier que

$$M = P S_1 {}^t P ({}^t P)^{-1} S_2 P^{-1}$$

et conclure que M vérifie $(\mathcal{S})$.

59. Montrer que tM et M sont semblables. Plus précisément, déterminer une matrice symétrique réelle inversible Q telle que ${}^tM = Q^{-1}MQ$.
60. Cas général. En s'appuyant sur le cas précédent et sur $(\mathcal{R})$, montrer que, pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices M et tM sont semblables.