



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques

2022

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé — HEC–ESSEC, mathématiques, 2022

Toutes les démonstrations sont menées sur $\mathbb{R}$. On utilise les notations du sujet adapté.
Les intervalles d'indices désignent des ensembles d'entiers.

Partie I — Premières propriétés

Section A — Étude des sous-espaces $E_u(e)$

1. La famille $\mathcal{B}(e, n+1)$ comporte $n+1$ vecteurs dans un espace de dimension n . Toute famille libre de E ayant au plus n vecteurs, cette famille est liée.
2. Comme $e \neq 0$, la famille $\mathcal{B}(e, 1) = (e)$ est libre. L'ensemble des entiers considérés est donc non vide. D'après la question 1, une famille $\mathcal{B}(e, k)$ avec $k \geq n+1$ est liée, puisqu'elle contient une famille liée. Cet ensemble est une partie non vide de $\{1, \dots, n\}$: il possède un maximum $d(e)$, avec $1 \leq d(e) \leq n$.
3. Posons $d = d(e)$. La famille $(e, u(e), \dots, u^d(e))$ est liée, alors que ses d premiers vecteurs sont libres. Dans une relation non triviale entre ces $d+1$ vecteurs, le coefficient de $u^d(e)$ est donc non nul. En isolant ce vecteur, on obtient, avec des coefficients uniques,

$$u^d(e) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i u^i(e).$$

Posons $H = \text{Vect}(e, u(e), \dots, u^{d-1}(e))$. L'image par u de chacun de ses générateurs appartient à H , y compris l'image du dernier grâce à la relation précédente. Par linéarité, $u(H) \subset H$. Une récurrence donne alors $u^k(e) \in H$ pour tout $k \geq d$.

Puisque $d \leq n$, les générateurs de H appartiennent à $E_u(e)$, tandis que tous les générateurs de $E_u(e)$ appartiennent à H . Ainsi $E_u(e) = H$. La famille $\mathcal{B}(e, d)$ est libre et génératrice de cet espace ; c'est une base. En particulier,

$$\dim E_u(e) = d(e).$$

4. La stabilité $u(E_u(e)) \subset E_u(e)$ a été établie en question 3 en étudiant les images des vecteurs d'une base.

Si F contient e et est stable par u , une récurrence montre que $u^k(e) \in F$ pour tout $k \geq 0$. Comme F est un sous-espace, il contient leurs combinaisons linéaires. Donc $E_u(e) \subset F$. Ainsi $E_u(e)$ est le plus petit sous-espace stable par u contenant e .

5. Si e est propre, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(e) = \lambda e$; $(e, u(e))$ est liée et $d(e) = 1$.
Réciproquement, si $d(e) = 1$, la question 3 donne $u(e) = a_0 e$ et $e \neq 0$: e est propre.
La condition cherchée est donc $d(e) = 1$.

6. Si $u = \lambda \text{id}_E$, chaque vecteur non nul est propre et la question 5 donne $d(e) = 1$.

Réciproquement, supposons cette égalité pour tout vecteur non nul. Dans une base $(b_1, \dots, b_n)$, on a $u(b_i) = \lambda_i b_i$. Pour $i \geq 2$, le vecteur $b_1 + b_i$ est non nul, donc propre : $u(b_1 + b_i) = \mu_i(b_1 + b_i)$. Par linéarité et identification dans la famille libre (b_1, b_i) , $\lambda_1 = \mu_i = \lambda_i$. Tous les λ_i sont égaux à un même λ , et $u = \lambda \text{id}_E$.

7. Si u est cyclique, $E = E_u(e)$ pour un e nécessairement non nul, et $d(e) = \dim E_u(e) = n$. Réciproquement, si $d(e) = n$, le sous-espace $E_u(e)$ de E a dimension n , donc est égal à E . C'est exactement la cyclicité.

Section B — Premières propriétés des endomorphismes cycliques

8. Dans $\mathcal{B}(e, n)$, l'image de $u^j(e)$ est $u^{j+1}(e)$ pour $0 \leq j \leq n-2$. Les $n-1$ premières colonnes ont donc un 1 sur la sous-diagonale et des 0 ailleurs. La relation de la question 3 donne

$$u^n(e) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j u^j(e) :$$

la dernière colonne vaut ${}^t(a_0, \dots, a_{n-1})$. On obtient la matrice de Frobenius annoncée.

9. Question adaptée au programme actuel : le polynôme associé est défini explicitement dans le sujet, sans recours à une théorie générale. La relation définissant les a_j

donne $P_A(u)(e) = 0$. Un polynôme en u commute avec toute puissance de u : cela résulte de $u^j \circ u^k = u^{j+k}$. Ainsi,

$$P_A(u)(u^k(e)) = u^k(P_A(u)(e)) = 0.$$

Ces égalités sont valables pour tout $k \geq 0$, donc notamment pour les n vecteurs de la base $\mathcal{B}(e, n)$. Un endomorphisme nul sur une base est nul : $P_A(u) = 0$.

10. Supposons

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_j u^j = 0.$$

En appliquant cette relation à e , on obtient

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_j u^j(e) = 0.$$

La liberté de $\mathcal{B}(e, n)$ impose $c_j = 0$ pour tout j . La famille $(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ est donc libre.

11. Le polynôme P_A est unitaire de degré n et annule u d'après la question 9. Si un polynôme R de degré inférieur à n annulait u , ses coefficients fourniraient une relation entre les endomorphismes de la question 10 ; tous seraient nuls. Aucun polynôme annulateur non nul n'a donc degré inférieur à n . Le degré minimal demandé est n .

12. On cherche les valeurs propres sans calcul de déterminant.

Méthode 1 — Résolution du système dans la base cyclique

Écrivons

$$x = \sum_{j=0}^{n-1} x_j u^j(e)$$

et posons $t = x_{n-1}$. L'égalité $u(x) = \lambda x$ équivaut à

$$\lambda x_0 = a_0 t, \quad x_{j-1} + a_j t = \lambda x_j \quad (1 \leq j \leq n-1).$$

Les $n-1$ dernières équations déterminent successivement toutes les coordonnées à partir de t , sans division par λ . En particulier,

$$x_0 = \left(\lambda^{n-1} - \sum_{j=1}^{n-1} a_j \lambda^{j-1} \right) t.$$

La première équation devient $P_A(\lambda)t = 0$. Si $t = 0$, les équations successives imposent toutes les coordonnées nulles. Un vecteur propre impose donc $t \neq 0$ et $P_A(\lambda) = 0$.

Réciproquement, si $P_A(\lambda) = 0$, choisir $t = 1$ et construire les autres coordonnées par les dernières équations fournit un vecteur non nul satisfaisant tout le système. L'espace propre est exactement la droite obtenue en faisant varier t : sa dimension vaut 1.

Méthode 2 — Division polynomiale pour l'équivalence

Si $u(x) = \lambda x$ et $x \neq 0$, alors $P_A(u)x = P_A(\lambda)x$. Le membre de gauche est nul, donc $P_A(\lambda) = 0$.

Réciproquement, si $P_A(\lambda) = 0$, la division par $X - \lambda$ donne $P_A = (X - \lambda)R$, avec R unitaire de degré $n-1$. Le vecteur $y = R(u)e$ est non nul, car son coefficient devant $u^{n-1}(e)$ vaut 1 dans la base cyclique. De plus $(u - \lambda \text{id}_E)y = P_A(u)e = 0$: y est propre. La dimension se lit ensuite dans les équations de la méthode 1.

La première approche fournit les coordonnées des vecteurs propres ; la deuxième construit directement un vecteur propre à partir d'une racine.

- 13.** Les espaces propres sont de dimension 1 et associés exactement aux racines réelles de P_A . Si u est diagonalisable, la somme de leurs dimensions vaut n : il existe donc n valeurs propres réelles distinctes. Réciproquement, n valeurs propres réelles distinctes fournissent une base de vecteurs propres.

Ainsi u est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si P_A possède n racines réelles distinctes, autrement dit s'il est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. On utilise ici la dimension des espaces propres, et non un critère général non démontré sur les polynômes annulateurs.

Section C — Un premier exemple

- 14.** La matrice F est réelle symétrique. Le théorème spectral réel assure sa diagonalisation dans une base orthonormale ; l'endomorphisme f est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

- 15.** Résolvons ${}^t(F(x, y, z)) = \lambda {}^t(x, y, z)$. Le système est

$$z = \lambda x, \quad -z = \lambda y, \quad x - y - z = \lambda z.$$

Pour $\lambda = 0$, il donne $z = 0$ et $x = y$, donc l'espace propre est $\text{Vect}(1, 1, 0)$.

Pour $\lambda \neq 0$, un vecteur propre ne peut avoir $x = 0$, car les deux premières équations annuleraient alors aussi y, z . Avec la normalisation $x = 1$, on a $y = -1$ et $z = \lambda$. La troisième équation devient $2 - \lambda = \lambda^2$, soit $(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$.

Les trois valeurs propres sont donc $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$. Les vecteurs demandés sont

$$V_1 = (1, -1, -2), \quad V_2 = (1, 1, 0), \quad V_3 = (1, -1, 1).$$

Ils sont propres pour des valeurs propres distinctes et forment donc une base. Tous ont première coordonnée 1.

- 16.** On a $V = (3, -1, -1)$. Montrons que $(V, f(V), f^2(V))$ est libre. Si $c_0 V + c_1 f(V) + c_2 f^2(V) = 0$, la décomposition dans la base (V_1, V_2, V_3) donne

$c_0 + c_1\lambda_i + c_2\lambda_i^2 = 0$ pour les trois valeurs $-2, 0, 1$. Un polynôme de degré au plus 2 ayant trois racines distinctes est nul : $c_0 = c_1 = c_2 = 0$. Donc $d(V) = 3$ et f est cyclique.

17. Méthode 1 — Produit matriciel

Le calcul donne

$$G^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2G.$$

Ainsi $X(X - 2)$ est annulateur. Aucun polynôme constant non nul ne peut annuler g . Un annulateur de degré 1 rendrait g égal à une homothétie, ce que contredisent les coefficients non diagonaux de G . Le degré minimal est donc 2.

Méthode 2 — Action sur une base propre explicite

Les vecteurs $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ forment une base ; leurs images par g valent respectivement 0 , $2(1, -1, 0)$ et $2(0, 0, 1)$. Un polynôme R annule g si et seulement si $R(0) = R(2) = 0$. Le polynôme unitaire de plus petit degré répondant à cette condition est $X(X - 2)$.

Dans les deux approches, l'existence d'un annulateur de degré $2 < 3$ exclut la cyclicité par la question 11. L'endomorphisme g n'est pas cyclique. La première méthode convient à une matrice simple à multiplier ; la seconde rend visibles les deux valeurs propres.

18. On calcule directement

$$g(V_1) = (2, -2, -4) = 2V_1, \quad g(V_2) = 0, \quad g(V_3) = (2, -2, 2) = 2V_3.$$

Comme (V_1, V_2, V_3) est déjà une base, c'est une base de vecteurs propres de g , avec les

valeurs propres 2, 0, 2 dans cet ordre.

Section D — Avec Python

- 19.** Le polynôme constant 1 est diviseur commun de P, Q . Tout diviseur commun non nul a degré compris entre 0 et $\min(\deg P, \deg Q)$. L'ensemble des degrés possibles, non vide et fini, possède donc un maximum. Choisir un diviseur de ce degré et le diviser par son coefficient dominant fournit le pgcd unitaire demandé.

Pour la suite, précisons un fait issu de la factorisation réelle. En factorisant P et Q en facteurs unitaires de degrés 1 ou 2 irréductibles sur $\mathbb{R}$, leur pgcd est le produit des facteurs communs, chacun avec le minimum de ses deux multiplicités. En effet, tout diviseur commun ne peut contenir un facteur avec une multiplicité supérieure à ce minimum. Le produit décrit est lui-même diviseur commun et a donc le plus grand degré possible. Cela établit aussi l'unicité du pgcd unitaire.

- 20.** Question adaptée au programme actuel : on suppose P scindé sur $\mathbb{R}$ et on traite uniquement ses racines réelles.

Écrivons $P(X) = (X - \lambda)^r H(X)$ avec $H(\lambda) \neq 0$. La dérivation donne

$$P'(X) = r(X - \lambda)^{r-1} H(X) + (X - \lambda)^r H'(X).$$

Si $r \geq 2$, $X - \lambda$ divise à la fois P et P' , donc leur pgcd a degré au moins 1. Si $r = 1$, $P'(\lambda) = H(\lambda) \neq 0$: cette racine n'est pas commune à P et P' .

Réciproquement, si leur pgcd a degré au moins 1, c'est un diviseur non constant de P . Puisque P est scindé sur $\mathbb{R}$, ce diviseur possède une racine réelle λ . Alors $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$, et le calcul précédent exclut la multiplicité 1. La racine λ est multiple. Cela prouve l'équivalence.

- 21.** Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel : la validité du test de simplicité des racines réelles repose sur l'hypothèse que P est scindé sur $\mathbb{R}$.

Le test demandé est

Python

```
def racSimp(c):  
    d = derivee(c)  
    delta = pgcd(c, d)  
    return degre(delta) == 0
```

La dérivée d'un polynôme de degré au moins 2 est non nulle ; pgcd est donc appliquée dans son domaine. D'après la question 20, la valeur renvoyée est True exactement lorsque toutes les racines sont simples, sous l'hypothèse indiquée.

Voici une réalisation complète des fonctions auxiliaires pour exécuter le test. Les tableaux de coefficients utilisent l'ordre croissant. La division euclidienne est programmée par annulations successives du terme dominant ; la boucle du pgcd est l'algorithme d'Euclide. Une division $P = DQ + R$ ne change pas les diviseurs communs du couple : ils sont exactement ceux de Q, R . À chaque reste non nul, le degré diminue ; la dernière valeur non nulle, normalisée, est donc le pgcd.

Python

```
import numpy as np  
  
TOL = 1e-12  
  
def nettoie(c):  
    c = np.array(c) * 1.0  
    j = len(c) - 1  
    while j > 0 and abs(c[j]) <= TOL:  
        j = j - 1  
    return c[:j + 1]  
  
def degre(c):  
    c = nettoie(c)  
    if len(c) == 1 and abs(c[0]) <= TOL:  
        return -1  
    return len(c) - 1
```

```
def eval_poly(c, x):
    val = 0.0
    for j in range(len(c) - 1, -1, -1):
        val = val * x + c[j]
    return val

def derivee(c):
    if len(c) <= 1:
        return np.array([0.])
    d = np.zeros(len(c) - 1)
    for j in range(1, len(c)):
        d[j - 1] = j * c[j]
    return nettoie(d)

def reste(p, q):
    r = nettoie(p)
    q = nettoie(q)
    dq = degre(q)
    while degre(r) >= dq:
        dr = degre(r)
        decalage = dr - dq
        coeff = r[dr] / q[dq]
        for j in range(dq + 1):
            r[j + decalage] = r[j + decalage] - coeff * q[j]
        r[dr] = 0.0
        r = nettoie(r)
    return r

def pgcd(p, q):
    p = nettoie(p)
    q = nettoie(q)
    while degre(q) >= 0:
        r = reste(p, q)
        p = q
```

```

    q = r
    return p / p[degre(p)]

def racSimp(c):
    d = derivee(c)
    delta = pgcd(c, d)
    return degre(delta) == 0

```

Dans cette réalisation, la multiplication du tableau par 1.0 fournit des coefficients flottants, et `c[:j + 1]` conserve les coefficients d'indices 0 à j . La fonction `reste` est utilisée uniquement avec un diviseur non nul et `pgcd` avec des polynômes non tous deux nuls. La tolérance `TOL` sert à éliminer de petits résidus numériques ; elle ne fait pas partie de la preuve exacte.

Pour une matrice de Frobenius, construire `c = np.array([-a0, -a1, ..., -a_nmoins1, 1.])`, où les points de suspension indiquent ici les coefficients à insérer. Lorsque P_A est connu scindé sur $\mathbb{R}$, le résultat de `racSimp(c)` décide, en arithmétique exacte, de la diagonalisation par la question 13.

Sans cette hypothèse, le test ne suffit pas. Le polynôme $X^2 + 1$ et sa dérivée $2X$ ont pgcd

1, mais $X^2 + 1$ n'a aucune racine réelle. La matrice de Frobenius $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'a donc

aucune valeur propre réelle et n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, bien que le test renvoie `True`.

Avec des nombres flottants, la proximité de racines multiples et le choix de la tolérance peuvent fausser le pgcd calculé. La fonction exécutée illustre le critère ; elle ne constitue pas un certificat exact pour des données arbitraires.

- 22.** Le polynôme P est continu. Pour chaque k , ses valeurs en x_k, x_{k+1} sont de signes opposés ; le théorème des valeurs intermédiaires fournit une racine dans l'intervalle ouvert (x_k, x_{k+1}) . Ces n intervalles sont disjoints : les racines obtenues sont distinctes. Un polynôme non nul de degré n a au plus n racines distinctes. Il en possède donc exactement n , toutes réelles et simples.

23. Si $|z| \leq 1$, la majoration est immédiate puisque $m \geq 1$. Supposons $|z| > 1$. Comme $P(z) = 0$,

$$|z|^n = \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k \leq |z|^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|.$$

On divise par $|z|^{n-1} > 0$:

$$|z| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|.$$

Les deux cas donnent $|z| \leq m$.

24. Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel : le PDF indique comme borne initiale $m - \text{pas}/2$. Elle est rectifiée en $-m - \text{pas}/2$ pour commencer en deçà de toutes les racines, conformément à la description de la méthode. On suppose $\text{pas} > 0$. Voici le code complet, indépendant des fonctions de pgcd de la question 21.

Python

```
import numpy as np

def eval_poly(c, x):
    val = 0.0
    for j in range(len(c) - 1, -1, -1):
        val = val * x + c[j]
    return val

def racSimpApprox(c, pas):
    n = len(c)
    m = max(1.0, np.sum(np.abs(c)))
    p = np.zeros(n + 1)
    for j in range(n):
```

```

    p[j] = -c[j]
p[n] = 1.0
x = -m - pas / 2
gauche = eval_poly(p, x)
nb = 0
while x <= m + pas / 2:
    x_suivant = x + pas
    droite = eval_poly(p, x_suivant)
    if gauche * droite < 0:
        nb = nb + 1
    x = x_suivant
    gauche = droite
if nb == n:
    return True
return "ind"

```

Le tableau p représente

$$X^n - \sum a_j X^j;$$

il ne faut pas confondre ses coefficients avec le tableau d'entrée c . La variable nb compte les intervalles successifs dont les valeurs aux extrémités sont de signes strictement opposés. La boucle effectue également le pas qui dépasse la borne droite, conformément à la consigne. Le nombre d'itérations est fini puisque pas est strictement positif.

En calcul exact, $nb == n$ garantit n racines distinctes par la question 22. Les erreurs d'arrondi, en particulier près d'un zéro ou lors d'un débordement numérique, doivent être contrôlées dans une utilisation réelle. Les tests d'exécution ci-dessous portent sur des coefficients et pas simples, sans difficulté de cet ordre.

- 25.** Entrer les coefficients $a_0, \dots, a_{n-1}$ de la dernière colonne de la matrice de Frobenius et choisir un pas positif. Si la fonction renvoie `True`, elle a détecté n changements stricts de signe ; P_A possède n racines réelles distinctes, donc la matrice est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Si elle renvoie "ind", aucune conclusion définitive ne suit. Cela arrive nécessairement si le polynôme ne possède pas n racines réelles distinctes. Cela peut aussi arriver alors qu'il les possède : un intervalle du maillage peut contenir deux racines et présenter le même signe à ses extrémités, ou une racine peut tomber exactement sur un point testé. Dans ce dernier cas, le produit vaut zéro et n'est pas compté comme changement strict. Affiner ou décaler le maillage peut aider, mais une valeur "ind" ne prouve jamais la non-diagonalisation.

Tests exécutés pour les codes des questions 21 et 24 :

Python

```
# Avec toutes les fonctions definies ci-dessus :
print(racSimp(np.array([-1., 0., 1.])))
print(racSimp(np.array([1., -2., 1.])))
print(racSimp(np.array([1., 0., 1.])))
print(racSimpApprox(np.array([1., 0.]), 0.3))
print(racSimpApprox(np.array([1., 0.]), 4.0))
print(racSimpApprox(np.array([-1., 2.]), 0.3))
```

Les sorties obtenues sont respectivement True, False, True, True, "ind", "ind". Le troisième résultat illustre l'insuffisance du seul test de simplicité sans l'hypothèse de scindement réel ; le cinquième correspond à des racines placées sur le maillage. Ces observations vérifient le comportement des fonctions sur ces exemples et ne remplacent aucune démonstration.

Partie II — Étude de deux cas particuliers

Section A — Endomorphismes diagonalisables qui sont cycliques

26. Posons

$$R(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i).$$

Dans une base de vecteurs propres, chaque vecteur b vérifie $u(b) = \lambda_j b$ pour un certain j .

Alors $R(u)b = R(\lambda_j)b = 0$. L'endomorphisme $R(u)$ est nul sur une base, donc nul. Les facteurs étant des polynômes en u , leur produit est bien la composition écrite dans le sujet.

27. Le polynôme R de la question 26 est unitaire de degré p . En écrivant

$$R(X) = \sum_{k=0}^p c_k X^k$$

avec $c_p = 1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^p c_k u^k = 0.$$

C'est une relation non triviale : la famille $(\text{id}_E, u, \dots, u^p)$ est liée.

28. Si u est cyclique, tout polynôme annulateur non nul a degré au moins n , par la question 11. Le polynôme de la question 26 a degré p , donc $p \geq n$. D'autre part, des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont libres, d'où $p \leq n$. Ainsi $p = n$.

29. Méthode 1 — Nombre de racines d'un polynôme

Si

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k u^k(e) = 0,$$

alors, puisque

$$e = \sum_{i=1}^n e_i,$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \lambda_i^k \right) e_i = 0.$$

La famille (e_i) étant une base, le polynôme

$$R(X) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$$

s'annule en les n réels distincts λ_i . Son degré est au plus $n - 1$, donc il est nul. Ainsi $\mathcal{B}(e, n)$ est libre et u est cyclique.

Méthode 2 — Reconstruction des vecteurs propres

Pour chaque i , définissons explicitement

$$L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

Les dénominateurs sont non nuls puisque les valeurs propres sont distinctes. Le polynôme L_i a degré $n - 1$ et vérifie $L_i(\lambda_j) = 0$ si $j \neq i$ et $L_i(\lambda_i) = 1$. Donc

$$L_i(u)e = \sum_{j=1}^n L_i(\lambda_j) e_j = e_i.$$

Comme L_i a degré au plus $n - 1$, le vecteur e_i appartient à $E_u(e)$. Cet espace contient une base de E , donc $E_u(e) = E$; sa famille de n générateurs $\mathcal{B}(e, n)$ est alors une base. On conclut de nouveau à la cyclicité.

La première méthode est un test de liberté; la seconde permet de retrouver chaque composante propre à partir des itérés d'un seul vecteur.

30. Les questions 15 et 18 donnent une même base propre (V_1, V_2, V_3) pour f et g . Dans cette base,

$$u_\alpha(V_1) = (2 - 2\alpha)V_1, \quad u_\alpha(V_2) = 0, \quad u_\alpha(V_3) = (2 + \alpha)V_3.$$

Ainsi u_α est diagonalisable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Par les questions 28 et 29, un endomorphisme diagonalisable de dimension 3 est cyclique exactement lorsqu'il possède trois valeurs propres distinctes.

Les égalités possibles sont $2 - 2\alpha = 0$ pour $\alpha = 1$, $2 + \alpha = 0$ pour $\alpha = -2$, et $2 - 2\alpha = 2 + \alpha$ pour $\alpha = 0$. Il est donc cyclique si et seulement si

$$\alpha \notin \{-2, 0, 1\}.$$

Pour chacun des trois paramètres exclus, il n'y a que deux valeurs propres distinctes, donc la cyclicité échoue.

Section B — Endomorphismes nilpotents qui sont cycliques

31. Supposons

$$\sum_{k=0}^{r-1} c_k u^k(e) = 0.$$

S'il existe un coefficient non nul, soit j le plus petit indice tel que $c_j \neq 0$. Appliquons u^{r-1-j} à la relation. Les termes d'indice supérieur à j sont annulés par $u^r = 0$, et ceux d'indice inférieur sont déjà nuls. Il reste

$$c_j u^{r-1}(e) = 0,$$

ce qui contredit $c_j \neq 0$ et $u^{r-1}(e) \neq 0$. Tous les coefficients sont donc nuls : la famille est libre. Cet argument inclut le cas $r = 1$, où la famille se réduit à (e) .

32. Par définition de l'indice, $u^{r-1} \neq 0$, donc il existe e tel que $u^{r-1}(e) \neq 0$. La question 31 fournit une famille libre de r vecteurs dans E : $r \leq n$.

Si $r = n$, cette famille libre a n vecteurs : c'est une base et u est cyclique.

Réciproquement, si u est cyclique, la question 11 impose à tout annulateur non nul un degré au moins n . Comme X^r est annulateur, $r \geq n$, donc $r = n$.

Dans ce cas, $u(u^j(e)) = u^{j+1}(e)$ pour $j < n - 1$ et $u(u^{n-1}(e)) = 0$. La matrice est

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \end{pmatrix},$$

avec des 1 sur la sous-diagonale et des 0 partout ailleurs.

Section C — Un second exemple

33. Fixons $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto P(x+t)$ est un polynôme de degré au plus $n - 1$. Il existe donc une constante $C_x \geq 0$ telle que, pour $t \geq 0$,

$$|P(x+t)| \leq C_x(1+t^{n-1}).$$

Les intégrales $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \Gamma(k+1) = k!$ convergent pour tout entier $k \geq 0$. Par domination, l'intégrale de $P(x+t)e^{-t}$ converge absolument.

Pour montrer que le résultat est un polynôme en x , écrivons

$$P(X) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j X^j.$$

Par le binôme et la linéarité pour une somme finie,

$$\int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t} dt = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} x^{j-k} \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} b_j \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} k! x^{j-k}.$$

Il s'agit d'une fonction polynomiale de degré au plus $n - 1$, donc d'un élément de E .
Aucun échange avec une somme infinie n'a été utilisé.

34. La question 33 assure que u est bien définie de E dans E . Pour $P, Q \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$, les intégrales convergent absolument ; leur linéarité donne, pour tout x ,

$$u(aP + bQ)(x) = au(P)(x) + bu(Q)(x).$$

L'égalité étant vraie pour tout x , $u(aP + bQ) = au(P) + bu(Q)$. Ainsi u est un endomorphisme de E .

35. Fixons x et effectuons l'intégration par parties sur le segment $[0, T]$, où les fonctions sont de classe C^1 :

$$\int_0^T P(x+t)e^{-t} dt = [-P(x+t)e^{-t}]_0^T + \int_0^T P'(x+t)e^{-t} dt$$

$$= P(x) - P(x+T)e^{-T} + \int_0^T P'(x+t)e^{-t} dt.$$

Comme P est polynomiale, les croissances comparées donnent $P(x+T)e^{-T} \rightarrow 0$. Les intégrales concernant P et P' convergent absolument par la question 33, puisque $P' \in E$. En passant à la limite, on obtient

$$u(P)(x) = P(x) + u(P')(x).$$

36. Méthode 1 — Itération de l'identité précédente

En appliquant la question 35 à $P, P', \dots, P^{(n-1)}$, on obtient successivement

$$u(P) = P + u(P') = P + P' + u(P'') = \dots = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)} + u(P^{(n)}).$$

Le degré de P étant au plus $n - 1$, $P^{(n)} = 0$, et $u(0) = 0$. Donc

$$u(P) = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)}.$$

Méthode 2 — Taylor exact pour les polynômes

La formule de Taylor polynomiale donne, pour tout t ,

$$P(x + t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(x)}{k!} t^k.$$

On multiplie par e^{-t} puis on intègre la somme finie, chaque intégrale étant absolument convergente par la question 33. Comme $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!$,

$$u(P)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(x)}{k!} k! = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)}(x).$$

La première approche réutilise l'intégration par parties ; la seconde explique directement l'apparition de tous les dérivés avec coefficient 1.

37. Sur $[0, T]$, effectuer le changement de variable affine $s = x + t$, avec $ds = dt$, donne

$$\int_0^T P(x + t) e^{-t} dt = e^x \int_x^{x+T} P(s) e^{-s} ds.$$

L'intégrale à droite converge absolument à l'infini, car une puissance de s est dominée par l'exponentielle ; sur toute portion finie, l'intégrande est continue. Le passage à la limite $T \rightarrow +\infty$ fournit

$$u(P)(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(s)e^{-s} ds.$$

38. Posons $h(s) = P(s)e^{-s}$ et $H(x) = \int_x^{+\infty} h(s) ds$. L'intégrale $C = \int_0^{+\infty} h(s) ds$ converge et, pour tout réel x ,

$$H(x) = C - \int_0^x h(s) ds.$$

Cette identité vaut aussi pour $x < 0$ avec l'orientation usuelle des intégrales. Comme h est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème fondamental donne $H'(x) = -P(x)e^{-x}$. On n'a pas dérivé sous une intégrale impropre : on a isolé une constante et une intégrale sur segment.

D'après la question 37, $u(P)(x) = e^x H(x)$. La règle du produit donne

$$(u(P))'(x) = e^x H(x) - P(x) = u(P)(x) - P(x).$$

Enfin, la question 35 affirme $u(P) - P = u(P')$, donc $(u(P))' = u(P')$.

39. Pour $0 \leq j \leq n-1$, la question 36 donne

$$u(X^j) = \sum_{k=0}^j \frac{j!}{(j-k)!} X^{j-k} = \sum_{i=0}^j \frac{j!}{i!} X^i.$$

En numérotant lignes et colonnes de 0 à $n-1$, la matrice U est définie par

$$U_{i,j} = \begin{cases} \frac{j!}{i!} & i \leq j, \\ 0 & i > j. \end{cases}$$

Ainsi,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2! & \cdots & (n-1)! \\ 0 & 1 & 2! & \cdots & (n-1)! \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{(n-1)!}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale ne contient que 1. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux ; donc $\text{Sp}(u) = \{1\}$.

40. Méthode 1 — Degré et théorème du rang

La question 36 donne $v(P) = P' + P'' + \cdots + P^{(n-1)}$. Si P est non constant de degré j et de coefficient dominant $b \neq 0$, le terme de degré le plus élevé de $v(P)$ provient de P' : il vaut jbX^{j-1} . Ainsi $\deg v(P) = j - 1$. Pour P constant, $v(P) = 0$.

On a donc $\text{Im}(v) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $\text{Ker } v$ est exactement l'espace des constantes, de dimension 1. Par le théorème du rang, $\dim \text{Im}(v) = n - 1$. L'espace $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ a lui aussi dimension $n - 1$, donc

$$\text{Im}(v) = \mathbb{R}_{n-2}[X].$$

Méthode 2 — Résolution constructive avec la dérivation

Notons D l'endomorphisme de dérivation. La question 36 donne $u = \text{id}_E + D + \cdots + D^{n-1}$, avec $D^n = 0$. En multipliant ces polynômes en D ,

$$u(\text{id}_E - D) = (\text{id}_E - D)u = \text{id}_E.$$

De plus, la question 35 donne $v = uD$. Pour Q de degré au plus $n - 2$, choisir une primitive polynomiale $R \in E$ telle que $R' = Q$. Posons $P = (\text{id}_E - D)R$. Puisque D commute avec u et $\text{id}_E - D$,

$$v(P) = uD(\text{id}_E - D)R = u(\text{id}_E - D)DR = Q.$$

Chaque élément de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ est donc atteint, et l'inclusion opposée résulte de la baisse du degré. Cette méthode construit un antécédent, tandis que la première calcule la dimension de l'image.

- 41.** D'après la question 40, v diminue exactement d'une unité le degré de tout polynôme non constant, et annule les constantes. Après n applications, tout élément de E est donc annulé : $v^n = 0$.

En partant de X^{n-1} , les coefficients dominants sont successivement multipliés par $n - 1, n - 2, \dots, 1$. Ainsi

$$v^{n-1}(X^{n-1}) = (n - 1)! \neq 0.$$

L'indice de nilpotence de v est exactement n . Par la question 32, v est cyclique, avec pour vecteur cyclique X^{n-1} .

Partie III — Décomposition de Frobenius et applications

Section A — Cas d'une homothétie

- 42.** Si $u = \lambda \text{id}_E$, choisir une base $(b_1, \dots, b_n)$ et poser $F_i = \text{Vect}(b_i)$. Ces droites sont non nulles, stables par u et vérifient $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$. Les restrictions à ces espaces de dimension 1 sont cycliques par la convention du sujet. La propriété $(\mathcal{R})$ est donc réalisée avec $p = n$.

Section B — Cas où u n'est pas une homothétie

- 43.** La contraposée de la question 6 assure que, si u n'est pas une homothétie, il existe $e \neq 0$ tel que $d(e) \neq 1$. Comme $1 \leq d(e) \leq n$, cela signifie $d(e) \geq 2$. L'ensemble des valeurs $d(x)$, pour $x \neq 0$, est une partie non vide de $\{1, \dots, n\}$; il possède un maximum atteint par un vecteur e . On peut donc effectuer le choix annoncé.

44. Si $d = n$, la question 7 montre que u est cyclique. La propriété $(\mathcal{R})$ est satisfaite avec un seul sous-espace $F_1 = E$.

45. Les coordonnées d'un vecteur dans une base dépendent linéairement de ce vecteur. Plus explicitement, si

$$x = \sum x_k e_k,$$

$$y = \sum y_k e_k$$

et $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$\varphi(ax + by) = ax_{d-1} + by_{d-1} = a\varphi(x) + b\varphi(y).$$

L'application est donc une forme linéaire. Elle n'est pas nulle puisque $\varphi(e_{d-1}) = 1$.

46. Chaque application $x \mapsto \varphi(u^j(x))$ est une composition d'applications linéaires, donc est linéaire. Les d coordonnées de Φ étant linéaires, $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^d$ est linéaire. Ainsi $G = \text{Ker } \Phi$ est un sous-espace de E , et la restriction $\tilde{\Phi} : F_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$ est linéaire.

47. Pour $0 \leq j \leq d-1$, on a $u^j(e) = e_j$ et $\varphi(e_j) = 0$ sauf lorsque $j = d-1$, où la valeur est 1. Donc

$$\Phi(e_0) = (1, 0, \dots, 0).$$

Puisque

$$u^d(e) = \sum_{j=0}^{d-1} a_j e_j,$$

on a $\varphi(u^d(e)) = a_{d-1}$. Ainsi

$$\Phi(e_1) = (a_{d-1}, 1, 0, \dots, 0).$$

Pour la formule générale, numérotons les coordonnées de Φ de 0 à $d-1$. La coordonnée i de $\Phi(e_k)$ est $\varphi(u^{d-1-i+k}(e))$. Si $i = k$, elle vaut 1. Si $i > k$, l'exposant est compris entre 0 et $d-2$, donc elle vaut 0. Pour $i < k$, on note sa valeur $\beta_{i,k}$. Cela donne exactement

$$\Phi(e_k) = (\beta_{0,k}, \dots, \beta_{k-1,k}, 1, 0, \dots, 0).$$

48. Les colonnes sont les vecteurs calculés en question 47. La matrice de $\tilde{\Phi}$ est donc

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \beta_{0,1} & \beta_{0,2} & \cdots & \beta_{0,d-1} \\ 0 & 1 & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,d-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \beta_{2,d-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice triangulaire a tous ses coefficients diagonaux non nuls, donc elle est inversible. On peut aussi résoudre $TX = Y$ en remontant depuis la dernière ligne : chaque coordonnée est déterminée de manière unique sans division par une quantité nulle. Ainsi $\tilde{\Phi}$ est bijective.

49. La somme directe se déduit de la bijectivité ; la stabilité demande un argument supplémentaire lié à la maximalité de d .

Pour tout $x \in E$, il existe un unique $z \in F_1$ tel que $\tilde{\Phi}(z) = \Phi(x)$. On a alors $x - z \in G$, donc $E = F_1 + G$. Si $z \in F_1 \cap G$, alors $\tilde{\Phi}(z) = 0$; son injectivité impose $z = 0$. Ainsi

$$E = F_1 \oplus G.$$

Établissons maintenant, avec des opérations sur des polynômes réels, la relation particulière nécessaire à la stabilité :

$$u^d = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k \quad \text{sur tout } E.$$

Cette relation est déjà connue sur e , mais sa validité sur tout E ne peut pas être supposée.

Posons

$$P(X) = X^d - \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k.$$

Pour un vecteur non nul y , la question 3 fournit un polynôme unitaire Q_y de degré $d(y)$ tel que $Q_y(u)y = 0$. Si un polynôme R vérifie $R(u)y = 0$, divisons-le par Q_y : $R = HQ_y + B$, avec $\deg B < d(y)$ ou $B = 0$. Alors $B(u)y = 0$. La liberté de $(y, u(y), \dots, u^{d(y)-1}(y))$ impose que tous les coefficients de B soient nuls. Donc

$$R(u)y = 0 \iff Q_y \text{ divise } R.$$

La réciproque provient directement de $Q_y(u)y = 0$. Pour $y = 0$, on pose $Q_0 = 1$, et l'équivalence reste vraie. En particulier, le polynôme correspondant à e est P .

Fixons un vecteur $y \in E$. Factorisons P et Q_y en facteurs unitaires réels irréductibles, de degrés 1 ou 2. Formons le polynôme unitaire L en prenant chaque facteur présent dans l'un des deux polynômes avec la plus grande de ses deux multiplicités. Par cette construction, P et Q_y divisent L , donc $L(u)e = L(u)y = 0$.

Pour chaque facteur irréductible h de L , au moins l'un des vecteurs

$$\left(\frac{L}{h}\right)(u)e \quad \text{et} \quad \left(\frac{L}{h}\right)(u)y$$

est non nul. En effet, si tous deux étaient nuls, l'équivalence précédente imposerait que P et Q_y divisent L/h . Ce serait impossible pour un polynôme dont la multiplicité de h réalise le maximum utilisé dans L .

L'équation vectorielle

$$\left(\frac{L}{h}\right)(u)(e + ty) = 0$$

exclut au plus une valeur réelle de t . Si le second vecteur ci-dessus est nul, le premier est non nul et il n'existe aucune valeur exclue ; sinon, deux solutions distinctes annuleraient leur différence et forceraient le second vecteur à être nul. Comme L possède seulement un nombre fini de facteurs irréductibles distincts, on peut choisir $t \in \mathbb{R}$ tel que, pour chacun d'eux,

$$\left(\frac{L}{h}\right)(u)(e + ty) \neq 0.$$

Posons $z = e + ty$. Ces inégalités assurent $z \neq 0$. Comme $L(u)z = 0$, le polynôme Q_z divise L . S'il en était un diviseur propre, sa factorisation montrerait qu'il existe un facteur h de L dont la multiplicité dans Q_z est strictement inférieure à celle dans L . Alors Q_z diviserait L/h , donc $(L/h)(u)z = 0$, contradiction. On a donc $Q_z = L$.

La maximalité de $d = d(e)$ donne $\deg L = d(z) \leq d$. Mais P divise L et a degré d . Les deux polynômes étant unitaires, $L = P$, et Q_y divise P . Ainsi $P(u)y = 0$ pour tout $y \in E$, ce qui établit la relation annoncée sur tout E . Cette démonstration utilise seulement les familles cycliques, la division et la factorisation réelles des polynômes ; aucun résultat général de réduction n'est supposé.

Prenons enfin $x \in G$. Par définition,

$$\varphi(u^j(x)) = 0 \quad (0 \leq j \leq d-1).$$

Pour $0 \leq j \leq d-2$, on a $\varphi(u^j(u(x))) = \varphi(u^{j+1}(x)) = 0$. Pour le dernier exposant, la relation établie donne

$$\varphi(u^{d-1}(u(x))) = \varphi(u^d(x)) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k \varphi(u^k(x)) = 0.$$

Donc $\Phi(u(x)) = 0$ et $u(x) \in G$. Le sous-espace G est stable par u .

50. Le sous-espace $F_1 = E_u(e)$ est stable par u , et $(e, u(e), \dots, u^{d-1}(e))$ en est une base par la question 3. Les itérés de e par u_{F_1} sont les mêmes que par u . Ils engendrent donc F_1 , ce qui prouve que u_{F_1} est cyclique.

51. Le nombre d a été choisi comme le maximum de $d(x)$ sur tous les vecteurs non nuls de E . Tout $e' \in G \setminus \{0\}$ étant aussi un vecteur de E , on a directement $d(e') \leq d$. La stabilité de G assure que ses itérés restent dans G ; le nombre de premiers itérés indépendants est donc le même qu'on les considère dans G ou dans E .
52. Démontrons $(\mathcal{R})$ par récurrence forte sur la dimension de l'espace. En dimension 1, toute restriction est cyclique par convention : l'espace lui-même réalise la décomposition.

Supposons la propriété établie pour toutes les dimensions strictement inférieures à n , et considérons u sur un espace de dimension n . Si u est une homothétie, la question 42 donne la décomposition. Sinon, choisir un vecteur de degré cyclique maximal $d \geq 2$. Si $d = n$, la question 44 conclut.

Si $d < n$, les questions 49 et 50 donnent $E = F_1 \oplus G$, avec F_1, G stables, u_{F_1} cyclique et $\dim G = n - d < n$. Comme $d < n$, G est non nul. L'hypothèse de récurrence appliquée à u_G fournit une somme directe de sous-espaces non nuls de G , stables par u_G et à restrictions cycliques. Ces espaces sont aussi stables par u ; en leur ajoutant F_1 , on obtient la décomposition recherchée de E . Le nombre de sous-espaces est compris entre 1 et n , car leurs dimensions positives ont pour somme n .

La récurrence établit $(\mathcal{R})$ en toute dimension finie positive. La démonstration n'a pas utilisé cette décomposition comme un théorème préalablement connu.

Section C — Première application : forme par blocs des endomorphismes nilpotents

53. Notons A_k la matrice de u_{F_k} dans $\mathcal{B}_{F_k}$. Un vecteur de cette base est envoyé dans F_k , par stabilité. Dans la base concaténée, les coordonnées de son image sur tous les autres sous-espaces sont donc nulles. La matrice de u est diagonale par blocs :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_p \end{pmatrix}.$$

Chaque bloc a taille $\dim F_k$.

54. La propriété $(\mathcal{R})$ fournit $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_s$, avec des restrictions cycliques. On note ici s le nombre de blocs pour ne pas le confondre avec l'indice de nilpotence p .

Puisque $u^p = 0$, chaque restriction u_{F_k} est nilpotente. Posons $m_k = \dim F_k$. En dimension $m_k \geq 2$, la question 32 montre que son indice vaut m_k et que, dans une base cyclique de F_k , sa matrice est J_{m_k} , avec des 1 sur la sous-diagonale et des 0 ailleurs. Si $m_k = 1$, la restriction nilpotente est nulle et son bloc est (0) , avec la même description.

En concaténant ces bases, la question 53 donne une matrice diagonale par blocs $J_{m_1}, \dots, J_{m_s}$. Elle est triangulaire inférieure, sa diagonale est nulle et sa sous-diagonale contient des 1 à l'intérieur des blocs et des 0 aux frontières. Tous les autres coefficients sont nuls, comme demandé. On a en outre $p = \max_k m_k$, puisque les puissances s'annulent bloc par bloc ; cette précision n'est pas nécessaire à la construction.

La forme obtenue est entièrement établie ici à partir de $(\mathcal{R})$ et de la question 32, sans supposer connue une théorie générale de réduction.

Section D — Deuxième application : toute matrice carrée réelle est semblable à sa transposée

55. On reprend les formules définissant f dans le sujet. Pour $j = 0$, on a

$$u(f(e)) = - \sum_{k=1}^{n-1} a_k u^k(e) + u^n(e) = a_0 e.$$

Pour $j = 1$, si $n \geq 3$, la formule donne

$$u(f(u(e))) = - \sum_{k=2}^{n-1} a_k u^{k-1}(e) + u^{n-1}(e).$$

Pour $n = 2$, $u(e) = u^{n-1}(e)$ et la dernière formule du sujet donne directement $u(f(u(e))) = u(e)$; cela coïncide avec l'expression précédente en interprétant la somme vide comme nulle.

Plus généralement, pour $1 \leq j \leq n-2$, une simple application de u à chaque terme donne

$$u(f(u^j(e))) = - \sum_{k=j+1}^{n-1} a_k u^{k-j}(e) + u^{n-j}(e).$$

La formule de calcul par application de u est également valable pour $j = 0$, mais dans ce cas le terme $u^n(e)$ se réduit à l'aide de la relation de cyclicité et donne $a_0 e$, comme calculé plus haut.

Enfin, comme $f(u^{n-1}(e)) = e$,

$$u(f(u^{n-1}(e))) = u(e).$$

Toutes les images demandées sont donc déterminées, y compris le cas limite $n = 2$.

56. La matrice AS est celle de $u \circ f$ dans la base cyclique. Sa première colonne est ${}^t(a_0, 0, \dots, 0)$ par la question 55. Dans chacune des autres colonnes, les formules de cette question ne contiennent que $u(e), \dots, u^{n-1}(e)$: la première ligne est donc nulle en dehors de sa première entrée.

Pour une colonne $j \geq 2$, le vecteur de base correspondant est $u^{j-1}(e)$. Pour $j \leq n-1$, la question 55 donne

$$u(f(u^{j-1}(e))) = - \sum_{k=j}^{n-1} a_k u^{k-j+1}(e) + u^{n-j+1}(e).$$

La coordonnée de ligne $i \geq 2$ est donc $-a_{i+j-2}$ si $i+j \leq n+1$, 1 si $i+j = n+2$, et 0 sinon. Pour $j = n$, l'image est $u(e)$, ce qui donne aussi le coefficient 1 en ligne 2 et des 0 ailleurs. On retrouve la formule de S_1 dans le sujet.

Les coefficients du bloc inférieur droit ne dépendent que de $i+j$. Ils sont donc invariants par échange de i, j ; avec la première ligne et la première colonne calculées, on conclut que $S_1 = AS$ est symétrique.

57. Méthode 1 — Résolution du système homogène

Dans $SX = 0$, la dernière ligne donne $x_1 = 0$. La ligne précédente donne $-a_{n-1}x_1 + x_2 = 0$, donc $x_2 = 0$. En remontant, chaque nouvelle ligne a pour dernier coefficient non nul un 1 et ne fait intervenir avant lui que des coordonnées déjà annulées. Une récurrence donne $x_1 = \dots = x_n = 0$. Ainsi $\text{Ker } S = \{0\}$; comme S est carrée, elle est inversible par le théorème du rang.

Méthode 2 — Retournement de l'ordre des colonnes

Soit J la matrice envoyant la base canonique $(b_1, \dots, b_n)$ sur $(b_n, \dots, b_1)$. On a $J^2 = I_n$, donc J est inversible. Le coefficient (i, k) de SJ vaut $s_{i, n+1-k}$. Il est nul lorsque $i > k$ et vaut 1 lorsque $i = k$. Ainsi SJ est triangulaire supérieure avec diagonale égale à 1, donc est inversible. Comme $S = (SJ)J$, S est inversible.

Les deux preuves évitent tout déterminant. La première est un pivot guidé; la seconde transforme la structure anti-diagonale en structure triangulaire.

La définition de S ne dépend que de $i + j$, donc S est symétrique. Par transposition de l'inverse,

$${}^t(S^{-1}) = ({}^tS)^{-1} = S^{-1}.$$

Ainsi $S_2 = S^{-1}$ est symétrique. Avec $S_1 = AS$, on obtient $A = S_1S_2$, et les deux facteurs sont symétriques réels.

58. La matrice P a pour colonnes une base de E , donc est inversible. Avec la convention explicitée dans le sujet, $M = PAP^{-1}$. Par la question 57,

$$M = PS_1S_2P^{-1} = PS_1{}^tP({}^tP)^{-1}S_2P^{-1}.$$

Posons

$$V = PS_1{}^tP, \quad W = ({}^tP)^{-1}S_2P^{-1}.$$

Puisque S_1, S_2 sont symétriques,

$${}^tV = P {}^t(S_1) {}^tP = V$$

et

$${}^tW = ({}^tP)^{-1} {}^t(S_2) {}^tP^{-1} = W.$$

Les trois facteurs de W sont inversibles ; W est donc inversible. On a $M = VW$, ce qui prouve $(\mathcal{S})$ dans le cas cyclique.

59. Comme V et W sont symétriques, ${}^tM = {}^t(VW) = WV$. Posons $Q = W^{-1}$. Cette matrice est réelle, inversible et symétrique. Alors

$$Q^{-1}MQ = W(VW)W^{-1} = WV = {}^tM.$$

On peut également l'écrire explicitement à partir de la question 58 :

$$Q = W^{-1} = PS {}^tP.$$

Cela donne une matrice de similitude symétrique inversible. Aucune inversibilité de V ou de M n'a été supposée.

60. La propriété $(\mathcal{R})$ et la question 53 fournissent une base dans laquelle u a une matrice diagonale par blocs cycliques $A_1, \dots, A_s$. Il existe donc une matrice inversible C telle que

$$M = CDC^{-1}, \quad D = \text{diag}(A_1, \dots, A_s).$$

Pour chaque bloc de taille au moins 2, le cas cyclique, appliqué dans son espace propre de définition, fournit une matrice symétrique inversible Q_i telle que ${}^t(A_i) = Q_i^{-1}A_iQ_i$. Un bloc de taille 1 est déjà égal à sa transposée ; on peut prendre $Q_i = (1)$.

Posons $R = \text{diag}(Q_1, \dots, Q_s)$. Cette matrice est symétrique inversible et vérifie ${}^tD = R^{-1}DR$. La transposition de $M = CDC^{-1}$ donne

$${}^tM = {}^t(C^{-1}) {}^tD {}^tC = {}^t(C^{-1}) R^{-1} D R {}^tC.$$

En posant $Q = CR {}^tC$, on a $Q^{-1} = {}^t(C^{-1}) R^{-1} C^{-1}$, donc

$$Q^{-1}MQ = {}^t(C^{-1})R^{-1}DR{}^tC = {}^tM.$$

Ainsi toute matrice carrée réelle est semblable à sa transposée. La preuve construit même une matrice de similitude symétrique inversible. Pour une matrice d'ordre 1, la conclusion est immédiate ; elle reste donc valable pour tout ordre positif.

Relevé des adaptations

- Questions 1–13, 19–29 et 42–60 : tous les espaces, scalaires et valeurs propres sont réels. Le préambule a été restreint en conséquence, ce qui conserve l'ensemble des démonstrations et des dépendances utiles.
- Questions 9, 11–13 et 21 : P_A est présenté comme le polynôme explicitement associé à une matrice de Frobenius. Ses propriétés sont démontrées par action sur une base et résolution du système propre ; aucune définition ou propriété générale d'un polynôme caractéristique n'est supposée.
- Question 20 : ajout de l'hypothèse que P est scindé sur $\mathbb{R}$, et remplacement de la demande initiale par l'équivalence entre une racine réelle multiple et un pgcd de P, P' de degré positif. Sans l'hypothèse de scindement, un diviseur commun de degré 2 peut ne posséder aucune racine réelle.
- Question 21 : Code adapté en Python. Le test est formulé sous l'hypothèse de scindement réel et sa portée pour la diagonalisation réelle est précisée. Le préambule informatique décrit la représentation des polynômes et les fonctions utilisées, sans conserver l'ancien langage.
- Question 24 : Code adapté en Python. La condition $\text{pas} > 0$ est explicitée. Rectification de la borne initiale : le PDF indique $m - \text{pas}/2$; la version adaptée indique $-m - \text{pas}/2$, conformément au parcours annoncé depuis un réel situé en deçà de toutes les racines. La borne supérieure et le dépassement final sont conservés.
- Question 25 : le test Python est appliqué à la diagonalisation sur $\mathbb{R}$; sa réponse

indéterminée est distinguée d'une preuve de non-diagonalisation, en cohérence avec la question 13.

- Questions 53–54 : le titre de section décrit la forme par blocs effectivement démontrée, sans présenter une théorie générale de réduction comme connue. Les demandes et la forme matricielle finale sont conservées.

Aucun résultat mathématique n'a dû être admis dans cette version. Aucun passage utile du sujet ne reste illisible.