



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques

2021

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, N désigne un entier supérieur ou égal à 1 et $n = 2^N$. Les coordonnées des vecteurs et les coefficients des matrices sont indexés de 0 à $n - 1$.

On pose $\text{cas}(t) = \cos(t) + \sin(t)$ pour tout réel t et

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Les formules d'addition du sinus et du cosinus donnent $R(t)R(u) = R(t + u)$, ${}^t(R(t)) = R(-t)$ et ${}^t(R(t))R(t) = I_2$. On pourra utiliser ces identités. On pourra également utiliser

$$\text{cas}(a)\text{cas}(b) = \cos(a - b) + \sin(a + b)$$

et

$$I_2 + R(t) = 2\cos(t/2)R(t/2).$$

On note $\mathcal{B}_n = (e_0, \dots, e_{n-1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et

$$e_\Sigma = \sum_{j=0}^{n-1} e_j.$$

Un vecteur $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$ sera identifié à la colonne X de ses coordonnées. Le produit scalaire usuel est $\langle x, y \rangle = {}^tXY$ et

$$\|x\|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} x_j^2.$$

On étudie l'application linéaire

$$F_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto \left(\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi k j}{n}\right) x_j \right)_{0 \leq k < n}.$$

Cette application est appelée transformée de Hartley discrète. Sa matrice dans $\mathcal{B}_n$ est

$$A_n = \left(\cos\left(\frac{2\pi k j}{n}\right) \right)_{0 \leq k, j < n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Si λ est une valeur propre réelle d'un endomorphisme g , on note $E_\lambda(g) = \text{Ker}(g - \lambda \text{id})$. Un sous-espace G est stable par g lorsque $g(G) \subset G$; on note alors $g|_G$ l'endomorphisme induit sur G .

Partie I — Premières propriétés de l'application F_n

1. Préliminaires.

1. (a) Posons $R_n = R(2\pi/n)$. Que vaut R_n^n ? Plus généralement, que vaut $(R_n^k)^n$ pour $k \in \mathbb{Z}$? Montrer que les matrices R_n^k , pour $0 \leq k < n$, sont deux à deux distinctes. Justifier également que les réels $\cos(2\pi k/n)$, pour $0 \leq k \leq n/2$, sont deux à deux distincts.

1. (b) Soit $s \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$\sum_{q=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi s q}{n}\right) = \begin{cases} n & \text{si } s \text{ est un multiple de } n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \sum_{q=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2\pi s q}{n}\right) = 0.$$

On pourra considérer la somme des puissances de $R(2\pi s/n)$ et utiliser un télescopage matriciel.

2. Cas particulier $n = 2$.

- 2. (a) Expliciter la matrice A_2 . Est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.
- 2. (b) A_2 est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.

3. Cas particulier $n = 4$.

- 3. (a) Expliciter la matrice A_4 et calculer $A_4^{-1}(A_4)$. En déduire que A_4 est inversible et donner son inverse.
- 3. (b) Calculer A_4^2 puis A_4^4 . En déduire un polynôme annulateur non nul de A_4 .
- 3. (c) Quelles sont les valeurs propres possibles de A_4 ?
- 3. (d) On note $P = \text{Vect}(e_0, e_\Sigma)$. Montrer que P est stable par F_4 . Écrire la matrice C_4 de $F_4|_P$ dans la base (e_0, e_Σ) de P . Déterminer les valeurs propres de C_4 et une base de vecteurs propres de C_4 . En déduire que 2 et -2 sont valeurs propres de F_4 et déterminer des vecteurs propres associés.
- 3. (e) Calculer $F_4(e_0 + e_2)$ et $F_4(e_1 - e_3)$. En déduire le spectre de F_4 et ses espaces propres. F_4 est-il diagonalisable ?

4. Exemples de transformées discrètes.

Soient

$$x = \sum_{j=0}^{n-1} x_j e_j \in \mathbb{R}^n$$

et

$$y = F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k e_k.$$

4. (a) Déterminer y dans les trois cas suivants.

4. (a) i. $x = e_\Sigma$.

4. (a) ii.

$$x = \sum_{j=0}^{n-1} a^j e_j,$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $|a| \neq 1$. Pour calculer les sommes trigonométriques, on pourra utiliser

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^j R(t)^j$$

et l'identité de somme géométrique matricielle.

4. (a) iii.

$$x = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} e_j.$$

On pourra utiliser la formule du binôme appliquée à $I_2 + R(t)$ et l'identité donnée dans le préambule.

4. (b) Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$y_k + y_{n-k} = 2 \sum_{j=0}^{n-1} x_j \cos\left(\frac{2\pi k j}{n}\right), \quad y_k - y_{n-k} = 2 \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sin\left(\frac{2\pi k j}{n}\right).$$

En déduire que, si $x_j = x_{n-j}$ pour $1 \leq j < n$, alors $y_k = y_{n-k}$ pour $1 \leq k < n$.

5. Inversibilité de A_n et formule de Parseval.

5. (a) Calculer $A_n^t(A_n)$. Justifier que A_n est inversible et préciser A_n^{-1} .

5. (b) Justifier que F_n est inversible et préciser F_n^{-1} .

5. (c) Montrer que, pour toute colonne réelle X de taille n ,

$$n^t X X = {}^t(A_n X) A_n X.$$

5. (d) En déduire la formule de Parseval :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi k j}{n}\right) x_j \right)^2 = n \sum_{j=0}^{n-1} x_j^2.$$

6. Valeurs propres de A_n .

6. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A_n . Montrer que $|\lambda| = \sqrt{n}$. On pourra utiliser la question 5. (c).

6. (b) Montrer que $A_n^2 = nI_n$.

6. (c) Préciser A_n^4 . En déduire un polynôme annulateur non nul de A_n et les valeurs propres possibles de A_n .

7. Construction de vecteurs propres de F_n .

Dans cette question, on suppose $n \geq 8$. On note

$$e_{\cos} = \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) e_j, \quad e_{\sin} = \sum_{j=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) e_j.$$

7. (a) Calculer $F_n(e_1 + e_{n-1})$ et $F_n(e_1 - e_{n-1})$ en fonction de $e_{\cos}$ et $e_{\sin}$.
7. (b) On note G_n l'endomorphisme canoniquement associé à A_n^2 . Préciser $G_n(e_1 + e_{n-1})$ et $G_n(e_1 - e_{n-1})$. En déduire $F_n(e_{\cos})$ et $F_n(e_{\sin})$.
7. (c) On note $Q = \text{Vect}(e_1 + e_{n-1}, e_{\cos})$. Vérifier que $\dim Q = 2$ et que Q est stable par F_n . Donner la matrice de $F_n|_Q$ dans la base $(e_1 + e_{n-1}, e_{\cos})$. Déterminer ses valeurs propres et une base de vecteurs propres. En déduire des vecteurs propres de F_n associés à $\sqrt{n}$ et $-\sqrt{n}$.
7. (d) Procéder de la même façon avec $R = \text{Vect}(e_1 - e_{n-1}, e_{\sin})$.
7. (e) En déduire toutes les valeurs propres de F_n .

Partie II — Lien avec les matrices circulantes

Soit $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. On appelle matrice circulante associée à a la matrice

$$C(a) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $C(a)_{r,j} = a_{(j-r) \bmod n}$, où $\ell \bmod n$ désigne l'unique entier de $\{0, \dots, n-1\}$ congru à ℓ modulo n .

On pose $J_n = C(0, 1, 0, \dots, 0)$ et on note φ_n l'endomorphisme de matrice J_n dans $\mathcal{B}_n$. On note $\text{Circ}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices circulantes réelles de taille n .

8. Puissances successives de J_n .

8. (a) Pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$, déterminer $\varphi_n(e_j)$ puis $\varphi_n^2(e_j)$. En déduire la matrice J_n^2 .

8. (b) Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Montrer que

$$\varphi_n^k(e_j) = e_{j-k} \quad \text{si } k \leq j < n, \quad \varphi_n^k(e_j) = e_{n-k+j} \quad \text{si } 0 \leq j < k.$$

8. (c) Pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$, calculer $\varphi_n^n(e_j)$. Que vaut φ_n^n ?

8. (d) Déduire de ce qui précède l'expression des matrices J_n^k , pour $1 \leq k \leq n$.

9. Réduction réelle de J_n .

On pose $m = n/2$, $u = e_\Sigma$,

$$v = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j e_j$$

et, pour $1 \leq k < m$,

$$c_k = \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi k j}{n}\right) e_j, \quad s_k = \sum_{j=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2\pi k j}{n}\right) e_j, \quad V_k = \text{Vect}(c_k, s_k).$$

9. (a) Dédurre de la question 8 les valeurs propres réelles possibles de J_n .
9. (b) Calculer $\varphi_n(u)$, $\varphi_n(v)$, $\varphi_n(c_k)$ et $\varphi_n(s_k)$. Montrer que chaque V_k est stable par φ_n et donner la matrice de $\varphi_n|_{V_k}$ dans (c_k, s_k) .
9. (c) Montrer, à l'aide de la question 1. (b), que la famille

$$\mathcal{D}_n = \left(\frac{u}{\sqrt{n}}, \frac{v}{\sqrt{n}}, \sqrt{\frac{2}{n}}c_1, \sqrt{\frac{2}{n}}s_1, \dots, \sqrt{\frac{2}{n}}c_{m-1}, \sqrt{\frac{2}{n}}s_{m-1} \right)$$

est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Préciser les espaces propres réels de φ_n . Dire si J_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Si B_n est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{D}_n$, expliciter ${}^t(B_n)J_n B_n$ par blocs et en déduire une expression de J_n .

10. Structure de $\text{Circ}_n(\mathbb{R})$.

10. (a) Justifier que $\text{Circ}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En donner une base et la dimension.

10. (b) Montrer que $\text{Circ}_n(\mathbb{R})$ est stable par multiplication.

11. Réduction réelle des matrices circulantes.

Soit $a \in \mathbb{R}^n$.

11. (a) Vérifier que

$$C(a) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell J_n^\ell.$$

11. (b) Pour $0 \leq k \leq m$, on pose

$$\alpha_k = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell \cos\left(\frac{2\pi k\ell}{n}\right), \quad \beta_k = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell \sin\left(\frac{2\pi k\ell}{n}\right).$$

Expliciter ${}^t(B_n)C(a)B_n$ par blocs. Déterminer les valeurs propres réelles de $C(a)$ et donner une condition nécessaire et suffisante de diagonalisation réelle.

11. (c) Exemple. On prend $a_1 = a_{n-1} = 1$, tous les autres coefficients étant nuls. On note $S_n = C(a)$. Quelles sont ses valeurs propres ? La matrice S_n est-elle inversible ?

12. Caractérisation des matrices circulantes.

On pose $\Omega = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid J_n M = M J_n\}$. On veut montrer que $\Omega = \text{Circ}_n(\mathbb{R})$.

12. (a) Vérifier que $\text{Circ}_n(\mathbb{R}) \subset \Omega$.

Pour les questions suivantes, $M \in \Omega$ et g est l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique.

12. (b) Montrer que les droites $\text{Vect}(u)$ et $\text{Vect}(v)$ ainsi que les plans V_k sont stables par g . Pour les plans V_k , on pourra utiliser l'endomorphisme de matrice $T = J_n + J_n^{-1}$ et la distinction des réels $\cos(2\pi k/n)$.

12. (c) En déduire que ${}^t(B_n)MB_n$ est diagonale par blocs. Montrer que chaque bloc de

taille 2 est de la forme
$$\begin{pmatrix} p_k & q_k \\ -q_k & p_k \end{pmatrix}.$$

12. (d) Montrer que Ω est un sous-espace vectoriel de dimension n et qu'il est égal à $\text{Circ}_n(\mathbb{R})$.

Partie III — Construction algorithmique

13. Algorithme rapide de calcul de $F_n(x)$.

On rappelle que $n = 2^N$. Pour la terminaison de l'algorithme, on étend la définition à $n = 1$ en posant $F_1(x_0) = (x_0)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit $y, z \in \mathbb{R}^{n/2}$ par $y_j = x_{2j}$ et $z_j = x_{2j+1}$. Par exemple, pour $n = 8$, $y = (x_0, x_2, x_4, x_6)$ et $z = (x_1, x_3, x_5, x_7)$.

13. (a) On pose $m = n/2$, $Y = F_m(y)$ et $Z = F_m(z)$. Montrer que, pour $0 \leq k < m$,

$$[F_n(x)]_k = Y_k + \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) Z_k + \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) Z_{(-k) \bmod m}$$

et

$$[F_n(x)]_{k+m} = Y_k - \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) Z_k - \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) Z_{(-k) \bmod m}.$$

13. (b) On suppose Y et Z déjà calculés. On considère le code Python suivant. Les tableaux C et S contiennent respectivement $\cos(2\pi k/n)$ et $\sin(2\pi k/n)$ pour $0 \leq k < m$; ils sont supposés déjà disponibles.

Python

```
import numpy as np

def assemblage(Y, Z, C, S):
    m = len(Y)
    alpha = np.zeros(2 * m)
    for k in range(m):
        r = (m - k) % m
        B = C[k] * Z[k] + S[k] * Z[r]
        alpha[k] = Y[k] + B
```

```
alpha[k + m] = Y[k] - B
return alpha
```

La commande Python `len(Y)` renvoie le nombre de coordonnées du tableau `Y`.

L'opérateur Python `%` renvoie le reste dans la division euclidienne : pour un entier $m > 0$, $a \% m$ appartient à $\text{range}(m)$ et est congru à a modulo m .

Comparer le vecteur renvoyé par ce code à $F_n(x)$.

- 13.** (c) On compte uniquement les additions, soustractions, multiplications et divisions de réels dans le calcul des transformées et leur assemblage. Les calculs d'indices, les affectations et la préparation des tableaux trigonométriques ne sont pas comptés. Les opérations écrites dans le code sont comptées même si un facteur vaut 0 ou 1.

On note u_N le nombre d'opérations nécessaires pour calculer $F_{2N}(x)$ par division successive entre indices pairs et impairs, avec $u_0 = 0$. La gestion de la mémoire n'est pas prise en compte.

Justifier que $u_N = 2u_{N-1} + 5 \times 2^{N-1}$ pour $N \geq 1$.

- 13.** (d) En déduire la valeur de u_N en fonction de N , puis en fonction de n . On pourra étudier $v_N = u_N/2^N$.

14. Produit de convolution de deux vecteurs réels.

Soient $y, z \in \mathbb{R}^{n/2}$. On les prolonge par des zéros en deux vecteurs $\tilde{y}, \tilde{z} \in \mathbb{R}^n$. On conserve les notations y_j, z_j pour leurs coordonnées, de sorte que $y_j = z_j = 0$ pour $n/2 \leq j < n$.

On définit $x = y * z \in \mathbb{R}^n$ par

$$x_r = \sum_{j=0}^r y_j z_{r-j}, \quad 0 \leq r < n.$$

On pose $Y = F_n(\tilde{y})$ et $Z = F_n(\tilde{z})$. Pour $0 \leq k < n$, on note $k^* = (-k) \bmod n$.

14. (a) Montrer que

$$[F_n(x)]_k = \frac{Y_k(Z_k + Z_{k^*}) + Y_{k^*}(Z_k - Z_{k^*})}{2}.$$

On pourra exprimer les sommes de cosinus et de sinus à l'aide de Y_k, Y_{k^*} et de Z_k, Z_{k^*} , puis utiliser les formules d'addition.

14. (b) On calcule successivement les deux transformées Y, Z par l'algorithme de la question 13, puis $W = F_n(x)$ par le code ci-dessous, puis $x = F_n(W)/n$.

Python

```
import numpy as np

def produit_transforme(Y, Z):
    n = len(Y)
    W = np.zeros(n)
    for k in range(n):
        r = (n - k) % n
        p = (Z[k] + Z[r]) / 2
        q = (Z[k] - Z[r]) / 2
        W[k] = Y[k] * p + Y[r] * q
    return W
```

Avec la convention de comptage de la question 13, déterminer le nombre d'opérations de chacune des trois étapes. En déduire un équivalent, en fonction de n , du nombre total d'opérations.

14. (c) Comparer cette méthode au calcul par la définition

$$x_r = \sum_{j=0}^r y_j z_{r-j}$$

pour $0 \leq r < n$. Compter exactement les multiplications et additions lorsque l'on évite les produits connus nuls dus au prolongement par zéro, en initialisant chaque somme non vide par son premier terme, puis donner un équivalent du coût direct.