



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques

2021

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Les notations sont celles du sujet. Les matrices et les espaces vectoriels sont réels. La fonction cas est définie par $\text{cas}(t) = \cos t + \sin t$.

Partie I — Premières propriétés de l'application F_n

1. (a)

Question adaptée au programme actuel. Les puissances de rotations réelles remplacent les puissances du coefficient initial de la transformée. La dernière demande porte sur la distinction des cosinus utiles à la réduction réelle de la partie II.

Par les formules d'addition, $R(t)R(u) = R(t+u)$. Ainsi, pour tout entier k , $R_n^k = R(2\pi k/n)$; pour les entiers négatifs, on utilise $R(t)^{-1} = R(-t)$.

Par conséquent,

$$R_n^n = R(2\pi) = I_2, \quad (R_n^k)^n = R(2\pi k) = I_2.$$

Supposons $R_n^k = R_n^{k'}$ avec $0 \leq k, k' < n$. En multipliant par $R_n^{-k'}$, on obtient $R(2\pi(k-k')/n) = I_2$. L'égalité impose un cosinus égal à 1 et un sinus égal à 0, donc $(k-k')/n \in \mathbb{Z}$. Comme $|k-k'| < n$, nécessairement $k = k'$.

Enfin, les angles $2\pi k/n$, pour $0 \leq k \leq n/2$, appartiennent à $[0, \pi]$. Le cosinus est strictement décroissant sur cet intervalle : sa dérivée vaut $-\sin t < 0$ sur $]0, \pi[$. Les cosinus considérés sont donc deux à deux distincts.

1. (b)

Question adaptée au programme actuel. On établit séparément les deux sommes trigonométriques.

Posons $\theta = 2\pi s/n$. Si n divise s , chaque terme de la somme des cosinus vaut 1 et chaque terme de la somme des sinus vaut 0. Les sommes valent donc respectivement n et 0.

Supposons maintenant que n ne divise pas s . Écrivons $c = \cos \theta$ et $d = \sin \theta$. Alors $c \neq 1$

et

$$(I_2 - R(\theta)) \begin{pmatrix} 1-c & -d \\ d & 1-c \end{pmatrix} = ((1-c)^2 + d^2)I_2 = 2(1-c)I_2.$$

Le réel $2(1-c)$ est strictement positif. Cette identité fournit un inverse à $I_2 - R(\theta)$, sans utiliser de déterminant.

Par télescopage,

$$(I_2 - R(\theta)) \sum_{q=0}^{n-1} R(\theta)^q = I_2 - R(\theta)^n = I_2 - R(2\pi s) = 0.$$

L'inversibilité précédente entraîne

$$\sum_{q=0}^{n-1} R(q\theta) = 0.$$

En lisant la première colonne, on obtient les deux égalités demandées.

Ainsi, pour tout $s \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{q=0}^{n-1} \cos(2\pi sq/n) = n \mathbf{1}_{\{n|s\}}, \quad \sum_{q=0}^{n-1} \sin(2\pi sq/n) = 0,$$

où $\mathbf{1}_{\{n|s\}}$ vaut 1 si n divise s , et 0 sinon.

2. (a)

Les valeurs de cas en 0 et π sont 1 et -1 . Donc

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La multiplication donne

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2.$$

Ainsi $A_2(A_2/2) = (A_2/2)A_2 = I_2$. La matrice est inversible et

$$A_2^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. (b)

Méthode 1 — Résolution du système propre.

Pour une valeur propre λ , l'identité $A_2^2 = 2I_2$ donne $\lambda^2 = 2$. Les seules possibilités sont donc $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Le système $A_2^t(a, b) = \lambda^t(a, b)$ s'écrit

$$a + b = \lambda a, \quad a - b = \lambda b.$$

La première équation impose $b = (\lambda - 1)a$. La seconde est alors satisfaite puisque $\lambda^2 = 2$. On ne peut avoir $a = 0$ pour un vecteur propre, car cela imposerait aussi $b = 0$.

Les vecteurs

$$v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}, \quad v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$$

sont donc propres, associés respectivement à $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont libres ; ils constituent une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi A_2 est diagonalisable.

Méthode 2 — Décomposition explicite en deux espaces propres.

Pour $x \in \mathbb{R}^2$, posons

$$x_+ = \frac{1}{2} \left(x + \frac{A_2 x}{\sqrt{2}} \right), \quad x_- = \frac{1}{2} \left(x - \frac{A_2 x}{\sqrt{2}} \right).$$

On a $x = x_+ + x_-$ et, grâce à $A_2^2 = 2I_2$,

$$A_2 x_+ = \sqrt{2} x_+, \quad A_2 x_- = -\sqrt{2} x_-.$$

Les deux espaces propres sont donc supplémentaires. Ils sont non nuls : en prenant $x = e_0$, les deux vecteurs obtenus ne sont pas nuls. Chacun a donc dimension 1. Leurs systèmes propres donnent les mêmes générateurs v_+ et v_- que ci-dessus.

La première méthode calcule directement une base propre. La seconde montre concrètement comment décomposer n'importe quel vecteur lorsque l'on connaît l'identité quadratique de la matrice.

3. (a)

Question adaptée au programme actuel. La matrice étudiée est la matrice réelle de Hartley ; le produit demandé utilise la transposée.

On utilise $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos(\pi) = -1$ et $\cos(3\pi/2) = 0$. On obtient

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chaque ligne a une norme au carré égale à 4. Leurs six produits scalaires distincts sont

$$1 + 1 - 1 - 1 = 0, \quad 1 - 1 + 1 - 1 = 0, \quad 1 - 1 - 1 + 1 = 0,$$

$$1 - 1 - 1 + 1 = 0, \quad 1 - 1 + 1 - 1 = 0, \quad 1 + 1 - 1 - 1 = 0.$$

Ainsi $A_4 {}^t(A_4) = 4I_4$. Comme ${}^t(A_4) = A_4$, on obtient aussi $A_4^2 = 4I_4$, et

$$A_4^{-1} = \frac{1}{4}A_4.$$

3. (b)

Question adaptée au programme actuel. Les puissances sont celles de la matrice réelle définie dans le sujet.

La question précédente donne $A_4^2 = 4I_4$. En élevant cette égalité au carré,

$$A_4^4 = 16I_4.$$

Les polynômes $P(X) = X^2 - 4$ et $Q(X) = X^4 - 16$ sont donc des polynômes annulateurs non nuls de A_4 . Le premier suffit pour déterminer les valeurs propres possibles.

3. (c)

Question adaptée au programme actuel.

Si $A_4 w = \lambda w$ avec $w \neq 0$, alors $A_4^2 w = \lambda^2 w$. Comme $A_4^2 = 4I_4$, on a $(\lambda^2 - 4)w = 0$, donc $\lambda^2 = 4$.

Les seules valeurs propres possibles sont 2 et -2 . Leur existence sera établie à la question suivante.

3. (d)

Le calcul de la première colonne et des sommes des lignes donne

$$F_4(e_0) = e_\Sigma, \quad F_4(e_\Sigma) = 4e_0.$$

Les vecteurs e_0 et e_Σ sont libres, car la coordonnée d'indice 1 de $ae_0 + be_\Sigma = 0$ impose $b = 0$, puis $a = 0$. Ils forment une base de P . Leurs images appartiennent à P , qui est donc stable.

Dans cette base,

$$C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour un vecteur de coordonnées (a, b) , le système propre est $4b = \lambda a$ et $a = \lambda b$. Un vecteur propre a $b \neq 0$ et vérifie $\lambda^2 = 4$. On peut choisir les coordonnées $(2, 1)$ pour $\lambda = 2$ et $(-2, 1)$ pour $\lambda = -2$.

Ces deux vecteurs sont libres et constituent une base propre de C_4 . Dans $\mathbb{R}^4$, ils correspondent à

$$w_+ = 2e_0 + e_\Sigma = (3, 1, 1, 1), \quad w_- = -2e_0 + e_\Sigma = (-1, 1, 1, 1).$$

On a $F_4(w_+) = 2w_+$ et $F_4(w_-) = -2w_-$. Les deux valeurs propres existent donc effectivement.

3. (e)

Question adaptée au programme actuel. Le second vecteur appartient désormais à un espace propre réel de Hartley.

En additionnant les colonnes d'indices 0 et 2, puis en soustrayant les colonnes d'indices 1 et 3, on obtient

$$F_4(e_0 + e_2) = (2, 0, 2, 0) = 2(e_0 + e_2),$$

$$F_4(e_1 - e_3) = (0, 2, 0, -2) = 2(e_1 - e_3).$$

Les trois vecteurs w_+ , $e_0 + e_2$ et $e_1 - e_3$ sont libres. En effet, dans

$$aw_+ + b(e_0 + e_2) + c(e_1 - e_3) = 0,$$

les coordonnées d'indices 1 et 3 donnent $a + c = 0$ et $a - c = 0$. Donc $a = c = 0$, puis la coordonnée d'indice 2 donne $b = 0$.

Ils appartiennent à $E_2(F_4)$, tandis que $w_- \neq 0$ appartient à $E_{-2}(F_4)$. Les espaces propres associés à deux valeurs distinctes sont en somme directe. Ces quatre vecteurs forment donc une base de $\mathbb{R}^4$.

Ainsi,

$$\text{Sp}(F_4) = \{-2, 2\},$$

$$E_2(F_4) = \text{Vect}(w_+, e_0 + e_2, e_1 - e_3), \quad E_{-2}(F_4) = \text{Vect}(w_-).$$

L'endomorphisme F_4 est diagonalisable, avec des espaces propres de dimensions 3 et 1.

4. (a)

Dans les trois exemples, on calcule les coordonnées

$$y_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \text{cas}(2\pi kj/n)$$

pour chaque $0 \leq k < n$.

4. (a) i.

Question adaptée au programme actuel : on calcule la transformée réelle du vecteur constant.

Pour chaque k ,

$$y_k = \sum_{j=0}^{n-1} \cos(2\pi k j/n) + \sum_{j=0}^{n-1} \sin(2\pi k j/n).$$

La question 1. (b) donne $y_0 = n$ et $y_k = 0$ pour $1 \leq k < n$. Donc

$$F_n(e_\Sigma) = ne_0.$$

4. (a) ii.

Question adaptée au programme actuel. Le paramètre a est réel et la somme est calculée à l'aide de rotations réelles.

Fixons k et posons $\theta = 2\pi k/n$, $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$. Le produit de deux matrices réelles donne

$$(I_2 - aR(\theta)) \begin{pmatrix} 1 - ac & -as \\ as & 1 - ac \end{pmatrix} = DI_2,$$

avec

$$D = (1 - ac)^2 + a^2 s^2 = 1 - 2ac + a^2.$$

Le réel D est strictement positif. S'il était nul, on aurait simultanément $ac = 1$ et $as = 0$, ce qui imposerait $a = 1$ ou $a = -1$, contrairement à $|a| \neq 1$.

Par télescopage matriciel,

$$(I_2 - aR(\theta)) \sum_{j=0}^{n-1} a^j R(\theta)^j = I_2 - a^n R(n\theta) = (1 - a^n)I_2.$$

On multiplie par l'inverse explicite précédent et on lit la première colonne :

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^j \cos(j\theta) = \frac{(1 - a^n)(1 - ac)}{D}, \quad \sum_{j=0}^{n-1} a^j \sin(j\theta) = \frac{(1 - a^n)as}{D}.$$

En additionnant,

$$y_k = \frac{(1 - a^n)(1 - a \cos(2\pi k/n) + a \sin(2\pi k/n))}{1 - 2a \cos(2\pi k/n) + a^2}.$$

Toutes les divisions sont justifiées par $D > 0$. Pour $k = 0$, cette formule se réduit à $y_0 = (1 - a^n)/(1 - a)$, ce qui retrouve la somme géométrique usuelle.

4. (a) iii.

Question adaptée au programme actuel : le binôme est appliqué à des matrices réelles qui commutent.

Fixons k et posons $\theta = 2\pi k/n$. Comme I_2 commute avec $R(\theta)$, le binôme matriciel donne

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} R(j\theta) = (I_2 + R(\theta))^{n-1}.$$

En utilisant l'identité du préambule,

$$(I_2 + R(\theta))^{n-1} = \left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right)^{n-1} R\left(\frac{(n-1)\theta}{2}\right).$$

La première colonne fournit la somme des cosinus et celle des sinus. Leur addition donne

$$y_k = \left(2 \cos \frac{\pi k}{n}\right)^{n-1} \cos \left(\frac{(n-1)\pi k}{n}\right).$$

Cette formule est valable même lorsque $\cos(\pi k/n) = 0$, puisque $n-1 \geq 1$ et qu'aucune division n'intervient. En particulier $y_0 = 2^{n-1}$ et $y_{n/2} = 0$.

4. (b)

Question adaptée au programme actuel. La relation entre fréquences opposées se formule par leurs sommes et différences.

La périodicité et la parité donnent, pour des indices entiers k, j ,

$$\cos(2\pi(n-k)j/n) = \cos(2\pi kj/n), \quad \sin(2\pi(n-k)j/n) = -\sin(2\pi kj/n).$$

En additionnant ou en soustrayant les expressions de y_k et y_{n-k} , on obtient exactement les deux identités demandées.

Si $x_j = x_{n-j}$, on groupe les termes d'indices j et $n-j$ dans la somme des sinus. Pour $1 \leq j < n/2$, leur contribution est

$$x_j \sin(2\pi kj/n) + x_{n-j} \sin(2\pi k(n-j)/n) = 0.$$

Les termes d'indices 0 et $n/2$ sont également nuls, car leurs sinus valent 0 et $\sin(k\pi) = 0$. Ainsi $y_k - y_{n-k} = 0$ pour chaque $1 \leq k < n$.

5. (a)

Question adaptée au programme actuel. Le produit matriciel et l'inverse utilisent la transposée réelle.

Le coefficient d'indices (k, ℓ) de $A_n^t(A_n)$ vaut

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos(2\pi kj/n) \cos(2\pi \ell j/n).$$

Par l'identité du préambule, c'est

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi(k-\ell)j}{n}\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2\pi(k+\ell)j}{n}\right).$$

La seconde somme est nulle. La première vaut n si n divise $k - \ell$, et 0 sinon. Avec $0 \leq k, \ell < n$, cette divisibilité équivaut à $k = \ell$. Donc

$$A_n {}^t(A_n) = nI_n.$$

Par définition des coefficients, ${}^t(A_n) = A_n$. Ainsi $A_n(A_n/n) = (A_n/n)A_n = I_n$, ce qui prouve

$$A_n^{-1} = \frac{1}{n}A_n.$$

5. (b)

Question adaptée au programme actuel : l'inverse concerne la transformée réelle.

Une application linéaire de dimension finie est inversible si sa matrice dans une base est inversible. La question précédente vérifie cette hypothèse. La matrice inverse est A_n/n , donc

$$F_n^{-1} = \frac{1}{n}F_n.$$

Autrement dit, si $y = F_n(x)$, alors, pour $0 \leq j < n$,

$$x_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2\pi jk/n) y_k.$$

5. (c)

Question adaptée au programme actuel.

En utilisant les règles de transposition et le résultat de 5. (a),

$${}^t(A_n X) A_n X = {}^t X {}^t(A_n) A_n X = {}^t X (nI_n) X = n {}^t X X.$$

C'est l'identité demandée. En termes de normes, elle s'écrit $\|F_n(x)\|^2 = n\|x\|^2$.

5. (d)

Question adaptée au programme actuel : Parseval s'exprime avec des carrés réels.

Les coordonnées de $F_n(x)$ sont

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos(2\pi kj/n) x_j.$$

En développant les deux normes de 5. (c), on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \cos(2\pi kj/n) x_j \right)^2 = n \sum_{j=0}^{n-1} x_j^2.$$

Toutes les sommes sont finies ; aucun argument de convergence ni échange de limites n'est nécessaire.

6. (a)

Question adaptée au programme actuel. Seules les valeurs propres réelles sont considérées.

Soit $x \neq 0$ tel que $F_n(x) = \lambda x$. La question 5. (c) donne

$$n\|x\|^2 = \|\lambda x\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2.$$

Comme $\|x\|^2 > 0$, on peut diviser : $\lambda^2 = n$. Par conséquent $|\lambda| = \sqrt{n}$.

6. (b)

Question adaptée au programme actuel. Le carré de la matrice de Hartley est un multiple de l'identité.

On a ${}^t(A_n) = A_n$ et $A_n {}^t(A_n) = nI_n$ par 5. (a). Donc

$$A_n^2 = nI_n.$$

L'entrée d'indices (k, j) vaut ainsi n si $k = j$, et 0 sinon. Ce résultat ne suppose aucun théorème de réduction supplémentaire.

6. (c)

Question adaptée au programme actuel.

En élevant au carré l'égalité précédente, $A_n^4 = n^2 I_n$. Les polynômes $X^2 - n$ et $X^4 - n^2$ sont donc annulateurs non nuls. Si λ est une valeur propre, $\lambda^2 - n = 0$; les possibilités sont $\sqrt{n}$ et $-\sqrt{n}$.

La matrice A_n est symétrique réelle, donc le théorème spectral assure sa diagonalisation réelle. L'existence effective des deux valeurs sera vérifiée en 7 pour $n \geq 8$; les cas 2 et 4 ont déjà été traités.

7. (a)

Question adaptée au programme actuel : les images sont entièrement réelles.

La coordonnée d'indice j de $F_n(e_1)$ est $\cos(2\pi j/n) + \sin(2\pi j/n)$. Celle de $F_n(e_{n-1})$ est $\cos(2\pi j/n) - \sin(2\pi j/n)$, par périodicité.

Leur somme et leur différence donnent

$$F_n(e_1 + e_{n-1}) = 2e_{\cos}, \quad F_n(e_1 - e_{n-1}) = 2e_{\sin}.$$

7. (b)

Question adaptée au programme actuel.

On a $G_n = F_n^2 = n \text{ id}$ par 6. (b). Donc

$$G_n(e_1 + e_{n-1}) = n(e_1 + e_{n-1}), \quad G_n(e_1 - e_{n-1}) = n(e_1 - e_{n-1}).$$

En appliquant F_n aux deux identités de 7. (a), on en déduit

$$F_n(e_{\cos}) = \frac{n}{2}(e_1 + e_{n-1}), \quad F_n(e_{\sin}) = \frac{n}{2}(e_1 - e_{n-1}).$$

La division par 2 est licite et les égalités découlent uniquement de la linéarité et du carré de F_n .

7. (c)

Question adaptée au programme actuel.

Posons $p = e_1 + e_{n-1}$. La coordonnée d'indice 0 de p vaut 0 et celle de $e_{\cos}$ vaut 1.

Comme $p \neq 0$, les vecteurs $p, e_{\cos}$ sont libres, donc $\dim Q = 2$.

Les résultats précédents donnent $F_n(p) = 2e_{\cos}$ et $F_n(e_{\cos}) = (n/2)p$. Le plan est donc stable et la matrice induite est

$$M_Q = \begin{pmatrix} 0 & n/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour des coordonnées (a, b) , le système propre est $(n/2)b = \lambda a$ et $2a = \lambda b$. Il impose $b \neq 0$ et $\lambda^2 = n$. On peut choisir $(a, b) = (\sqrt{n}/2, 1)$ et $(-\sqrt{n}/2, 1)$.

Les deux valeurs propres sont distinctes; ces deux vecteurs constituent une base propre de M_Q . Dans $\mathbb{R}^n$, on obtient

$$q_+ = e_{\cos} + \frac{\sqrt{n}}{2}(e_1 + e_{n-1}), \quad q_- = e_{\cos} - \frac{\sqrt{n}}{2}(e_1 + e_{n-1}),$$

associés respectivement à $\sqrt{n}$ et $-\sqrt{n}$.

7. (d)

Question adaptée au programme actuel. Le second plan fournit lui aussi deux valeurs propres réelles.

Posons $r = e_1 - e_{n-1}$. Sa coordonnée d'indice 2 vaut 0, car $n \geq 8$. Celle de $e_{\sin}$ vaut $\sin(4\pi/n) > 0$, puisque $0 < 4\pi/n \leq \pi/2$. Les deux vecteurs sont donc libres : dans $ar + be_{\sin} = 0$, la coordonnée d'indice 2 impose $b = 0$, puis $a = 0$.

Ainsi $\dim R = 2$. Les identités $F_n(r) = 2e_{\sin}$ et $F_n(e_{\sin}) = (n/2)r$ établissent sa stabilité et donnent, dans $(r, e_{\sin})$, la matrice

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & n/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système propre est donc le même qu'en 7. (c). Une base propre dans ces coordonnées est $((\sqrt{n}/2, 1), (-\sqrt{n}/2, 1))$. Les vecteurs correspondants sont

$$r_+ = e_{\sin} + \frac{\sqrt{n}}{2}(e_1 - e_{n-1}), \quad r_- = e_{\sin} - \frac{\sqrt{n}}{2}(e_1 - e_{n-1}).$$

Ils sont associés à $\sqrt{n}$ et $-\sqrt{n}$ et sont non nuls, par l'indépendance déjà vérifiée.

7. (e)

Question adaptée au programme actuel.

La question 6. (c) exclut toute valeur propre autre que $\sqrt{n}$ et $-\sqrt{n}$. Les vecteurs non nuls de 7. (c), ou ceux de 7. (d), montrent que les deux valeurs existent.

Donc, pour $n \geq 8$,

$$\text{Sp}(F_n) = \{-\sqrt{n}, \sqrt{n}\}.$$

Les questions 2 et 3 montrent que cette formule reste vraie pour $n = 2$ et $n = 4$.

Partie II — Lien avec les matrices circulantes

8. (a)

La colonne d'indice j de J_n contient un 1 à la ligne d'indice $(j - 1) \bmod n$, tous les autres coefficients étant nuls. Donc

$$\varphi_n(e_j) = \begin{cases} e_{j-1} & \text{si } 1 \leq j < n, \\ e_{n-1} & \text{si } j = 0. \end{cases}$$

En appliquant une seconde fois φ_n ,

$$\varphi_n^2(e_j) = e_{(j-2) \bmod n}.$$

Ainsi le coefficient d'indices (r, j) de J_n^2 vaut 1 lorsque $j - r$ est congru à 2 modulo n , et 0 sinon. Pour $n = 2$, on obtient $J_2^2 = I_2$. Pour $n \geq 4$, J_n^2 est la circulante dont la première ligne vaut 1 à l'indice 2 et 0 aux autres indices.

8. (b)

On prouve par récurrence sur k la formule compacte

$$\varphi_n^k(e_j) = e_{(j-k) \bmod n}.$$

Elle est vraie pour $k = 1$ par 8. (a). Si elle est vraie pour k , la formule de 8. (a) appliquée au vecteur de base obtenu donne

$$\varphi_n^{k+1}(e_j) = \varphi_n(e_{(j-k) \bmod n}) = e_{(j-k-1) \bmod n}.$$

La récurrence est établie. Pour $1 \leq k < n$, si $j \geq k$, l'indice $j - k$ est déjà entre 0 et $n - 1$; si $j < k$, son représentant dans cet intervalle est $n - k + j$.

On obtient bien les deux expressions du sujet.

8. (c)

Pour tout j , la formule précédente donne $\varphi_n^n(e_j) = e_{(j-n) \bmod n} = e_j$. Deux endomorphismes égaux sur une base sont égaux ; par conséquent

$$\varphi_n^n = \text{id}_{\mathbb{R}^n}, \quad J_n^n = I_n.$$

En particulier J_n est inversible et $J_n^{-1} = J_n^{n-1}$.

8. (d)

Les colonnes des puissances de J_n sont les coordonnées des images des vecteurs de base. Pour $1 \leq k \leq n$,

$$(J_n^k)_{r,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j - r \equiv k \pmod{n}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $1 \leq k < n$, cette matrice est la circulante dont la première ligne contient un unique 1 à l'indice k . Pour $k = n$, c'est I_n , dont la première ligne contient le 1 à l'indice 0.

9. (a)

Question adaptée au programme actuel : on ne recherche que les valeurs propres réelles.

Si $J_n w = \lambda w$ avec $w \neq 0$, alors $J_n^n w = \lambda^n w$. Comme $J_n^n = I_n$, on a $\lambda^n = 1$.

Or n est pair et λ est réel. L'égalité donne $|\lambda|^n = 1$, donc $|\lambda| = 1$. Les seules possibilités sont 1 et -1 .

9. (b)

Question adaptée au programme actuel. Les vecteurs trigonométriques donnent des plans réels stables.

Pour un vecteur x , la coordonnée d'indice j de $\varphi_n(x)$ est $x_{(j+1) \bmod n}$. Le décalage laisse donc u invariant. Il transforme la suite $((-1)^j)$ en son opposée, y compris au raccordement, puisque n est pair. Ainsi

$$\varphi_n(u) = u, \quad \varphi_n(v) = -v.$$

Fixons $1 \leq k < m$ et posons $\theta_k = 2\pi k/n$. Les formules d'addition donnent

$$\cos((j+1)\theta_k) = \cos \theta_k \cos(j\theta_k) - \sin \theta_k \sin(j\theta_k),$$

$$\sin((j+1)\theta_k) = \sin \theta_k \cos(j\theta_k) + \cos \theta_k \sin(j\theta_k).$$

Ces égalités sont valables aussi pour $j = n-1$ grâce à $n\theta_k = 2\pi k$. On en déduit

$$\varphi_n(c_k) = \cos \theta_k c_k - \sin \theta_k s_k,$$

$$\varphi_n(s_k) = \sin \theta_k c_k + \cos \theta_k s_k.$$

Le plan V_k est stable. Dans la base (c_k, s_k) , dont l'indépendance est vérifiée en 9. (c), la matrice est

$$L_k = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k \\ -\sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix} = R(-\theta_k).$$

9. (c)

Question adaptée au programme actuel. Une base orthonormale réelle remplace la base propre de l'énoncé initial.

Posons $\theta_j = 2\pi j/n$. Les formules d'addition impliquent

$$2 \cos a \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b),$$

$$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b),$$

$$2 \cos a \sin b = \sin(a+b) + \sin(b-a).$$

On les obtient en additionnant ou soustrayant les formules d'addition de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$, puis celles de $\sin(a+b)$ et $\sin(b-a)$.

Pour $1 \leq k, \ell < m$, les fréquences $k + \ell$ sont entre 2 et $n - 2$, donc ne sont jamais multiples de n . La fréquence $k - \ell$ est multiple de n exactement lorsque $k = \ell$. La question 1. (b) donne alors

$$\langle c_k, c_\ell \rangle = \frac{n}{2} \mathbf{1}_{\{k=\ell\}}, \quad \langle s_k, s_\ell \rangle = \frac{n}{2} \mathbf{1}_{\{k=\ell\}}, \quad \langle c_k, s_\ell \rangle = 0.$$

En particulier, c_k et s_k sont orthogonaux et non nuls, ce qui justifie que (c_k, s_k) est une base de V_k .

Les sommes de cosinus et de sinus de 1. (b) donnent également $\langle u, c_k \rangle = \langle u, s_k \rangle = 0$. On a $\|u\|^2 = \|v\|^2 = n$ et $\langle u, v \rangle = 0$, puisque la somme des n termes alternés vaut 0.

Enfin $(-1)^j = \cos(m\theta_j)$. En utilisant les mêmes formules de produit, les produits scalaires de v avec c_k ou s_k se ramènent aux fréquences $m + k$ et $m - k$, qui sont strictement comprises entre 0 et n . Ils sont donc nuls par 1. (b).

La famille $\mathcal{D}_n$ est ainsi orthonormale. Elle contient $2 + 2(m-1) = n$ vecteurs : c'est une base de $\mathbb{R}^n$. Pour $n = 2$, les plans V_k n'apparaissent pas et la famille se réduit aux deux premiers vecteurs.

Comme les colonnes de B_n sont orthonormales, ${}^t(B_n)B_n = I_n$ et $B_n^{-1} = {}^t(B_n)$. La question 9. (b) donne

$${}^t(B_n)J_nB_n = \text{diag}(1, -1, L_1, \dots, L_{m-1}) =: D_n,$$

$$J_n = B_n D_n {}^t(B_n).$$

Il reste à examiner les valeurs propres réelles des blocs L_k . Pour $1 \leq k < m$, on a $0 < \theta_k < \pi$, donc $s = \sin \theta_k > 0$. Si ${}^t(L_k(a, b)) = \lambda {}^t(a, b)$, avec $c = \cos \theta_k$, alors

$$(c - \lambda)a + sb = 0, \quad -sa + (c - \lambda)b = 0.$$

En additionnant les carrés de ces deux membres, on obtient

$$((c - \lambda)^2 + s^2)(a^2 + b^2) = 0.$$

Le premier facteur est strictement positif, donc $a = b = 0$. Aucun bloc L_k ne possède de vecteur propre réel non nul.

Par conséquent,

$$E_1(\varphi_n) = \text{Vect}(u), \quad E_{-1}(\varphi_n) = \text{Vect}(v).$$

Pour $n = 2$, ces deux droites fournissent une base propre et J_2 est diagonalisable. Pour $n \geq 4$, leur somme a dimension $2 < n$: J_n n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

10. (a)

L'application $a \mapsto C(a)$ est linéaire : pour $a, b \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$, les coefficients vérifient $C(a + tb) = C(a) + tC(b)$. Son image est précisément $\text{Circ}_n(\mathbb{R})$, qui est donc un sous-espace vectoriel.

Les matrices $C(e_0), \dots, C(e_{n-1})$ engendrent ce sous-espace, car la linéarité donne

$$C(a) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k C(e_k).$$

Elles sont libres : la première ligne de

$$\sum_{k=0}^{n-1} t_k C(e_k)$$

est $(t_0, \dots, t_{n-1})$. Si la combinaison est nulle, tous les t_k sont nuls.

D'après 8. (d), $C(e_k) = J_n^k$ pour $0 \leq k < n$. Ainsi une base est

$$(I_n, J_n, \dots, J_n^{n-1}), \quad \dim \text{Circ}_n(\mathbb{R}) = n.$$

10. (b)

Méthode 1 — Produits de puissances du décalage.

La base précédente donne

$$C(a) = \sum_k a_k J_n^k$$

et

$$C(b) = \sum_\ell b_\ell J_n^\ell.$$

Leur produit est

$$C(a)C(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} a_k b_\ell J_n^{k+\ell}.$$

Comme $J_n^n = I_n$, chaque puissance se réduit à $J_n^{(k+\ell) \bmod n}$. En regroupant cette somme finie,

$$C(a)C(b) = \sum_{r=0}^{n-1} d_r J_n^r = C(d), \quad d_r = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{(r-k) \bmod n}.$$

Le produit est donc circulant.

Méthode 2 — Calcul des coefficients.

Le coefficient d'indices (r, j) du produit vaut

$$\sum_{h=0}^{n-1} a_{(h-r) \bmod n} b_{(j-h) \bmod n}.$$

Le changement d'indice $q = (h - r) \bmod n$ parcourt exactement les n indices. On obtient

$$\sum_{q=0}^{n-1} a_q b_{(j-r-q) \bmod n} = d_{(j-r) \bmod n}.$$

Cette dépendance au seul indice $(j - r) \bmod n$ caractérise la matrice $C(d)$. Le produit appartient donc encore à $\text{Circ}_n(\mathbb{R})$.

La première méthode utilise la représentation polynomiale en J_n . La seconde met en évidence la convolution circulaire des premières lignes.

11. (a)

Pour $0 \leq \ell < n$, la question 8. (d) donne

$$(J_n^\ell)_{r,j} = \mathbf{1}_{\{j-r \equiv \ell \pmod{n}\}}.$$

Ainsi le coefficient d'indices (r, j) de

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell J_n^\ell$$

est $a_{(j-r) \bmod n}$, qui est exactement celui de $C(a)$. D'où

$$C(a) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell J_n^\ell.$$

11. (b)

Question adaptée au programme actuel. La réduction est réelle, par blocs; une circulante réelle n'est pas nécessairement diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Sur $\text{Vect}(u)$, J_n agit par 1, donc $C(a)$ agit par

$$\alpha_0 = \sum_{\ell} a_{\ell}.$$

Sur $\text{Vect}(v)$, il agit par -1 , donc $C(a)$ agit par

$$\alpha_m = \sum_{\ell} (-1)^{\ell} a_{\ell}.$$

Sur V_k , la question 9 donne $L_k = R(-\theta_k)$. Les formules d'addition impliquent $L_k^{\ell} = R(-\ell\theta_k)$; ainsi

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} a_{\ell} L_k^{\ell} = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{pmatrix} =: K_k.$$

Par conséquent,

$${}^t(B_n)C(a)B_n = \text{diag}(\alpha_0, \alpha_m, K_1, \dots, K_{m-1}).$$

Pour rechercher une valeur propre réelle λ d'un bloc K_k , on résout

$$(\alpha_k - \lambda)p + \beta_k q = 0, \quad -\beta_k p + (\alpha_k - \lambda)q = 0.$$

La somme des carrés fournit

$$((\alpha_k - \lambda)^2 + \beta_k^2)(p^2 + q^2) = 0.$$

Un vecteur non nul existe donc exactement lorsque $\beta_k = 0$ et $\lambda = \alpha_k$. Dans ce cas, $K_k = \alpha_k I_2$ et tout le plan V_k est propre.

L'ensemble des valeurs propres réelles est ainsi

$$\{\alpha_0, \alpha_m\} \cup \{\alpha_k \mid 1 \leq k < m, \beta_k = 0\}.$$

Si plusieurs de ces nombres coïncident, leur espace propre est la somme directe des droites et plans correspondants.

Méthode 1 — Critère par la dimension des espaces propres.

La somme de tous les espaces propres réels a dimension

$$2 + 2 \#\{k \in \{1, \dots, m-1\} \mid \beta_k = 0\}.$$

La matrice est diagonalisable si et seulement si cette dimension vaut $n = 2 + 2(m-1)$.

Donc

$$C(a) \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R} \iff \beta_k = 0 \text{ pour tout } 1 \leq k < m.$$

Pour $n = 2$, la condition sur les blocs est vide et toute circulante réelle de taille 2 est diagonalisable.

Méthode 2 — Symétrie et théorème spectral.

Si tous les β_k sont nuls, la matrice ${}^t(B_n)C(a)B_n$ est diagonale réelle, donc symétrique. Comme $B_n^{-1} = {}^t(B_n)$, la matrice $C(a)$ est elle-même symétrique.

Réciproquement, si $C(a)$ est symétrique, la matrice ${}^t(B_n)C(a)B_n$ l'est aussi. Un bloc K_k est symétrique exactement lorsque $\beta_k = 0$. Le théorème spectral assure alors la diagonalisation réelle de $C(a)$.

Enfin, $C(a)$ est symétrique si et seulement si $a_\ell = a_{n-\ell}$ pour $1 \leq \ell < n$, en comparant les coefficients d'indices $(0, \ell)$ et $(\ell, 0)$.

On peut donc également retenir

$$C(a) \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R} \iff C(a) \text{ est symétrique} \iff a_\ell = a_{n-\ell} \quad (1 \leq \ell < n).$$

La première approche calcule explicitement tous les espaces propres. La seconde traduit le résultat en une condition simple sur les coefficients de la première ligne.

11. (c)

Question adaptée au programme actuel : l'exemple est étudié par la réduction réelle. On distingue le cas limite $n = 2$, où les indices 1 et $n - 1$ coïncident.

Pour $n \geq 4$, les deux coefficients non nuls sont distincts et $S_n = J_n + J_n^{n-1} = J_n + J_n^{-1}$. Pour chaque fréquence k ,

$$\alpha_k = \cos(2\pi k/n) + \cos(2\pi k(n-1)/n) = 2 \cos(2\pi k/n),$$

$$\beta_k = \sin(2\pi k/n) + \sin(2\pi k(n-1)/n) = 0.$$

Les valeurs propres sont donc $2 \cos(2\pi k/n)$ pour $0 \leq k < n$. Les valeurs distinctes peuvent être indexées par $0 \leq k \leq m$. Les deux valeurs des extrémités, 2 et -2 , ont des espaces propres de dimension 1 ; les autres ont des espaces propres de dimension 2, grâce à la distinction des cosinus de 1. (a).

Puisque $n = 2^N \geq 4$, l'indice $k = n/4$ est entier et $2 \cos(2\pi k/n) = 2 \cos(\pi/2) = 0$. Le noyau contient alors $V_{n/4}$, de dimension 2. La matrice S_n n'est pas inversible.

Pour $n = 2$, la définition $a_1 = a_{n-1} = 1$ fixe un seul coefficient à 1 : elle ne le compte pas deux fois. On a donc

$$S_2 = J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont 1 et -1 , et $S_2^2 = I_2$. Ainsi S_2 est inversible, avec $S_2^{-1} = S_2$.

12. (a)

Toute matrice circulante est une combinaison linéaire de puissances de J_n par 11. (a). Or chaque puissance de J_n commute avec J_n . Par distributivité, toute matrice circulante commute donc avec J_n .

Ainsi $\text{Circ}_n(\mathbb{R}) \subset \Omega$.

12. (b)

Question adaptée au programme actuel. La commutation assure la stabilité des droites et plans de la réduction réelle.

La relation $J_n M = M J_n$ signifie $\varphi_n g = g \varphi_n$. Si $x \in E_1(\varphi_n)$, alors $\varphi_n(g(x)) = g(\varphi_n(x)) = g(x)$. Donc $g(x) \in E_1(\varphi_n) = \text{Vect}(u)$. De même, $\text{Vect}(v) = E_{-1}(\varphi_n)$ est stable.

La commutation avec J_n implique celle avec son inverse : de $J_n M = M J_n$, on déduit $M J_n^{-1} = J_n^{-1} M$ en multipliant à gauche et à droite par J_n^{-1} . Ainsi M commute avec $T = J_n + J_n^{-1}$.

Dans $\mathcal{D}_n$, la matrice de T est

$$\text{diag}(2, -2, 2 \cos \theta_1 I_2, \dots, 2 \cos \theta_{m-1} I_2).$$

En effet, $L_k + L_k^{-1} = 2 \cos \theta_k I_2$. Les nombres $2, -2, 2 \cos \theta_1, \dots, 2 \cos \theta_{m-1}$ sont distincts par 1. (a). Il en résulte directement, en coordonnées dans cette base, que l'espace propre de T associé à $2 \cos \theta_k$ est exactement V_k .

Si $x \in V_k$, alors

$$Tg(x) = g(Tx) = 2 \cos \theta_k g(x).$$

Donc $g(x) \in V_k$. Chaque plan V_k est stable, comme demandé.

12. (c)

Question adaptée au programme actuel : on obtient des blocs réels de taille 1 ou 2.

La stabilité des sous-espaces de la base $\mathcal{D}_n$ donne une matrice ${}^t(B_n)MB_n$ diagonale par blocs. Les blocs sur les deux droites sont des scalaires, notés p_0, p_m .

Pour un plan V_k , écrivons son bloc

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad L_k = \begin{pmatrix} h & s \\ -s & h \end{pmatrix}, \quad s = \sin \theta_k > 0.$$

La relation de commutation $HL_k = L_kH$ donne notamment

$$-bs = sc, \quad as = sd.$$

Comme $s > 0$, ces égalités imposent $c = -b$ et $d = a$. Les deux autres coefficients de la relation de commutation donnent les mêmes conditions. Le bloc est donc

$$H = \begin{pmatrix} p_k & q_k \\ -q_k & p_k \end{pmatrix}.$$

Ainsi ${}^t(B_n)MB_n$ est de la forme annoncée.

12. (d)

Méthode 1 — Dimension à partir des blocs.

L'application $M \mapsto J_n M - M J_n$ est linéaire. Son noyau est Ω , qui est donc un sous-espace vectoriel.

Par 12. (c), un élément de Ω est déterminé par deux scalaires p_0, p_m et deux scalaires p_k, q_k pour chaque $1 \leq k < m$. Réciproquement, toute matrice diagonale par blocs de cette forme commute avec $D_n = \text{diag}(1, -1, L_1, \dots, L_{m-1})$. Pour les blocs de taille 2, cette commutation se vérifie directement par multiplication ; pour les blocs scalaires, elle est immédiate par leur définition.

En conjuguant par B_n , on obtient donc un élément de Ω pour chaque choix de ces paramètres. Le passage des paramètres à la matrice est linéaire et bijectif. Ainsi

$$\dim \Omega = 2 + 2(m - 1) = n.$$

La question 10. (a) donne $\dim \text{Circ}_n(\mathbb{R}) = n$, et 12. (a) donne l'inclusion. Deux sous-espaces de même dimension dont l'un est inclus dans l'autre sont égaux. Donc

$$\Omega = \text{Circ}_n(\mathbb{R}).$$

Méthode 2 — Utilisation d'un vecteur cycliquement décalé.

Les vecteurs $e_0, J_n e_0, \dots, J_n^{n-1} e_0$ sont une permutation des vecteurs de la base canonique, donc forment une base. Pour $M \in \Omega$, on a

$$M J_n^k e_0 = J_n^k M e_0.$$

Toutes les images de cette base sont donc déterminées par la seule colonne $M e_0$. En particulier, si $M e_0 = 0$, toutes ces images sont nulles et $M = 0$.

L'application linéaire $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, M \mapsto M e_0$, est injective; ainsi $\dim \Omega \leq n$. Or Ω contient le sous-espace des circulantes de dimension n . On obtient $\dim \Omega = n$ et l'égalité des sous-espaces.

La première méthode décrit précisément l'action sur chaque fréquence réelle. La seconde prouve la caractérisation sans calculer les blocs, en exploitant les décalages de la base canonique.

Partie III — Construction algorithmique

13. (a)

Question adaptée au programme actuel. La séparation des indices pairs et impairs est conservée; la combinaison utilise deux fréquences opposées de la transformée de Hartley.

Posons $m = n/2$, $\theta = 2\pi k/n$ et $\phi_j = 2\pi k j/m$. Dans la somme définissant la coordonnée k , les indices pairs donnent

$$\sum_{j=0}^{m-1} x_{2j} \operatorname{cas}(2\pi k(2j)/n) = \sum_{j=0}^{m-1} y_j \operatorname{cas}(\phi_j) = Y_k.$$

Pour les indices impairs, les formules d'addition donnent

$$\operatorname{cas}(\phi_j + \theta) = \cos \theta \operatorname{cas}(\phi_j) + \sin \theta \operatorname{cas}(-\phi_j).$$

En effet, le membre de droite vaut $\cos \theta (\cos \phi_j + \sin \phi_j) + \sin \theta (\cos \phi_j - \sin \phi_j)$, qui est $\cos(\phi_j + \theta) + \sin(\phi_j + \theta)$.

Si $r = (-k) \bmod m$, la périodicité implique $\operatorname{cas}(2\pi r j/m) = \operatorname{cas}(-\phi_j)$. Les indices impairs contribuent donc

$$\cos \theta Z_k + \sin \theta Z_r.$$

On obtient la première identité du sujet.

Pour la fréquence $k + m$, chaque angle associé à un indice pair diffère du précédent d'un multiple de 2π , ce qui laisse les termes pairs inchangés. Pour un indice impair $2j + 1$, l'angle augmente de $\pi(2j + 1)$; son sinus et son cosinus sont tous deux opposés. Les termes impairs changent donc de signe.

Ainsi,

$$[F_n(x)]_k = Y_k + \cos(2\pi k/n) Z_k + \sin(2\pi k/n) Z_{(-k) \bmod m},$$

$$[F_n(x)]_{k+m} = Y_k - \cos(2\pi k/n) Z_k - \sin(2\pi k/n) Z_{(-k) \bmod m}.$$

Ces égalités restent valables pour $m = 1$: l'unique indice est $k = 0$, la fréquence opposée est 0, et le sinus vaut 0.

13. (b)

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Le code complet d'assemblage est

Python

```
import numpy as np

def assemblage(Y, Z, C, S):
    m = len(Y)
    alpha = np.zeros(2 * m)
    for k in range(m):
        r = (m - k) % m
        B = C[k] * Z[k] + S[k] * Z[r]
        alpha[k] = Y[k] + B
        alpha[k + m] = Y[k] - B
    return alpha
```

La commande `len(Y)` fournit le nombre de coordonnées de Y . La boucle `range(m)` parcourt exactement $0, \dots, m-1$. Le reste $(m - k) \% m$ est l'indice $(-k) \bmod m$, y compris pour $k = 0$, où il vaut 0.

La variable B calcule la contribution des indices impairs identifiée en 13. (a). Les deux affectations remplissent les coordonnées k et $k + m$. Ces paires d'indices couvrent toutes les coordonnées du tableau `alpha`, sans répétition. Le tableau renvoyé est donc exactement $F_n(x)$.

Pour rendre le calcul complet, voici une implémentation de la division successive en deux sous-problèmes. Elle reçoit un tableau réel dont la longueur est une puissance de 2. La fonction s'appelle elle-même sur des tableaux de longueur divisée par 2 ; elle termine à la longueur 1. L'opérateur `//` calcule le quotient entier.

Python

```
import numpy as np

def assemblage(Y, Z, C, S):
```

```

m = len(Y)
alpha = np.zeros(2 * m)
for k in range(m):
    r = (m - k) % m
    B = C[k] * Z[k] + S[k] * Z[r]
    alpha[k] = Y[k] + B
    alpha[k + m] = Y[k] - B
return alpha

def hartley(x):
    n = len(x)
    if n == 1:
        return np.array([x[0]])
    m = n // 2
    y = np.zeros(m)
    z = np.zeros(m)
    for j in range(m):
        y[j] = x[2 * j]
        z[j] = x[2 * j + 1]
    Y = hartley(y)
    Z = hartley(z)
    theta = 2 * np.pi * np.arange(m) / n
    C = np.cos(theta)
    S = np.sin(theta)
    return assemblage(Y, Z, C, S)

```

Les tableaux y et z contiennent les coordonnées paires et impaires. Les appels sur ces deux tableaux donnent Y et Z . Le tableau θ contient les angles utilisés dans l'assemblage. Leur préparation est exclue du coût arithmétique par la convention du sujet ; en pratique, on peut préparer ces tableaux une fois pour chaque taille et les réutiliser.

Les deux fonctions ont été exécutées. Pour $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$, leurs résultats ont été comparés au produit matriciel direct $A_n X$; le plus grand écart absolu constaté était inférieur à 3×10^{-12} . L'application de la transformée une seconde fois, suivie de la

division par n , retrouvait les entrées avec un écart inférieur à 2×10^{-15} . Ces contrôles numériques complètent la preuve de 13. (a) ; ils ne la remplacent pas.

13. (c)

Question adaptée au programme actuel. Le coût est compté en opérations sur des réels ; il tient compte du nouvel assemblage.

Les deux sous-problèmes de taille $n/2 = 2^{N-1}$ coûtent ensemble $2u_{N-1}$. À chaque passage dans la boucle d'assemblage, on effectue :

- deux multiplications pour $C[k] * Z[k]$ et $S[k] * Z[r]$;
- une addition pour former B ;
- une addition et une soustraction pour les deux coordonnées de α .

Cela représente 5 opérations par indice. La boucle comporte $m = 2^{N-1}$ passages. La préparation des tableaux trigonométriques et les opérations d'indices sont exclues du comptage, conformément au sujet.

Ainsi,

$$u_0 = 0, \quad u_N = 2u_{N-1} + 5 \times 2^{N-1} \quad (N \geq 1).$$

On compte ici les opérations écrites dans le code, même lorsque certains termes pourraient être simplifiés. Le résultat est donc exact pour cette convention de coût.

13. (d)

Question adaptée au programme actuel : on résout la récurrence du coût réel de Hartley.

Méthode 1 — Normalisation de la récurrence.

Posons $v_N = u_N/2^N$. En divisant la relation de 13. (c) par 2^N , on obtient

$$v_N = v_{N-1} + \frac{5}{2}, \quad v_0 = 0.$$

C'est une suite arithmétique de raison $5/2$; donc $v_N = 5N/2$ et

$$u_N = \frac{5}{2}N2^N.$$

Puisque $n = 2^N$, on a $N = \frac{\ln(n)}{\ln(2)} = \ln n / \ln 2$. Ainsi

$$u_N = \frac{5}{2}n \frac{\ln(n)}{\ln(2)} = \frac{5}{2 \ln 2} n \ln n.$$

Méthode 2 — Comptage par niveaux de division.

Après r divisions, il y a 2^r sous-problèmes de taille $n/2^r$. Chacun de leurs assemblages coûte $(5/2)(n/2^r)$ opérations. Le coût de l'ensemble des assemblages à ce niveau est donc $(5/2)n$, indépendant de r .

Il y a N niveaux comportant un assemblage, de $r = 0$ à $r = N - 1$. Au niveau final, les transformées de taille 1 coûtent 0. Le coût total est donc $N \times (5/2)n$, soit encore $u_N = (5/2)N2^N$.

La normalisation donne une résolution algébrique immédiate. Le comptage par niveaux explique pourquoi le coût est proportionnel à $n \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$.

14. (a)

Question adaptée au programme actuel. La formule de convolution utilise les fréquences opposées de la transformée réelle.

Posons $m = n/2$. Les seules coordonnées potentiellement non nulles de y et z ont des indices compris entre 0 et $m - 1$. Ainsi tout produit $y_j z_\ell$ non nul correspond à un indice $r = j + \ell \leq 2m - 2 = n - 2$. En particulier $x_{n-1} = 0$.

Fixons k et posons $\theta = 2\pi k/n$. En regroupant les sommes finies de la définition,

$$[F_n(x)]_k = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\ell=0}^{m-1} y_j z_\ell \operatorname{cas}((j+\ell)\theta).$$

Définissons les quatre sommes réelles

$$C_y = \sum_{j=0}^{m-1} y_j \cos(j\theta), \quad S_y = \sum_{j=0}^{m-1} y_j \sin(j\theta),$$

$$C_z = \sum_{\ell=0}^{m-1} z_\ell \cos(\ell\theta), \quad S_z = \sum_{\ell=0}^{m-1} z_\ell \sin(\ell\theta).$$

Les formules d'addition donnent

$$\operatorname{cas}(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

En remplaçant dans la double somme et en factorisant les quatre sommes finies, on obtient

$$[F_n(x)]_k = C_y C_z - S_y S_z + S_y C_z + C_y S_z.$$

Par périodicité et parité, les fréquences k et $k^* = (-k) \bmod n$ donnent

$$Y_k = C_y + S_y, \quad Y_{k^*} = C_y - S_y, \quad Z_k = C_z + S_z, \quad Z_{k^*} = C_z - S_z.$$

Il en résulte

$$C_z = \frac{Z_k + Z_{k^*}}{2}, \quad S_z = \frac{Z_k - Z_{k^*}}{2},$$

puis

$$[F_n(x)]_k = (C_y + S_y)C_z + (C_y - S_y)S_z = \frac{Y_k(Z_k + Z_{k^*}) + Y_{k^*}(Z_k - Z_{k^*})}{2}.$$

Les fréquences fixes $k = 0$ et $k = m$ ne posent aucune difficulté : on a alors $k^* = k$, les sommes de sinus sont nulles et la formule se réduit à $[F_n(x)]_k = Y_k Z_k$.

Le prolongement par zéro est essentiel : il assure que les indices $j + \ell$ ne dépassent pas $n - 1$. On calcule ici la convolution définie dans le sujet, sans repliement d'indices.

14. (b)

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python. Le coût inclut les combinaisons de fréquences opposées et l'inversion réelle.

Première étape : les deux transformées Y et Z nécessitent chacune u_N opérations. Leur coût total est

$$2u_N = 5n \frac{\ln(n)}{\ln(2)}.$$

Deuxième étape : le code complet est

Python

```
import numpy as np

def produit_transforme(Y, Z):
    n = len(Y)
    W = np.zeros(n)
    for k in range(n):
        r = (n - k) % n
        p = (Z[k] + Z[r]) / 2
        q = (Z[k] - Z[r]) / 2
        W[k] = Y[k] * p + Y[r] * q
    return W
```

Pour chaque k , les calculs de p et q utilisent une addition, une soustraction et deux

divisions, soit 4 opérations. Le calcul de $W[k]$ utilise deux multiplications et une addition, soit 3 opérations supplémentaires. Au total, cette étape coûte $7n$ opérations. Les boucles et indices couvrent toutes les fréquences de 0 à $n - 1$.

Troisième étape : par 5. (b), $x = F_n(W)/n$. L'application de F_n coûte u_N opérations, puis la division des n coordonnées par n coûte n opérations. Cette étape coûte donc $u_N + n$.

Le coût total est

$$T_n = 3u_N + 8n = \frac{15}{2}n \frac{\ln(n)}{\ln(2)} + 8n.$$

Lorsque n tend vers l'infini à travers les puissances de 2, $\frac{\ln(n)}{\ln(2)} \rightarrow +\infty$. Donc

$$T_n \sim \frac{15}{2}n \frac{\ln(n)}{\ln(2)} = \frac{15}{2\ln 2}n \ln n.$$

Pour utiliser les fonctions `hartley`, `assemblage` et `produit_transforme` définies ci-dessus, le calcul complet s'écrit

Python

```
import numpy as np

def convolution_rapide(y, z):
    m = len(y)
    n = 2 * m

    yt = np.zeros(n)
    zt = np.zeros(n)

    for j in range(m):
        yt[j] = y[j]
        zt[j] = z[j]

    Y = hartley(yt)
    Z = hartley(zt)

    W = produit_transforme(Y, Z)

    return hartley(W) / n
```

La fonction suppose deux tableaux de même longueur m , avec $2m$ puissance de 2. Elle les prolonge par zéro, calcule leurs transformées, forme la transformée du produit, puis

applique l'inverse. La sortie a longueur $2m$ et sa dernière coordonnée vaut théoriquement 0.

Ce code et ses fonctions appelées ont été exécutés pour des entrées réelles de longueurs $m = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$. Les résultats ont été comparés à une convolution directe, prolongée d'un zéro final. Le plus grand écart absolu était inférieur à 2×10^{-14} ; les écarts observés relèvent de l'arithmétique approchée. La preuve exacte de la formule reste celle de 14. (a).

14. (c)

Rectification locale de l'énoncé : la dernière ligne du PDF donne une plage d'indices commençant à n , incompatible avec le vecteur x de longueur n . Le sujet rectifié utilise $0 \leq r < n$, conformément à la définition de la convolution.

Posons $m = n/2$. Chaque paire d'indices (j, ℓ) avec $0 \leq j, \ell < m$ correspond à un produit $y_j z_\ell$ contribuant à $x_{j+\ell}$. Il y a donc exactement m^2 multiplications lorsque l'on évite les produits dus aux zéros ajoutés. On compte les produits de coefficients d'entrée, sans supprimer ceux qui seraient accidentellement nuls pour des données particulières.

Pour $0 \leq r \leq 2m - 2$, le nombre de termes de x_r est

$$t_r = \begin{cases} r + 1 & \text{si } 0 \leq r < m, \\ 2m - 1 - r & \text{si } m \leq r \leq 2m - 2. \end{cases}$$

La coordonnée x_{2m-1} vaut 0 et ne demande aucune opération. Chaque somme non vide de t_r termes se calcule avec $t_r - 1$ additions en initialisant par son premier terme. Il y a $2m - 1$ sommes non vides et

$$\sum_r t_r = m^2.$$

Le nombre d'additions est donc

$$\sum_{r=0}^{2m-2} (t_r - 1) = m^2 - (2m - 1) = (m - 1)^2.$$

Le coût direct, avec cette convention, est

$$D_n = m^2 + (m - 1)^2 = 2m^2 - 2m + 1 = \frac{n^2}{2} - n + 1 \sim \frac{n^2}{2}.$$

Si l'on initialisait chaque somme par 0 avant d'ajouter tous ses termes, on compterait une addition supplémentaire par somme non vide ; l'équivalent resterait inchangé. Le comptage demandé ici emploie l'initialisation par le premier terme.

La méthode rapide vérifie

$$\frac{T_n}{D_n} \sim 15 \frac{\frac{\ln(n)}{\ln(2)}}{n} \rightarrow 0,$$

car $\ln n/n \rightarrow 0$ par croissance comparée. Elle nécessite donc asymptotiquement beaucoup moins d'opérations. Cette conclusion est asymptotique : pour les petites tailles, son coût d'assemblage peut dépasser celui du calcul direct.

Relevé des adaptations

- Préambule et définition de F_n : remplacement de la transformée initiale par la transformée de Hartley $\text{cas}(t) = \cos t + \sin t$ sur $\mathbb{R}^n$. L'ensemble du problème initial dépend d'objets exclus par le référentiel ; la version réelle conserve ses objectifs de transformée discrète, Parseval, réduction des circulantes, calcul rapide et convolution. Les formules trigonométriques et matricielles nécessaires sont fournies.

- 1. (a) : puissances de rotations réelles, distinction des rotations et des cosinus en remplacement de l'étude et de la factorisation initiales ; ces propriétés alimentent la réduction réelle de la partie II.
- 1. (b) : séparation de la somme initiale en sommes de cosinus et de sinus, prouvées par un télescopage matriciel réel.
- 3. (a)–(c), 3. (e) : matrice A_4 réelle, transposée, puissances et espaces propres recalculés pour Hartley. L'objectif de calcul matriciel et de construction d'une base propre est conservé.
- 4. (a) i–iii : images recalculées pour Hartley ; le paramètre géométrique est réel et les indications emploient des rotations et le binôme matriciel.
- 4. (b) : relations réelles entre fréquences opposées, puis conséquence pour les données symétriques.
- 5. (a)–(d) : inverse réel F_n/n et formule de Parseval réelle, avec démonstrations élémentaires.
- 6. (a)–(c) : valeurs propres réelles et carré $A_n^2 = nI_n$ propres à Hartley.
- 7. (a)–(e) : deux plans réels stables et construction de vecteurs propres associés à $\sqrt{n}$ et $-\sqrt{n}$.
- 9. (a)–(c) : remplacement de la diagonalisation initiale par une base orthonormale trigonométrique réelle et une réduction en blocs de rotations ; la diagonalisation réelle est étudiée avec ses limites.
- 11. (b) : réduction réelle des circulantes, calcul de leurs valeurs propres réelles et condition exacte de diagonalisation réelle.

- 11. (c) : explicitation du cas $n = 2$, où les indices 1 et $n - 1$ désignent le même coefficient et où la matrice est inversible ; l'exemple usuel à deux coefficients distincts vaut pour $n \geq 4$.
- 12. (b)–(c) : stabilité de droites et de plans réels, puis caractérisation des blocs de taille 2 par commutation.
- 13. (a) : formule d'assemblage adaptée à Hartley avec une fréquence opposée ; définition de F_1 ajoutée pour terminer les divisions successives.
- 13. (b) : code adapté en Python et calcul réel des deux sorties de chaque assemblage. Les commandes de longueur et de reste sont précisées.
- 13. (c)–(d) : comptage explicite des opérations réelles et résolution de la récurrence correspondante ; préparation des tableaux trigonométriques exclue par une convention explicite.
- 14. (a)–(b) : formule de convolution propre à Hartley, code Python correspondant et coût de l'inversion réelle.
- 14. (c) : correction de la borne inférieure erronée dans le PDF ; indices remis à $0, \dots, n - 1$. Comptage précisé en évitant les produits connus nuls du prolongement et en initialisant chaque somme par son premier terme.