



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques

2020

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Les quatre parties du problème sont largement indépendantes.

Partie I : résolution d'une équation différentielle scalaire

Dans cette partie, r désigne un nombre réel, et on détermine les fonctions f à valeurs dans $]0, 1[$, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, qui vérifient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = r(f(t))^2(1 - f(t)). \quad (1)$$

1. On note u l'application définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad u(t) = \frac{t}{1-t} e^{-1/t}. \quad (2)$$

1.a) Justifier que la limite à droite de la fonction u en 0 est nulle. Quelle est la limite à gauche de la fonction u en 0 ?

1.b) Démontrer qu'il existe un polynôme P , que l'on précisera, tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad u'(t) = \frac{1}{P(t)} e^{-1/t}.$$

1.c) Dresser le tableau de variations de la fonction u et donner l'allure de sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

2. Soit φ l'application de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}_+$, définie par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t \in]0, 1[, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases} \quad (3)$$

2.a) Justifier que l'application φ est bijective.

2.b) L'application φ est-elle de classe C^1 sur $]0, 1[$?

2.c) L'application φ^{-1} est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$?

2.d) Donner un script Python fournissant une représentation graphique de φ^{-1} .

3.a) Démontrer que, pour toute fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, 1[$, la fonction composée $\ln \circ \varphi \circ f$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée à l'aide de f et de f' .

3.b) Démontrer que, pour tout réel $a \in]0, 1[$, l'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, 1[$, vérifiant (1) et $f(0) = a$ est la fonction f_a donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_a(t) = \varphi^{-1}(\varphi(a)e^{rt}). \quad (4)$$

4. Dans cette question, r est supposé strictement positif et a est un élément de $]0, 1[$.

4.a) Démontrer que la fonction f_a est monotone. Quelles en sont les limites en $-\infty$ et $+\infty$?

4.b) Donner une expression de la dérivée seconde f_a'' à l'aide de f_a' et f_a . En déduire que la courbe représentative de f_a admet un unique point d'inflexion.

4.c) Trouver l'ensemble de ces points d'inflexion lorsque a décrit l'intervalle $]0, 1[$. Que peut-on dire des tangentes aux courbes représentatives des fonctions f_a en ces points ?

Partie II : étude d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on considère la fonction K définie sur l'ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[, \quad K(x, y) = x \ln \left(\frac{x}{y} \right) + (1 - x) \ln \left(\frac{1 - x}{1 - y} \right). \quad (5)$$

5.a) Justifier que K est de classe C^2 sur $]0, 1[\times]0, 1[$.

5.b) Calculer la dérivée partielle $\partial_2 K$.

5.c) Étudier le signe de $\partial_2 K$ et en déduire que la fonction K admet un minimum global, égal à 0.

5.d) La fonction K est-elle majorée ?

6. Pour tout $(x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[$, on note $q_{(x,y)}$ la forme quadratique associée à la matrice hessienne $\nabla^2 K(x, y)$.

6.a) Calculer les dérivées partielles d'ordre deux de K .

6.b) Justifier que, pour tout $(x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[$, l'inégalité suivante est vérifiée :
 $q_{(x,y)}(1, 0) \geq 4$.

7. Pour un élément (x, y) de $]0, 1[\times]0, 1[$, on note $z = (y, y)$ et $w = (x - y, 0)$.

7.a) En utilisant une formule de Taylor, établir l'égalité :

$$K(x, y) = \int_0^1 (1 - t) q_{z+tw}(w) dt.$$

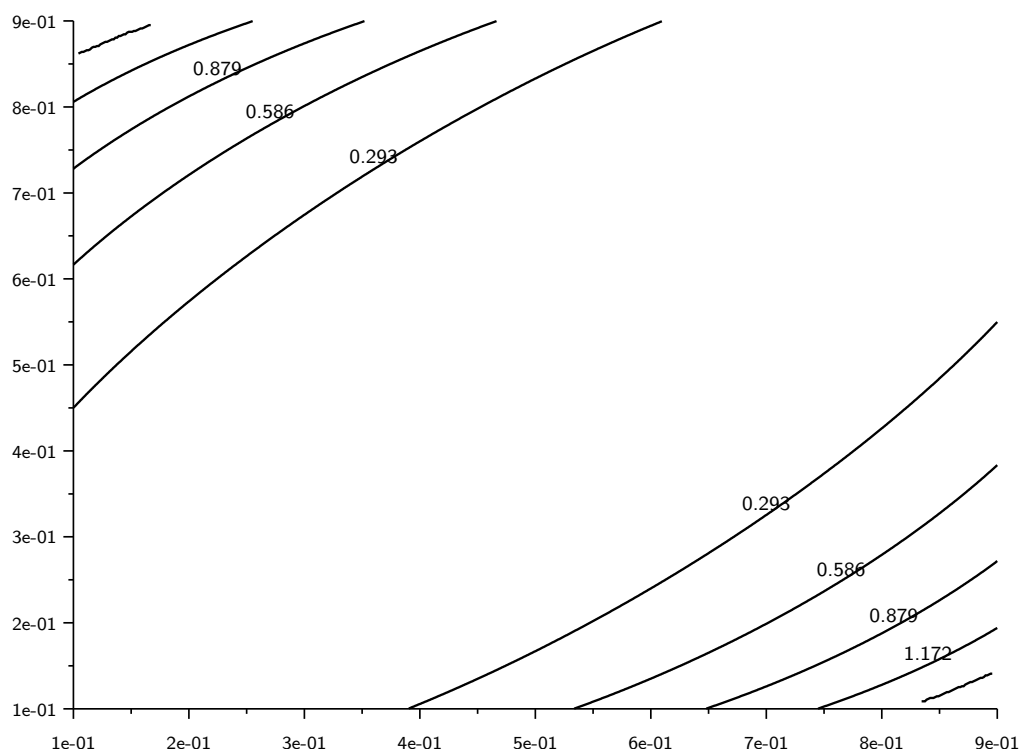
7.b) En déduire l'inégalité :

$$K(x, y) \geq 2(x - y)^2. \quad (6)$$

8.a) Écrire un script Python permettant de donner une représentation graphique de la fonction K .

Pour le tracé d'une surface, on pourra utiliser les commandes suivantes : $X, Y = \text{np.meshgrid}(v, v)$ crée deux tableaux des coordonnées d'une grille à partir du tableau v ; $\text{fig} = \text{plt.figure}()$ crée une figure; $\text{ax} = \text{fig.add_subplot}(111, \text{projection}="3d")$ crée un repère à trois dimensions; $\text{ax.plot_surface}(X, Y, Z)$ trace les points de hauteur donnée par le tableau Z . Les opérations usuelles de NumPy s'appliquent coefficient par coefficient aux tableaux.

8.b) La figure suivante représente des lignes de niveau de la fonction K .



Chaque ligne de niveau présente un centre de symétrie. Lequel et pourquoi ?

Partie III : divergence de Kullback

Dans cette partie, Q^* et Q désignent deux probabilités distinctes sur l'univers $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q^*({n})Q({n}) > 0.$$

Pour toute variable aléatoire réelle X définie sur cet univers, on note :

$$d(X) = \sum_{x \in X(\mathbb{N})} Q^*([X = x]) \ln \left(\frac{Q^*([X = x])}{Q([X = x])} \right), \quad (7)$$

sous réserve que cette somme ait un sens.

9. Un exemple

Dans cette question, et seulement dans cette question, λ^* et λ sont deux réels strictement positifs distincts, et on suppose que la variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ^* pour la probabilité Q^* , la loi de Poisson de paramètre λ pour la probabilité Q .

9.a) Justifier l'existence de $d(X)$ et vérifier l'égalité :

$$d(X) = -\lambda^* \ln \left(\frac{\lambda}{\lambda^*} \right) + \lambda - \lambda^*.$$

9.b) Préciser le signe de $d(X)$ et prouver que $d(X)$ est négligeable devant $\lambda - \lambda^*$ lorsque λ tend vers λ^* .

10. Dans cette question, ψ désigne une fonction à valeurs réelles, de classe C^1 et convexe sur $]0, +\infty[$. Soit U une variable aléatoire discrète strictement positive, définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P . On suppose que les deux variables aléatoires U et $\psi(U)$ admettent chacune une espérance.

10.a) Justifier que l'espérance $E(U)$ est strictement positive.

10.b) Pour tout $x > 0$, comparer les deux nombres $\psi(x) - \psi(E(U))$ et $\psi'(E(U))(x - E(U))$.

10.c) En déduire l'inégalité :

$$\psi(E(U)) \leq E(\psi(U)). \quad (8)$$

10.d) En utilisant la concavité de la fonction $\ln$ et l'inégalité (8), démontrer que, lorsqu'il existe comme réel, $d(X)$ est positif ou nul.

Dans les questions 11 et 12, on suppose que l'ensemble $X(\mathbb{N})$ est fini. Si A est un

événement de probabilité non nulle, Q_A et Q_A^* désignent les probabilités conditionnelles sachant A .

11. Soit g une application de $X(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$. On note Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y(n) = g(X(n)).$$

11.a) Pour tout $y \in Y(\mathbb{N})$, on note $g^{-1}(\{y\})$ l'ensemble des réels $x \in X(\mathbb{N})$ tels que $g(x) = y$. Établir l'égalité :

$$d(X) = d(Y) + \sum_{y \in Y(\mathbb{N})} \left(Q^*([Y = y]) \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} Q_{[Y=y]}^*([X = x]) \ln \left(\frac{Q_{[Y=y]}^*([X = x])}{Q_{[Y=y]}([X = x])} \right) \right).$$

11.b) En déduire l'inégalité : $d(X) \geq d(Y)$.

12. Soit B l'ensemble des réels $x \in X(\mathbb{N})$ pour lesquels $Q([X = x]) \leq Q^*([X = x])$.

12.a) Lorsque les lois de X sous Q et Q^* sont différentes, justifier que $Q^*([X \in B])$ et $Q([X \in B])$ sont strictement compris entre 0 et 1. Dans tous les cas, démontrer :

$$\left(\sum_{x \in X(\mathbb{N})} |Q([X = x]) - Q^*([X = x])| \right)^2 = 4 (Q([X \in B]) - Q^*([X \in B]))^2.$$

12.b) On définit la variable aléatoire Y par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(n) \in B, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque les lois de X sous Q et Q^* sont différentes, vérifier que

$d(Y) = K(Q^*([X \in B]), Q([X \in B]))$, où K est définie dans la partie II par (5). Lorsque ces lois sont identiques, calculer directement $d(X)$ et $d(Y)$.

12.c) Dédurre de ces résultats l'inégalité, valable dans tous les cas :

$$d(X) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{x \in X(\mathbb{N})} |Q([X = x]) - Q^*([X = x])| \right)^2. \quad (9)$$

Partie IV : trajectoires d'une équation différentielle vectorielle

Dans cette partie, on s'intéresse au comportement asymptotique de fonctions qui vérifient une équation qui généralise (1), dans un contexte multidimensionnel.

Pour un entier $n \geq 2$, on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel, pour lequel cette base est orthonormée.

On considère une matrice carrée $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une application $f : t \mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t))$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, dont les composantes sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\sum_{j=1}^n f_j(0) = 1, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad f_j(0) > 0,$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'_j(t) = \langle e_j - f(t), Rf(t) \rangle f_j(t). \quad (10)$$

Ici $Rf(t)$ est le vecteur dont la matrice-colonne dans la base canonique est le produit de R par la colonne de composantes $f_1(t), \dots, f_n(t)$.

13. Soit v une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, et V une primitive de v sur $\mathbb{R}$.

On considère une fonction y définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = v(t)y(t).$$

13.a) Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto y(t)e^{-V(t)}$.

13.b) En déduire que, si $y(0)$ est nul, alors $y(t)$ est nul pour tout $t \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire du signe de y si $y(0)$ n'est pas nul ?

14.a) En appliquant ce qui précède à la fonction

$$y : t \mapsto 1 - \sum_{j=1}^n f_j(t),$$

justifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^n f_j(t) = 1.$$

14.b) Justifier que, pour tout réel t et tout entier $j \in \{1, \dots, n\}$, $f_j(t)$ est strictement positif.

On note :

$$T = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \left| \sum_{j=1}^n x_j = 1 \right. \right\}, \quad T^* = T \cap (\mathbb{R}_+^*)^n. \quad (11)$$

On suppose désormais qu'il existe un vecteur $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in T^*$ tel que :

$$\forall x \in T \setminus \{x^*\}, \quad \langle x^* - x, Rx \rangle > 0. \quad (12)$$

Le vecteur Rx est défini par multiplication matricielle dans la base canonique. On note H la fonction définie sur l'ouvert $]0, 1[^n$ de $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in]0, 1[^n, \quad H(x) = \sum_{j=1}^n x_j^* \ln \left(\frac{x_j^*}{x_j} \right). \quad (13)$$

15.a) En utilisant le résultat de la question 12, justifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad H(f(t)) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n |f_j(t) - x_j^*| \right)^2.$$

15.b) Justifier que la fonction composée $H \circ f$ est de classe C^1 et exprimer sa dérivée à l'aide de f , R et x^* .

15.c) En déduire que $H \circ f$ admet une limite en $+\infty$, que l'on notera ℓ .

16. Pour tout $x \in T^*$, établir les inégalités :

$$H(x) \leq \sum_{j=1}^n \frac{x_j^*}{x_j} (x_j^* - x_j) \leq \frac{1}{\min\{x_1, \dots, x_n\}} \left(\sum_{j=1}^n (x_j - x_j^*)^2 \right)^{1/2}.$$

17. On suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif c tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad f_j(t) \geq c. \quad (14)$$

17.a) Établir, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité :

$$\sum_{j=1}^n (f_j(t) - x_j^*)^2 \geq c^2 \ell^2.$$

17.b) Justifier que, pour tout réel strictement positif p , il existe $q > 0$ tel que :

$$\forall x \in T, \quad \langle x - x^*, x - x^* \rangle \geq p \implies \langle x^* - x, Rx \rangle \geq q.$$

On pourra utiliser les faits suivants : T est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$; pour

$p > 0$, l'ensemble $\{x \in T : \|x - x^*\|^2 \geq p\}$ est également fermé et borné ; une fonction continue sur une partie non vide fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ atteint son minimum.

17.c) En raisonnant par l'absurde, montrer que la limite ℓ de $H \circ f$ en $+\infty$ est nulle et en déduire :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f_j(t) = x_j^*.$$

18. Un exemple

On note U la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On suppose que :

$$R = \lambda I + A, \quad (15)$$

avec $\lambda < 0$, I la matrice-identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AU = 0. \quad (16)$$

18.a) Justifier que le vecteur $x^* = \frac{1}{n}(e_1 + \dots + e_n)$ vérifie (12).

18.b) Démontrer que la fonction $t \mapsto f_1(t)f_2(t) \dots f_n(t)$ est croissante.

18.c) Justifier que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $f_j(t)$ tend vers $\frac{1}{n}$ quand t tend vers $+\infty$.