



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques

2020

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I : résolution d'une équation différentielle scalaire

1.a) Limites en zéro

À droite de zéro, $t/(1-t) \rightarrow 0$ et $e^{-1/t} \rightarrow 0$. Le produit de ces deux quantités tend donc vers zéro :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) = 0.$$

À gauche de zéro, posons $s = -1/t$. Alors $s \rightarrow +\infty$ et :

$$u(t) = -\frac{e^s}{s+1}.$$

La croissance comparée de l'exponentielle et des puissances donne $e^s/(s+1) \rightarrow +\infty$. Ainsi :

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} u(t) = -\infty.$$

1.b) Calcul de la dérivée

Sur chacun des intervalles du domaine, les facteurs de u sont dérivables. Leurs dérivées sont :

$$\left(\frac{t}{1-t}\right)' = \frac{1}{(1-t)^2}, \quad (e^{-1/t})' = \frac{1}{t^2}e^{-1/t}.$$

Par la formule de dérivation d'un produit :

$$u'(t) = e^{-1/t} \left(\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{t(1-t)} \right) = \frac{e^{-1/t}}{t(1-t)^2}.$$

Le polynôme demandé est donc $P(t) = t(1 - t)^2 = t^3 - 2t^2 + t$.

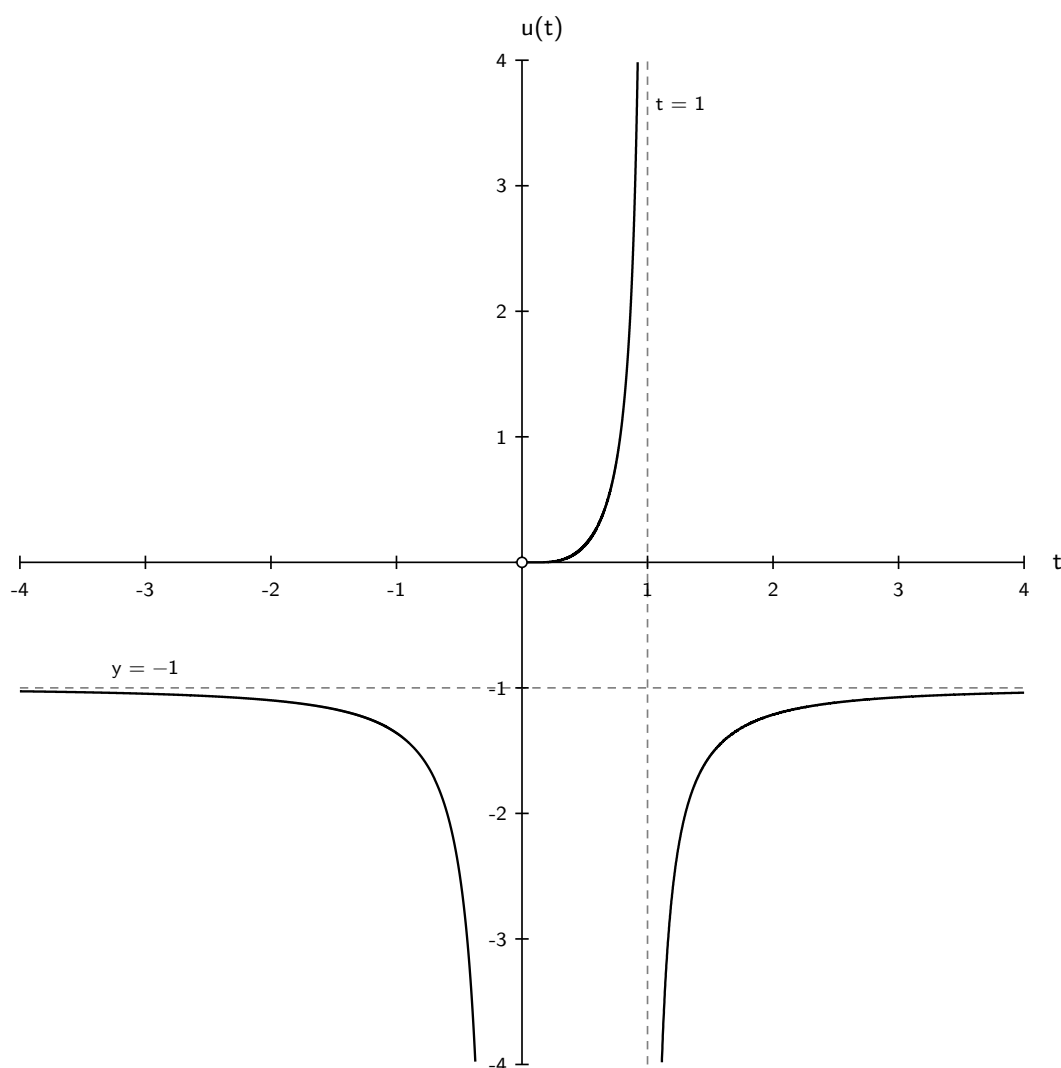
1.c) Variations et représentation graphique

L'exponentielle est strictement positive et $(1 - t)^2 > 0$ sur le domaine. Le signe de $u'(t)$ est donc celui de t .

Aux infinis, $t/(1 - t) \rightarrow -1$ et $e^{-1/t} \rightarrow 1$. Au voisinage de 1, le facteur exponentiel tend vers e^{-1} , tandis que $t/(1 - t)$ tend vers $+\infty$ à gauche et vers $-\infty$ à droite. Avec la question 1.a, on obtient :

Intervalle	Signe de la dérivée	Variation et limites
$] - \infty, 0[$	—	de -1 vers $-\infty$, décroissante
$]0, 1[$	+	de 0 vers $+\infty$, croissante
$]1, +\infty[$	+	de $-\infty$ vers -1 , croissante

La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale aux deux infinis. Les droites $t = 0$ et $t = 1$ sont des asymptotes verticales, la première seulement pour la branche située à gauche de zéro. La branche située à droite de zéro se prolonge continûment par la valeur 0.



Le tracé ci-dessus est calculé à partir de la formule exacte de u ; les branches non bornées sont coupées par la fenêtre d’affichage. Le cercle vide à l’origine rappelle que u n’est pas définie en zéro.

2.a) Bijektivité

D’après 1.a, φ est continue en 0, et elle est continue sur $]0, 1[$. D’après 1.c, elle est strictement croissante sur $]0, 1[$. Pour $t > 0$, $\varphi(t) > 0 = \varphi(0)$: elle est donc strictement croissante sur tout $[0, 1[$.

Enfin, $\varphi(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 1^-} \varphi(t) = +\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure que tout réel positif est atteint ; la stricte croissance assure qu’il est atteint une seule fois.

Ainsi $\varphi : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}_+$ est bijective.

2.b) Régularité de φ

Sur $]0, 1[$, φ est de classe C^1 et $\varphi'(t) = e^{-1/t}/(t(1-t)^2)$. Au bord 0, on considère la dérivée à droite :

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \frac{e^{-1/t}}{1-t} \rightarrow 0.$$

Donc $\varphi'_+(0) = 0$. Par croissance comparée, avec $s = 1/t$:

$$\varphi'(t) = \frac{se^{-s}}{(1-1/s)^2} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0^+).$$

La dérivée se prolonge donc continûment en zéro. Ainsi φ est de classe C^1 sur $[0, 1[$, au sens de la dérivation à droite au bord.

2.c) Régularité de l'inverse

Sur $]0, +\infty[$, le théorème de dérivation de la réciproque s'applique : φ est de classe C^1 et sa dérivée est strictement positive sur $]0, 1[$. L'inverse est donc de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, avec :

$$(\varphi^{-1})'(s) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))}.$$

En revanche, $\varphi^{-1}(0) = 0$. Comme φ est continue, strictement croissante et nulle en zéro, $s \rightarrow 0^+$ entraîne $t = \varphi^{-1}(s) \rightarrow 0^+$. On a alors :

$$\frac{\varphi^{-1}(s) - \varphi^{-1}(0)}{s} = \frac{t}{\varphi(t)} = (1-t)e^{1/t} \rightarrow +\infty.$$

L'inverse n'a donc pas de dérivée à droite finie en zéro et n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Son graphe admet une tangente verticale à l'origine.

2.d) Représentation de l'inverse

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python. Pour tracer l'inverse, il suffit d'échanger les coordonnées des points du graphe de φ . On évite le calcul numérique de $e^{-1/t}$ en zéro en traitant ce point séparément.

Python

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

t = np.linspace(0.01, 0.95, 600)
s = t / (1 - t) * np.exp(-1 / t)

plt.plot(s, t)
plt.plot([0], [0], "o")
plt.show()
```

Le premier tableau représente les ordonnées $\varphi^{-1}(s)$, et le second les abscisses correspondantes. La fenêtre montre la courbe jusqu'à $\varphi(0.95)$; il s'agit d'un tracé approché, pas d'une preuve de bijectivité. Code exécuté avec une sortie graphique non interactive.

3.a) Dérivée de la composée

Puisque $f(t) \in]0, 1[$, $\varphi(f(t)) > 0$. Les fonctions f , la restriction de φ à $]0, 1[$ et le logarithme sont de classe C^1 sur leurs domaines respectifs. Leur composée est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

La règle de dérivation des composées donne :

$$(\ln \circ \varphi \circ f)'(t) = \frac{\varphi'(f(t))}{\varphi(f(t))} f'(t).$$

Pour $s \in]0, 1[$, les expressions de φ et φ' donnent :

$$\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} = \frac{1}{s^2(1-s)}.$$

Par conséquent :

$$(\ln \circ \varphi \circ f)'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)^2(1-f(t))}.$$

On peut aussi contrôler le calcul en écrivant $\ln \varphi(s) = \ln s - \ln(1-s) - 1/s$ et en dérivant cette expression.

3.b) Existence et unicité

Commençons par une solution éventuelle f de (1) avec $f(0) = a$. Bien que l'énoncé ne suppose initialement que la dérivabilité, (1) montre que f' est continue : f est continue et le membre de droite est une expression polynomiale en f . Ainsi f est de classe C^1 et la question précédente s'applique.

Comme $0 < f(t) < 1$, le dénominateur de 3.a ne s'annule pas et :

$$(\ln \varphi(f(t)))' = r.$$

La fonction $t \mapsto \ln \varphi(f(t)) - rt$ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$; elle est constante. Sa valeur en zéro est $\ln \varphi(a)$. Ainsi :

$$\varphi(f(t)) = \varphi(a)e^{rt}, \quad f(t) = \varphi^{-1}(\varphi(a)e^{rt}).$$

Cela prouve l'unicité. Pour l'existence, définissons f_a par cette dernière formule. Son argument est strictement positif pour tout réel t ; par 2.c, l'inverse est de classe C^1 sur cet ensemble. La fonction f_a est donc de classe C^1 , à valeurs dans $]0, 1[$, et $f_a(0) = a$.

En dérivant $\varphi(f_a(t)) = \varphi(a)e^{rt}$, on obtient :

$$\varphi'(f_a(t))f'_a(t) = r\varphi(f_a(t)).$$

Puisque $\varphi'(f_a(t)) > 0$, la division est licite et donne :

$$f'_a(t) = r \frac{\varphi(f_a(t))}{\varphi'(f_a(t))} = r f_a(t)^2 (1 - f_a(t)).$$

L'existence est établie, pour tout réel r , y compris $r = 0$; dans ce cas, f_a est la fonction constante égale à a .

4.a) Monotonie et limites

Méthode 1 — Utilisation de l'équation et de la limite monotone

Comme $r > 0$ et $0 < f_a(t) < 1$, l'équation (1) donne $f'_a(t) > 0$. La fonction est strictement croissante et bornée, donc possède une limite L_- en $-\infty$ et une limite L_+ en $+\infty$, avec $0 \leq L_- \leq a \leq L_+ \leq 1$.

Si $L_+ < 1$, alors $L_+ \geq a > 0$ et (1) donnerait $f'_a(t) \rightarrow r L_+^2 (1 - L_+) > 0$. La dérivée serait minorée par une constante positive à partir d'un certain rang ; l'inégalité des accroissements finis rendrait f_a non bornée, contradiction. Donc $L_+ = 1$.

Si $L_- > 0$, alors $L_- \leq a < 1$ et la même équation donnerait une dérivée minorée par une constante positive pour les temps suffisamment négatifs. En intégrant entre t et un temps fixé T , on aurait $f_a(T) - f_a(t) \geq k(T - t)$ avec $k > 0$, ce qui contredit $0 < f_a < 1$. Donc $L_- = 0$.

Méthode 2 — Utilisation de la formule explicite

La fonction $t \mapsto \varphi(a)e^{rt}$ et l'inverse φ^{-1} sont strictement croissantes. Leur composée est donc strictement croissante. L'inverse est continue en zéro ; elle tend vers 1 lorsque son argument tend vers $+\infty$, car $\varphi(t) \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow 1^-$. La formule (4) donne donc directement :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f_a(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f_a(t) = 1.$$

La première méthode est utile lorsque l'équation est connue sans formule explicite ; la seconde exploite la transformation déjà construite.

4.b) Point d'inflexion

L'équation (1) et la régularité C^1 de f_a montrent que f'_a est de classe C^1 : f_a est de classe C^2 . En dérivant :

$$f''_a(t) = r(2f_a(t)(1 - f_a(t)) - f_a(t)^2) f'_a(t) = rf_a(t)(2 - 3f_a(t))f'_a(t).$$

Tous les facteurs autres que $2 - 3f_a(t)$ sont strictement positifs. Par 4.a, f_a est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$. Il existe donc un unique t_a tel que $f_a(t_a) = 2/3$.

Pour $t < t_a$, $f''_a(t) > 0$; pour $t > t_a$, $f''_a(t) < 0$. La convexité change donc en t_a , et la courbe possède exactement un point d'inflexion, d'ordonnée $2/3$.

4.c) Lieu des points d'inflexion et tangentes

La relation (4) au temps t_a donne :

$$\varphi(2/3) = \varphi(a)e^{rt_a}, \quad \varphi(2/3) = 2e^{-3/2}.$$

Ainsi :

$$t_a = \frac{1}{r} \ln \left(\frac{2e^{-3/2}}{\varphi(a)} \right).$$

Lorsque a décrit $]0, 1[$, $\varphi(a)$ décrit $]0, +\infty[$; t_a décrit donc tout $\mathbb{R}$. L'ensemble des points d'inflexion est la droite $\{(t, 2/3) : t \in \mathbb{R}\}$.

En chacun de ces points, la pente vaut :

$$f'_a(t_a) = r \left(\frac{2}{3} \right)^2 \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4r}{27}.$$

Toutes les tangentes sont parallèles, d'équations $y = 2/3 + (4r/27)(t - t_a)$.

Partie II : étude d'une fonction de deux variables

5.a) Régularité

Sur l'ouvert $D =]0, 1[\times]0, 1[$, les quatre nombres x , $1 - x$, y et $1 - y$ sont strictement positifs. On peut écrire :

$$K(x, y) = x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x) - x \ln y - (1 - x) \ln(1 - y).$$

Les fonctions coordonnées et le logarithme sur $]0, +\infty[$ sont de classe C^∞ . Par somme, produit et composition, K est de classe C^∞ sur D , donc en particulier de classe C^2 .

5.b) Dérivée par rapport à y

Pour x fixé, la dérivation des deux termes contenant y donne :

$$\partial_2 K(x, y) = -\frac{x}{y} + \frac{1 - x}{1 - y} = \frac{y - x}{y(1 - y)}.$$

Le dénominateur est strictement positif sur D .

5.c) Minimum global

La régularité C^2 sur l'ouvert D a été vérifiée en 5.a. Pour situer les points critiques dans le cadre hessien, calculons aussi la dérivée suivant x :

$$\partial_1 K(x, y) = \ln \left(\frac{x(1 - y)}{y(1 - x)} \right).$$

La dérivée $\partial_2 K$ est nulle exactement lorsque $x = y$; en ces points, $\partial_1 K$ est également nulle. Les points critiques sont donc les (s, s) , avec $s \in]0, 1[$. En dérivant les deux dérivées premières, la hessienne en un tel point est :

$$\nabla^2 K(s, s) = \frac{1}{s(1-s)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$, qui forment une base de $\mathbb{R}^2$, sont des vecteurs propres de valeurs propres respectives 0 et $2/(s(1-s)) > 0$. La présence d'une valeur propre nulle empêche le seul critère hessien de conclure. On étudie donc directement les valeurs de K , d'abord par le signe de $\partial_2 K$ comme demandé.

Méthode 1 — Étude des variations demandée

Fixons $x \in]0, 1[$. La dérivée calculée en 5.b est négative pour $y < x$, nulle pour $y = x$ et positive pour $y > x$. La fonction $y \mapsto K(x, y)$ décroît donc sur $]0, x]$ et croît sur $[x, 1[$. Elle admet un unique minimum en $y = x$, égal à $K(x, x) = 0$.

Ce raisonnement vaut pour chaque x . Ainsi $K(x, y) \geq 0$ sur D , et l'égalité a lieu exactement lorsque $x = y$. Le minimum global est 0, atteint en tous les points de la diagonale de D .

Méthode 2 — Concavité du logarithme

Les poids x et $1 - x$ sont strictement positifs et de somme 1. L'inégalité de concavité de $\ln$ donne :

$$x \ln \left(\frac{y}{x} \right) + (1-x) \ln \left(\frac{1-y}{1-x} \right) \leq \ln \left(x \frac{y}{x} + (1-x) \frac{1-y}{1-x} \right) = 0.$$

Le membre de gauche est $-K(x, y)$, donc $K(x, y) \geq 0$. Comme le logarithme est strictement concave, l'égalité exige $y/x = (1-y)/(1-x)$, soit $y = x$. Cela retrouve le même minimum global.

La première méthode localise le minimum par les variations ; la seconde met en évidence une inégalité de convexité qui sera réutilisée dans la partie III. Cette preuve de minimum global ne repose sur aucun critère hessien d'extremum.

5.d) Absence de majorant

Fixons $x = 1/2$. Alors :

$$K(1/2, y) = -\ln 2 - \frac{1}{2} \ln(y(1-y)).$$

Lorsque $y \rightarrow 0^+$, $y(1-y) \rightarrow 0^+$ et le logarithme tend vers $-\infty$. Ainsi $K(1/2, y) \rightarrow +\infty$. La fonction K n'est donc pas majorée sur son domaine.

6.a) Dérivées secondes et hessienne

En dérivant par rapport à x l'expression de 5.a :

$$\partial_1 K(x, y) = \ln x - \ln(1-x) - \ln y + \ln(1-y) = \ln \left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)} \right).$$

Une nouvelle dérivation donne :

$$\partial_{11} K(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)}.$$

Pour les dérivées mixtes :

$$\partial_{12} K(x, y) = \partial_{21} K(x, y) = -\frac{1}{y} - \frac{1}{1-y} = -\frac{1}{y(1-y)}.$$

Enfin, en dérivant 5.b sous sa forme non regroupée :

$$\partial_{22}K(x, y) = \frac{x}{y^2} + \frac{1-x}{(1-y)^2}.$$

La hessienne est donc :

$$\nabla^2 K(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x(1-x)} & -\frac{1}{y(1-y)} \\ -\frac{1}{y(1-y)} & \frac{x}{y^2} + \frac{1-x}{(1-y)^2} \end{pmatrix}.$$

Pour $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, sa forme quadratique s'écrit :

$$q_{(x,y)}(h, k) = \frac{h^2}{x(1-x)} - \frac{2hk}{y(1-y)} + \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1-x}{(1-y)^2} \right) k^2.$$

6.b) Minoration dans la direction horizontale

En prenant $(h, k) = (1, 0)$, on obtient $q_{(x,y)}(1, 0) = 1/(x(1-x))$. Or :

$$x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Ce produit est strictement positif sur le domaine, donc l'inversion renverse l'inégalité :

$$q_{(x,y)}(1, 0) \geq 4.$$

7.a) Formule de Taylor sur un segment

Posons $F(t) = K(z + tw) = K(y + t(x-y), y)$ pour $t \in [0, 1]$. La première coordonnée reste entre x et y , donc strictement entre 0 et 1. La fonction F est de classe C^2 sur un intervalle ouvert contenant $[0, 1]$.

On a $F(0) = K(y, y) = 0$ et :

$$F'(0) = (x-y)\partial_1 K(y, y) = 0.$$

La dérivation selon la droite donne :

$$F''(t) = (x - y)^2 \partial_{11} K(y + t(x - y), y) = q_{z+tw}(w).$$

La formule de Taylor avec reste intégral, appliquée entre 0 et 1, donne :

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \int_0^1 (1 - t) F''(t) dt.$$

Ainsi $K(x, y) = \int_0^1 (1 - t) q_{z+tw}(w) dt.$

7.b) Minoration de K

Méthode 1 — Utilisation du reste intégral

La forme quadratique est homogène de degré deux, et $w = (x - y)(1, 0)$. Par 6.b, en chaque point du segment :

$$q_{z+tw}(w) = (x - y)^2 q_{z+tw}(1, 0) \geq 4(x - y)^2.$$

Le poids $1 - t$ est positif sur $[0, 1]$. En intégrant l'inégalité de 7.a :

$$K(x, y) \geq 4(x - y)^2 \int_0^1 (1 - t) dt = 2(x - y)^2.$$

Méthode 2 — Convexité d'une fonction d'une variable

Fixons y et posons $G(x) = K(x, y) - 2(x - y)^2$. Sur $]0, 1[$, cette fonction est de classe C^2 et :

$$G''(x) = \frac{1}{x(1-x)} - 4 \geq 0.$$

Elle est donc convexe. De plus, $G'(y) = \partial_1 K(y, y) = 0$ et $G(y) = 0$. Une fonction convexe dérivable admet un minimum global en tout point où sa dérivée s'annule ; ainsi $G(x) \geq 0$. Cela donne à nouveau $K(x, y) \geq 2(x - y)^2$.

Le reste intégral répond directement à l'enchaînement de l'énoncé ; la seconde méthode permet de reconnaître une minoration quadratique à partir d'une borne sur la dérivée seconde.

8.a) Tracé de la surface

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python. Les commandes supplémentaires de tracé sont expliquées dans le sujet.

Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

v = np.linspace(0.01, 0.99, 100)
X, Y = np.meshgrid(v, v)
Z = X * np.log(X / Y) + (1 - X) * np.log((1 - X) / (1 - Y))
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection="3d")
ax.plot_surface(X, Y, Z)
plt.show()
```

La grille reste à l'intérieur du domaine : tous les arguments des logarithmes sont positifs. Les produits et quotients sont coefficient par coefficient. La matrice Z contient

les valeurs de K sur la grille ; la sortie est un tracé numérique de sa surface. Code exécuté avec une sortie graphique non interactive.

8.b) Symétrie des lignes de niveau

En remplaçant (x, y) par $(1 - x, 1 - y)$:

$$K(1 - x, 1 - y) = (1 - x) \ln \left(\frac{1 - x}{1 - y} \right) + x \ln \left(\frac{x}{y} \right) = K(x, y).$$

La transformation $(x, y) \mapsto (1 - x, 1 - y)$ est la symétrie centrale de centre $(1/2, 1/2)$. Elle préserve le domaine et la valeur de K . Par conséquent, chaque ensemble de niveau $\{(x, y) \in D : K(x, y) = k\}$ possède ce centre de symétrie. Les deux branches d'un niveau strictement positif sont échangées par cette symétrie.

Partie III : divergence de Kullback

Dans cette partie, notons $p_x = Q^*([X = x])$ et $q_x = Q([X = x])$ pour $x \in X(\mathbb{N})$. Chaque événement $[X = x]$ est non vide et contient un entier de probabilité strictement positive sous les deux probabilités : ainsi $p_x > 0$ et $q_x > 0$. De plus,

$$\sum_x p_x = \sum_x q_x = 1.$$

9.a) Divergence de deux lois de Poisson

Pour $k \in \mathbb{N}$, les lois données sont :

$$p_k = e^{-\lambda^*} \frac{(\lambda^*)^k}{k!}, \quad q_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Le logarithme de leur quotient est :

$$\ln \left(\frac{p_k}{q_k} \right) = \lambda - \lambda^* + k \ln \left(\frac{\lambda^*}{\lambda} \right).$$

Avant de sommer, on contrôle la convergence absolue :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k \left| \ln \left(\frac{p_k}{q_k} \right) \right| \leq |\lambda - \lambda^*| \sum_{k=0}^{+\infty} p_k + \left| \ln \left(\frac{\lambda^*}{\lambda} \right) \right| \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k.$$

La somme des probabilités vaut 1 et l'espérance d'une loi de Poisson de paramètre λ^* vaut $\lambda^* < +\infty$. Le majorant est donc fini, ce qui justifie l'existence de $d(X)$ et la linéarité de la somme. Ainsi :

$$d(X) = \lambda - \lambda^* + \lambda^* \ln \left(\frac{\lambda^*}{\lambda} \right) = -\lambda^* \ln \left(\frac{\lambda}{\lambda^*} \right) + \lambda - \lambda^*.$$

9.b) Signe et comparaison asymptotique

Méthode 1 — Étude de la fonction du paramètre

Fixons $\lambda^* > 0$ et posons $D(\lambda) = -\lambda^* \ln(\lambda/\lambda^*) + \lambda - \lambda^*$ sur $]0, +\infty[$. Cette fonction est dérivable et :

$$D'(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^*}{\lambda} = \frac{\lambda - \lambda^*}{\lambda}.$$

Elle décroît strictement avant λ^* et croît strictement après, avec $D(\lambda^*) = 0$. Puisque les deux paramètres sont distincts, $d(X) > 0$.

Par définition de la dérivée en λ^* :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda^*} \frac{D(\lambda)}{\lambda - \lambda^*} = D'(\lambda^*) = 0.$$

Ainsi $d(X) = o(\lambda - \lambda^*)$.

Méthode 2 — Inégalité du logarithme et développement limité

Posons $h = (\lambda - \lambda^*)/\lambda^*$, de sorte que $h > -1$ et $h \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow \lambda^*$. On a :

$$d(X) = \lambda^*(h - \ln(1 + h)).$$

La stricte concavité du logarithme donne $\ln(1 + h) < h$ pour $h \neq 0$, d'où $d(X) > 0$. Le développement limité usuel en zéro est :

$$\ln(1 + h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2).$$

Ainsi :

$$d(X) = \frac{(\lambda - \lambda^*)^2}{2\lambda^*} + o((\lambda - \lambda^*)^2).$$

Cela prouve la négligeabilité demandée et fournit même un équivalent. Le changement de variable est affine ; aucune composition de développements limités n'est utilisée.

10.a) Positivité de l'espérance

L'espérance existe par hypothèse. Pour une variable discrète strictement positive :

$$E(U) = \sum_{u \in U(\Omega)} u P([U = u]).$$

Tous les termes sont positifs ou nuls, et au moins l'un est strictement positif : les probabilités des valeurs prises ont une somme égale à 1. Ainsi $E(U) > 0$.

10.b) Inégalité de la tangente

Notons $m = E(U) > 0$. La fonction ψ est convexe et dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$. Son graphe est situé au-dessus de toute tangente, en particulier celle au point m :

$$\forall x > 0, \quad \psi(x) \geq \psi(m) + \psi'(m)(x - m).$$

Donc $\psi(x) - \psi(E(U)) \geq \psi'(E(U))(x - E(U))$.

10.c) Inégalité pour l'espérance

On applique 10.b à chaque valeur de U . Les variables $\psi(U)$ et U sont intégrables par hypothèse ; la combinaison affine de U l'est également. La croissance et la linéarité de l'espérance sont donc applicables :

$$E(\psi(U)) \geq \psi(m) + \psi'(m)(E(U) - m) = \psi(m).$$

Ainsi $\psi(E(U)) \leq E(\psi(U))$.

10.d) Positivité de la divergence

Sous la probabilité Q^* , définissons la variable strictement positive :

$$U = \frac{q_X}{p_X}.$$

Par transfert et positivité :

$$E_{Q^*}(U) = \sum_x p_x \frac{q_x}{p_x} = \sum_x q_x = 1.$$

Vérifions aussi l'intégrabilité du logarithme avant d'utiliser 10.c. Pour les indices tels que $q_x > p_x$, l'inégalité $\ln v \leq v$ pour $v > 0$ donne :

$$\sum_{q_x > p_x} p_x \ln \left(\frac{q_x}{p_x} \right) \leq \sum_{q_x > p_x} q_x \leq 1.$$

Cette somme est la somme des valeurs absolues des termes négatifs de $d(X)$. Elle est finie. Si $d(X)$ existe comme réel, sa partie positive est donc également finie ; la série définissant $d(X)$ converge absolument. Par conséquent, $\ln U$ admet une espérance sous Q^* .

La fonction $\psi = -\ln$ est de classe C^1 et convexe sur $]0, +\infty[$. La question 10.c donne :

$$0 = -\ln(E_{Q^*}(U)) \leq E_{Q^*}(-\ln U) = \sum_x p_x \ln \left(\frac{p_x}{q_x} \right) = d(X).$$

Ainsi toute divergence réelle définie dans l'énoncé est positive ou nulle.

11.a) Décomposition par les valeurs de Y

Toutes les sommes sont désormais finies. Posons, pour $y \in Y(\mathbb{N})$:

$$p_y^Y = Q^*([Y = y]), \quad q_y^Y = Q([Y = y]).$$

Ces nombres sont strictement positifs. Pour $x \in g^{-1}(\{y\})$, l'événement $[X = x]$ est inclus dans $[Y = y]$. La définition des probabilités conditionnelles donne :

$$p_x = p_y^Y Q_{[Y=y]}^*([X = x]), \quad q_x = q_y^Y Q_{[Y=y]}([X = x]).$$

On en déduit :

$$\ln \left(\frac{p_x}{q_x} \right) = \ln \left(\frac{p_y^Y}{q_y^Y} \right) + \ln \left(\frac{Q_{[Y=y]}^*([X=x])}{Q_{[Y=y]}([X=x])} \right).$$

Les fibres $g^{-1}(\{y\})$ partitionnent le support de X . En regroupant les termes de $d(X)$ par fibre, le premier terme donne :

$$\sum_y \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} p_x \ln \left(\frac{p_y^Y}{q_y^Y} \right) = \sum_y p_y^Y \ln \left(\frac{p_y^Y}{q_y^Y} \right) = d(Y).$$

Le deuxième terme donne :

$$\sum_y p_y^Y \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} Q_{[Y=y]}^*([X=x]) \ln \left(\frac{Q_{[Y=y]}^*([X=x])}{Q_{[Y=y]}([X=x])} \right).$$

La somme de ces deux expressions est exactement l'égalité demandée.

11.b) Diminution de la divergence par transformation

Pour chaque y , les deux familles de probabilités conditionnelles sur la fibre sont strictement positives et de somme 1. Leur divergence est finie, puisque la fibre est finie. Le raisonnement de 10.d s'applique à ces deux lois, qu'elles soient distinctes ou identiques, et montre que la somme intérieure de 11.a est positive ou nulle.

Tous les coefficients p_y^Y sont positifs. Le terme ajouté à $d(Y)$ dans 11.a est donc positif ou nul. Ainsi $d(X) \geq d(Y)$.

12.a) Ensemble B et somme des différences

Question adaptée au programme actuel : rectification d'un cas limite de l'énoncé. La distinction de Q et Q^* ne garantit pas que les lois de X soient distinctes.

Si les lois de X sont différentes, les nombres $p_x - q_x$ ne sont pas tous nuls et leur somme vaut zéro. Il existe donc au moins un indice où $p_x > q_x$, qui appartient à B , et au moins un indice où $p_x < q_x$, qui appartient à son complémentaire. Ces deux ensembles sont

non vides. Comme chaque valeur du support a une probabilité strictement positive sous les deux lois :

$$0 < Q^*([X \in B]) < 1, \quad 0 < Q([X \in B]) < 1.$$

Posons

$$\Delta = \sum_{x \in B} (p_x - q_x) = Q^*([X \in B]) - Q([X \in B]) \geq 0.$$

La somme de toutes les différences étant nulle :

$$\sum_{x \notin B} (q_x - p_x) = \Delta.$$

Le signe de chaque différence est connu sur les deux ensembles. Ainsi :

$$\sum_x |q_x - p_x| = \sum_{x \in B} (p_x - q_x) + \sum_{x \notin B} (q_x - p_x) = 2\Delta.$$

En élevant au carré, on obtient l'identité demandée.

Si les lois sont identiques, $p_x = q_x$ pour chaque x , donc $B = X(\mathbb{N})$ et les deux probabilités de $[X \in B]$ valent 1. L'identité reste valable, ses deux membres étant nuls.

12.b) Divergence de l'indicatrice

Question adaptée au programme actuel : le cas de lois identiques est traité sans évaluer K au bord de son domaine.

Lorsque les lois sont différentes, posons $\alpha = Q^*([X \in B])$ et $\beta = Q([X \in B])$. Par 12.a, $\alpha, \beta \in]0, 1[$. Les lois de Y sont respectivement des lois de Bernoulli de paramètres α et β . Par définition :

$$d(Y) = \alpha \ln \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) + (1 - \alpha) \ln \left(\frac{1 - \alpha}{1 - \beta} \right) = K(\alpha, \beta).$$

Lorsque les lois de X sont identiques,

$$d(X) = \sum_x p_x \ln 1 = 0.$$

De plus, $B = X(\mathbb{N})$ et Y est constante égale à 1 sous les deux probabilités ; son support ne contient que 1 et $d(Y) = 1 \ln 1 = 0$.

12.c) Inégalité de minoration de la divergence

Si les lois de X sont différentes, les résultats 11.b, 12.b et 7.b donnent successivement :

$$d(X) \geq d(Y) = K(\alpha, \beta) \geq 2(\alpha - \beta)^2.$$

Par 12.a,

$$2(\alpha - \beta)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_x |q_x - p_x| \right)^2.$$

Donc :

$$d(X) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{x \in X(\mathbb{N})} |Q([X = x]) - Q^*([X = x])| \right)^2.$$

Si les lois sont identiques, les deux membres valent zéro d'après 12.a et 12.b. L'inégalité est donc valable dans tous les cas, ce qui sera nécessaire en 15.a.

Partie IV : trajectoires d'une équation différentielle vectorielle

13.a) Dérivée du produit

La fonction v est continue ; sa primitive V est donc de classe C^1 avec $V' = v$. La fonction y est dérivable. En dérivant le produit et en utilisant l'équation donnée :

$$\frac{d}{dt} (y(t)e^{-V(t)}) = e^{-V(t)}(y'(t) - V'(t)y(t)) = e^{-V(t)}(v(t)y(t) - v(t)y(t)) = 0.$$

Le produit est donc constant sur $\mathbb{R}$.

13.b) Annulation ou conservation du signe

La constante de 13.a vaut $y(0)e^{-V(0)}$. Par conséquent :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = y(0)e^{V(t)-V(0)}.$$

Le facteur exponentiel est strictement positif. Si $y(0) = 0$, y est identiquement nulle. Si $y(0) > 0$, elle est strictement positive partout ; si $y(0) < 0$, elle est strictement négative partout. Aucune théorie générale des équations différentielles n'est nécessaire.

14.a) Conservation de la somme des composantes

Posons

$$S(t) = \sum_{j=1}^n f_j(t)$$

et $M(t) = \langle f(t), Rf(t) \rangle$. Les composantes de f sont dérivables, donc continues. La fonction M est une somme finie de produits de fonctions continues ; elle est continue.

En sommant (10), on obtient :

$$S'(t) = \sum_{j=1}^n f_j(t) \langle e_j, Rf(t) \rangle - M(t) \sum_{j=1}^n f_j(t) = M(t) - M(t)S(t).$$

En effet, la première somme est le produit scalaire $\langle f(t), Rf(t) \rangle$. Pour $y = 1 - S$, il vient :

$$y'(t) = -M(t)y(t).$$

La fonction $-M$ est continue et $y(0) = 0$ par (10). Le résultat de 13.b donne $y(t) = 0$ pour tout t , donc

$$\sum_{j=1}^n f_j(t) = 1.$$

14.b) Positivité des composantes

Pour chaque indice j , posons $v_j(t) = \langle e_j - f(t), Rf(t) \rangle$. Cette fonction est continue, puisque f est continue. L'équation (10) s'écrit $f'_j = v_j f_j$ et $f_j(0) > 0$.

La question 13.b montre donc que $f_j(t) > 0$ pour tout réel t . Comme $n \geq 2$ et la somme des composantes vaut 1, chacune est aussi strictement inférieure à 1. Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) \in T^* \subset]0, 1[^n.$$

Enfin, le membre de droite de (10) est continu ; les composantes f_j sont donc de classe C^1 . Cette régularité sera utilisée en 15.b.

15.a) Minoration de $H(f(t))$

Le résultat de 12.c est une inégalité portant sur deux vecteurs de probabilités strictement positives de même support fini. Sa démonstration ne dépend que de ces vecteurs et reste valable s'ils sont identiques.

Pour chaque temps t , appliquons-le aux deux vecteurs $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ et $(f_1(t), \dots, f_n(t))$. Le premier est strictement positif et de somme 1 car $x^* \in T^*$; le second l'est par 14.a et 14.b. La divergence associée est :

$$\sum_{j=1}^n x_j^* \ln \left(\frac{x_j^*}{f_j(t)} \right) = H(f(t)).$$

La question 12.c donne donc :

$$H(f(t)) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n |f_j(t) - x_j^*| \right)^2 \geq 0.$$

Toutes les quantités sont finies, les logarithmes portant sur des réels strictement positifs.

15.b) Dérivée de $H \circ f$

Les composantes de f sont de classe C^1 et strictement positives. L'expression de $H(f(t))$ est une somme finie de logarithmes de fonctions C^1 strictement positives ; elle est donc de classe C^1 .

En dérivant chaque terme :

$$(H \circ f)'(t) = - \sum_{j=1}^n x_j^* \frac{f_j'(t)}{f_j(t)} = - \sum_{j=1}^n x_j^* \langle e_j - f(t), Rf(t) \rangle.$$

Par linéarité du produit scalaire et puisque

$$\sum_j x_j^* = 1 :$$

$$(H \circ f)'(t) = -\langle x^*, Rf(t) \rangle + \langle f(t), Rf(t) \rangle = -\langle x^* - f(t), Rf(t) \rangle.$$

C'est l'expression demandée.

15.c) Existence de la limite

Si $f(t) \neq x^*$, l'hypothèse (12) appliquée à $f(t) \in T$ donne $\langle x^* - f(t), Rf(t) \rangle > 0$. Si $f(t) = x^*$, ce produit scalaire vaut zéro. Par 15.b, la dérivée de $H \circ f$ est donc toujours négative ou nulle.

La fonction $H \circ f$ est décroissante et minorée par zéro d'après 15.a. Le théorème de la limite monotone lui assure une limite finie ℓ en $+\infty$, avec :

$$0 \leq \ell \leq H(f(0)), \quad \forall t \geq 0, \quad H(f(t)) \geq \ell.$$

16. Contrôle de H par la distance à x^*

La concavité du logarithme et sa tangente en 1 donnent $\ln z \leq z - 1$ pour tout $z > 0$.

Pour $x \in T^*$, chaque rapport x_j^*/x_j est strictement positif. En multipliant cette inégalité par $x_j^* > 0$ puis en sommant :

$$H(x) \leq \sum_{j=1}^n x_j^* \left(\frac{x_j^*}{x_j} - 1 \right) = \sum_{j=1}^n \frac{x_j^*}{x_j} (x_j^* - x_j).$$

Pour la deuxième inégalité, notons $m = \min_j x_j > 0$ et S la somme obtenue. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ donne :

$$S \leq |S| \leq \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{x_j^*}{x_j} \right)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n (x_j^* - x_j)^2 \right)^{1/2}.$$

Comme $x_j \geq m$:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{x_j^*}{x_j} \right)^2 \leq \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^n (x_j^*)^2 \leq \frac{1}{m^2} \left(\sum_{j=1}^n x_j^* \right)^2 = \frac{1}{m^2}.$$

La deuxième inégalité utilise la positivité des composantes, qui rend les termes croisés du carré de la somme positifs. On conclut :

$$H(x) \leq S \leq \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^n (x_j - x_j^*)^2 \right)^{1/2}.$$

17.a) Distance minimale si la limite est positive

Par 16 et l'hypothèse $\min_j f_j(t) \geq c > 0$:

$$0 \leq \ell \leq H(f(t)) \leq \frac{1}{c} \left(\sum_{j=1}^n (f_j(t) - x_j^*)^2 \right)^{1/2} \quad (t \geq 0).$$

Les deux côtés sont positifs ou nuls. En multipliant par c puis en élevant au carré :

$$\forall t \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n (f_j(t) - x_j^*)^2 \geq c^2 \ell^2.$$

17.b) Minoration uniforme loin de x^*

Question adaptée au programme actuel : les propriétés de fermé et borné utilisées ici sont précisées dans le sujet.

Fixons $p > 0$ et posons $F_p = \{x \in T : \|x - x^*\|^2 \geq p\}$. Si cet ensemble est vide, n'importe quel $q > 0$ convient : aucun point de T ne satisfait l'hypothèse de l'implication.

Supposons F_p non vide. D'après les propriétés rappelées, cet ensemble est fermé et borné. La fonction $G(x) = \langle x^* - x, Rx \rangle$ est polynomiale en les coordonnées, donc continue. Elle atteint un minimum q sur F_p .

Comme $p > 0$, aucun point de F_p n'est égal à x^* . L'hypothèse (12) montre que G est strictement positive sur F_p , notamment au point où le minimum est atteint. Donc $q > 0$.

Pour tout $x \in T$ tel que $\|x - x^*\|^2 \geq p$, on a alors $x \in F_p$ et $\langle x^* - x, Rx \rangle \geq q$. C'est l'implication demandée.

17.c) Annulation de la limite et convergence de la trajectoire

Raisonnons par l'absurde et supposons $\ell > 0$. Le réel $p = c^2 \ell^2$ est strictement positif. Par 17.a, $\|f(t) - x^*\|^2 \geq p$ pour tout $t \geq 0$. Par 17.b, il existe donc $q > 0$ tel que :

$$\forall t \geq 0, \quad \langle x^* - f(t), Rf(t) \rangle \geq q.$$

Avec 15.b : $(H \circ f)'(t) \leq -q$. La fonction $H \circ f$ est de classe C^1 ; en intégrant cette inégalité sur le segment $[0, t]$:

$$H(f(t)) \leq H(f(0)) - qt.$$

Le membre de droite devient strictement négatif lorsque $t > H(f(0))/q$, alors que le membre de gauche est toujours positif ou nul par 15.a. Cette contradiction établit $\ell = 0$.

Enfin, pour chaque indice j , 15.a donne :

$$0 \leq |f_j(t) - x_j^*| \leq \sum_{k=1}^n |f_k(t) - x_k^*| \leq \sqrt{2H(f(t))} \rightarrow 0.$$

Par encadrement, $f_j(t) \rightarrow x_j^*$ pour tout j .

18.a) Vérification de l'hypothèse (12)

Identifions les vecteurs à leurs colonnes dans la base canonique et posons $x^* = U/n$. Ses composantes valent $1/n > 0$ et leur somme vaut 1, donc $x^* \in T^*$.

La matrice A est antisymétrique : ${}^tA = -A$. Pour tout vecteur réel x , le scalaire txAx est égal à sa transposée, donc :

$${}^txAx = {}^t({}^tAx)x = -{}^tAx x, \quad {}^txAx = 0.$$

De plus, $AU = 0$ entraîne ${}^tUA = -{}^t(AU) = 0$, donc $\langle x^*, Ax \rangle = 0$. Pour $x \in T$:

$$\langle x^* - x, Rx \rangle = \lambda(\langle x^*, x \rangle - \|x\|^2) = \lambda \left(\frac{1}{n} - \|x\|^2 \right).$$

Comme $\langle x^*, x \rangle = 1/n$ et $\|x^*\|^2 = 1/n$, le développement du carré donne :

$$\|x - x^*\|^2 = \|x\|^2 - \frac{1}{n}.$$

Ainsi :

$$\langle x^* - x, Rx \rangle = -\lambda \|x - x^*\|^2.$$

Puisque $-\lambda > 0$, ce produit scalaire est strictement positif pour tout $x \in T \setminus \{x^*\}$.
L'hypothèse (12) est vérifiée.

18.b) Croissance du produit des composantes

Méthode 1 — Dérivée logarithmique

Notons

$$P(t) = \prod_{j=1}^n f_j(t).$$

Cette fonction est strictement positive et de classe C^1 par 14.b. En dérivant son logarithme :

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = \sum_{j=1}^n \frac{f'_j(t)}{f_j(t)} = \langle U, Rf(t) \rangle - n \langle f(t), Rf(t) \rangle.$$

Or $\forall A = 0$ et

$$\sum_j f_j(t) = 1,$$

donc $\langle U, Rf(t) \rangle = \lambda$. L'antisymétrie donne $\langle f(t), Af(t) \rangle = 0$, d'où $\langle f(t), Rf(t) \rangle = \lambda \|f(t)\|^2$.

Ainsi :

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = \lambda(1 - n\|f(t)\|^2) = -n\lambda \left\| f(t) - \frac{U}{n} \right\|^2 \geq 0.$$

Comme $P(t) > 0$, $P'(t) \geq 0$, et P est croissante sur $\mathbb{R}$.

Méthode 2 — Utilisation de H

Pour $x^* = U/n$, la définition de H donne :

$$H(f(t)) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln \left(\frac{1/n}{f_j(t)} \right) = -\ln n - \frac{1}{n} \ln P(t).$$

On en déduit $P(t) = n^{-n} e^{-nH(f(t))}$. L'hypothèse (12) a été vérifiée en 18.a ; par 15.c, $H \circ f$ est décroissante. Alors $-nH \circ f$ est croissante et, l'exponentielle étant croissante, P est croissante.

La première méthode mesure explicitement le taux de croissance du produit ; la seconde réutilise directement la fonction décroissante construite dans le problème.

18.c) Convergence vers l'état uniforme

Posons $c = P(0) > 0$. Par 18.b, $P(t) \geq P(0) = c$ pour tout $t \geq 0$. Par 14.b, toutes les composantes appartiennent à $]0, 1[$, donc pour chaque indice j :

$$P(t) = f_j(t) \prod_{k \neq j} f_k(t) \leq f_j(t).$$

Ainsi $f_j(t) \geq c$ pour tout $t \geq 0$ et tout j : l'hypothèse (14) de la question 17 est satisfaite. L'hypothèse (12) l'est par 18.a. On peut donc appliquer 17.c et conclure :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f_j(t) = \frac{1}{n}.$$

Relevé des adaptations

- 2.d : code adapté en Python, par échange des coordonnées du graphe de φ , conformément au référentiel informatique.
- 8.a : code adapté en Python ; les commandes de grille et de surface nécessaires sont précisées dans l'énoncé.
- 8.b : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original. Les graduations et les positions de contrôle ont été mesurées ; les courbes étiquetées sont calculées à partir de la formule de K , aux niveaux lus sur la figure ; les deux branches extérieures non étiquetées sont relevées directement par mesure de leurs points.
- 12.a–12.b : correction de l'hypothèse erronée selon laquelle deux probabilités distinctes induisent nécessairement deux lois distinctes pour X . Le cas de lois identiques est traité séparément ; les probabilités strictement comprises entre 0 et 1 et l'expression à l'aide de K ne sont utilisées que lorsque les lois sont différentes. L'inégalité 12.c reste valable dans tous les cas.
- 17.b : rappel des propriétés de fermé et borné nécessaires à l'application du théorème des extrema sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$, conformément au référentiel.