



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESSEC

Mathématiques

2019

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I — Un premier exemple

1) Rang, projecteur et éléments propres

Posons $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix}$. Les colonnes de B sont opposées et sa première colonne est non nulle. Comme $a \neq 1$, le facteur $1/(1-a)$ est défini et non nul. Donc $\text{rg } A = 1$.

Le produit donne

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1-a & -1+a \\ a-a^2 & -a+a^2 \end{pmatrix} = (1-a)B.$$

Ainsi $A^2 = A$. L'endomorphisme f est un projecteur.

Pour un vecteur (x, y) , on a

$$f(x, y) = \frac{x-y}{1-a}(1, a).$$

Donc $\text{Ker } f = \text{Vect}(1, 1)$ et $\text{Im } f = \text{Vect}(1, a)$. En outre, $f(1, a) = (1, a)$.

Méthode 1 — Vecteurs propres explicites

Les vecteurs $(1, 1)$ et $(1, a)$ sont indépendants : si $\alpha(1, 1) + \beta(1, a) = 0$, la différence des coordonnées donne $(a-1)\beta = 0$, donc $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$.

Ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est $\text{diag}(0, 1)$. Ainsi f est diagonalisable, son spectre est $\{0, 1\}$ et

$$E_0(f) = \text{Vect}(1, 1), \quad E_1(f) = \text{Vect}(1, a).$$

Méthode 2 — Décomposition associée à un projecteur

Pour tout vecteur u , l'égalité $f^2 = f$ donne $u = f(u) + (u - f(u))$, avec $f(u) \in \text{Im } f$ et $u - f(u) \in \text{Ker } f$. Si $z \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$, on a à la fois $f(z) = z$ et $f(z) = 0$, donc $z = 0$.

Ainsi $\mathbb{R}^2 = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$, et f agit comme l'identité sur le premier sous-espace et comme zéro sur le second. Une base adaptée diagonalise donc f , avec les mêmes espaces propres que ci-dessus.

La première méthode se prête à un exemple concret ; la seconde s'applique à tout projecteur en dimension finie.

2) Matrice tAA et éléments propres

Calculons directement :

$$M = {}^tAA = \frac{1}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix} = \frac{1+a^2}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $k = (1+a^2)/(1-a)^2 > 0$. La matrice M est réelle symétrique ; le théorème spectral assure qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormée.

Plus explicitement, $M(1, 1) = 0$ et $M(1, -1) = 2k(1, -1)$. Ces deux vecteurs orthogonaux sont non nuls et forment une base. On obtient

$$\text{Sp}(s_f) = \left\{ 0, \frac{2(1+a^2)}{(1-a)^2} \right\},$$

$$E_0(s_f) = \text{Vect}(1, 1), \quad E_{2(1+a^2)/(1-a)^2}(s_f) = \text{Vect}(1, -1).$$

Il en résulte $\text{Ker}(s_f) = \text{Ker } f = \text{Vect}(1, 1)$.

3) Condition pour que M représente un projecteur

La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $C^2 = 2C$. Comme $M = kC$, on a $M^2 = 2kM$. La

matrice M est non nulle ; ainsi $M^2 = M$ équivaut à $2k = 1$.

Cela donne

$$2(1 + a^2) = (1 - a)^2 \iff (a + 1)^2 = 0.$$

Donc M est la matrice d'un projecteur si et seulement si $a = -1$, valeur compatible avec $a \neq 1$.

Dans ce cas,

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(1, -1)$.

Partie II — Généralités

4) Produit scalaire sur les matrices

(a) Expression en coefficients

Le coefficient diagonal (j, j) de tAB est

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j} b_{i,j}.$$

En sommant les coefficients diagonaux,

$$\text{Tr}({}^tAB) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j} b_{i,j}.$$

(b) Propriétés du produit scalaire

La formule précédente est symétrique en A et B et bilinéaire, par linéarité des sommes finies. De plus,

$$\text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 \geq 0.$$

Cette somme est nulle si et seulement si tous les $a_{i,j}$ sont nuls, donc si et seulement si $A = 0$. L'application est ainsi un produit scalaire.

La norme associée est

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} a_{i,j}^2}.$$

En particulier, $\|{}^tA\|_2 = \|A\|_2$.

(c) Inégalité et cas d'égalité

Méthode 1 — Cauchy-Schwarz, comme demandé

Pour le produit scalaire précédent, Cauchy-Schwarz s'écrit $|(A | B)| \leq \|A\|_2 \|B\|_2$, avec égalité si et seulement si A et B sont linéairement dépendantes.

En prenant $B = {}^tA$,

$$(A | {}^tA) = \text{Tr}({}^tA^2) = \text{Tr}(A^2).$$

La dernière égalité vient du fait que la transposition conserve les coefficients diagonaux, donc la trace. Ainsi

$$\text{Tr}(A^2) \leq |\text{Tr}(A^2)| \leq \|A\|_2 \|{}^tA\|_2 = \text{Tr}({}^tAA).$$

Si $A = 0$, l'égalité est vérifiée et A est symétrique. Si $A \neq 0$ et si l'égalité demandée est vérifiée, le produit scalaire $(A | {}^tA)$ vaut $\|A\|_2^2 > 0$. L'égalité de Cauchy-Schwarz impose ${}^tA = cA$. Les normes égales donnent $|c| = 1$; le produit scalaire positif impose $c = 1$. Donc ${}^tA = A$.

Réciproquement, si A est symétrique, ${}^tAA = A^2$, donc les traces sont égales.

Méthode 2 — Mesure du défaut de symétrie

En développant la somme des carrés des coefficients de $A - {}^tA$,

$$\|A - {}^tA\|_2^2 = \sum_{i,j} (a_{i,j} - a_{j,i})^2 = 2 \sum_{i,j} a_{i,j}^2 - 2 \sum_{i,j} a_{i,j} a_{j,i}.$$

Or

$$\text{Tr}(A^2) = \sum_{i,j} a_{i,j} a_{j,i}.$$

Donc

$$\text{Tr}({}^tAA) - \text{Tr}(A^2) = \frac{1}{2} \|A - {}^tA\|_2^2 \geq 0.$$

Il y a égalité exactement lorsque $A - {}^tA = 0$. Cette seconde preuve quantifie l'écart à l'égalité, tandis que la première utilise le théorème demandé.

5) Matrice de l'adjoint en base orthonormée

(a) Changement de base

Avec la convention de l'énoncé, les colonnes de P sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}_0$. La relation de changement de base est

$$A' = P^{-1}AP.$$

(b) Orthogonalité de la matrice de passage

Les colonnes de P forment une famille orthonormale pour le produit scalaire canonique. Ainsi $({}^tPP)_{i,j} = \langle e'_i | e'_j \rangle = \delta_{i,j}$, donc ${}^tPP = I_n$.

La matrice P est inversible puisqu'elle est une matrice de passage ; on en déduit $P^{-1} = {}^tP$. Elle est orthogonale.

(c) Transposée en nouvelle base

La matrice de f^* dans $\mathcal{B}_0$ est tA . Sa matrice dans $\mathcal{B}'$ est donc $P^{-1}{}^tAP = {}^tP{}^tAP$.

D'autre part, $A' = {}^tPAP$, et sa transposée vaut ${}^tA' = {}^tP{}^tAP$. Ces expressions coïncident. Ainsi $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^*) = {}^tA'$.

6) Réduction de s_f

(a) Forme quadratique

La transposée d'un produit donne ${}^t(AX) = {}^tX {}^tA$. Par définition de la norme canonique,

$${}^tX({}^tAA)X = {}^t(AX)(AX) = \|AX\|^2.$$

(b) Noyaux et rangs

Si $f(x) = 0$, alors $s_f(x) = f^*(f(x)) = 0$. Donc $\text{Ker } f \subset \text{Ker}(s_f)$.

Réciproquement, si $s_f(x) = 0$ et si X représente x , la question (a) donne

$\|AX\|^2 = {}^tX({}^tAA)X = 0$. La norme n'est nulle que pour le vecteur nul, donc $AX = 0$ et $f(x) = 0$.

Ainsi $\text{Ker } f = \text{Ker}(s_f)$. Les deux endomorphismes agissent sur l'espace de dimension n ; le théorème du rang donne $\text{rg}(s_f) = n - \dim \text{Ker}(s_f) = n - \dim \text{Ker } f = \text{rg } f$.

(c) Symétrie

La transposée de tAA est tAA elle-même. La matrice de s_f dans la base canonique, qui est orthonormée, est donc symétrique. Ainsi s_f est un endomorphisme symétrique.

(d) Signes des valeurs propres

Soit λ une valeur propre de s_f , et soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé. La question (a) donne

$$\lambda \|x\|^2 = \langle s_f(x) | x \rangle = \|f(x)\|^2 \geq 0.$$

Comme $\|x\|^2 > 0$, on a $\lambda \geq 0$. Toutes les valeurs propres sont donc positives ou nulles.

(e) Base orthonormée adaptée

L'endomorphisme s_f est symétrique ; le théorème spectral assure l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres. Toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Dans une base propre, le rang est le nombre de coefficients diagonaux non nuls. D'après la question (b), ce rang vaut r . En plaçant les r vecteurs associés aux valeurs propres strictement positives avant les autres, on obtient une base $\mathcal{C}$ dans laquelle

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(s_f) = \begin{pmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r), \quad \lambda_i > 0.$$

Les $n - r$ derniers vecteurs constituent une base de $\text{Ker}(s_f) = \text{Ker } f$.

(f) Matrice de f et relation entre les blocs

Puisque $\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n \in \text{Ker } f$, les $n - r$ dernières colonnes de la matrice de f dans $\mathcal{C}$ sont nulles. Les autres colonnes se répartissent entre les r premières et les $n - r$ dernières coordonnées, d'où

$$B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

La base $\mathcal{C}$ est orthonormée. Par la question 5(c), la matrice de $s_f = f^* \circ f$ dans cette base est ${}^t B B$. Le calcul par blocs donne

$${}^t B B = \begin{pmatrix} {}^t A_1 A_1 + {}^t A_3 A_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En comparant avec la question (e), on obtient ${}^t A_1 A_1 + {}^t A_3 A_3 = D$.

7) Comparaison des réductions de tAA et A^tA

(a) Rangs et dimensions des noyaux

Appliquons la question 6(b) à la matrice tA . Elle donne $\text{rg}(A^tA) = \text{rg}({}^tA)$. Or une matrice et sa transposée ont le même rang. Avec la question 6(b) appliquée à A ,

$$\text{rg}(\tau_f) = \text{rg}(A^tA) = \text{rg } A = \text{rg}(s_f).$$

Le théorème du rang dans $\mathbb{R}^n$ donne alors $\dim \text{Ker}(\tau_f) = \dim \text{Ker}(s_f)$.

(b) Transport des vecteurs propres

Si $s_f(x) = \lambda x$ avec $\lambda > 0$ et $x \neq 0$, on a

$$\tau_f(f(x)) = f(f^*(f(x))) = f(s_f(x)) = \lambda f(x).$$

Le vecteur $f(x)$ est non nul : sinon $s_f(x) = 0$, donc $\lambda x = 0$, contradiction. Ainsi λ est valeur propre de τ_f et $f(x)$ est un vecteur propre associé.

La restriction de f définit une application linéaire de $E_\lambda(s_f)$ vers $E_\lambda(\tau_f)$. Si $f(x) = 0$ pour x dans cet espace, $s_f(x) = 0 = \lambda x$, donc $x = 0$. Cette restriction est injective. Ainsi

$$\dim E_\lambda(s_f) \leq \dim E_\lambda(\tau_f).$$

(c) Égalité des spectres et des dimensions

La matrice A^tA est réelle symétrique et sa forme quadratique vaut $\|{}^tAX\|^2$. Elle est donc diagonalisable en base orthonormée, et ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Pour une valeur propre $\lambda > 0$ de τ_f , la même démonstration que dans (b), en échangeant f et f^* , montre que λ est valeur propre de s_f et que $\dim E_\lambda(\tau_f) \leq \dim E_\lambda(s_f)$.

Les valeurs propres strictement positives sont donc les mêmes, avec les mêmes dimensions d'espaces propres. Pour $\lambda = 0$, l'égalité des dimensions des noyaux résulte de (a). Si l'un des noyaux est nul, les deux le sont ; sinon 0 est valeur propre de chacun.

Finalement les deux endomorphismes ont exactement le même spectre, et $\dim E_\lambda(s_f) = \dim E_\lambda(\tau_f)$ pour chaque valeur propre λ .

(d) Similitude par une matrice orthogonale

Grâce à (c), on peut choisir des bases orthonormées de vecteurs propres de tAA et A^tA avec les valeurs propres dans le même ordre. Soient P et Q leurs matrices de passage depuis la base canonique. Il existe une même matrice diagonale Λ telle que

$${}^tAA = P\Lambda^tP, \quad A^tA = Q\Lambda^tQ.$$

Posons $\Omega = Q^tP$. On vérifie ${}^t\Omega\Omega = P^tQQ^tP = I_n$, donc Ω est orthogonale. De plus,

$$\Omega({}^tAA)^t\Omega = Q^tP(P\Lambda^tP)P^tQ = Q\Lambda^tQ = A^tA.$$

La matrice demandée existe.

8) Inégalité entre produit et moyenne

(a) Fermeture et bornitude de W

Question adaptée au programme actuel : les propriétés de fermeture nécessaires sont rappelées dans le préambule de la question.

La fonction

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_i x_i - 1$$

est continue. Son ensemble de zéros est fermé, d'après le rappel. Comme V est fermé et $W = V \cap \{g = 0\}$, W est fermé.

Pour $x \in W$, chaque coordonnée est positive ou nulle et la somme vaut 1, donc $0 \leq x_i \leq 1$. Ainsi $\|x\|^2 \leq n$ et W est borné. Il est non vide puisque $(1/n, \dots, 1/n) \in W$.

(b) Existence d'un maximum

La fonction φ , produit des coordonnées, est polynomiale et donc continue sur $\mathbb{R}^n$. L'ensemble W est fermé, borné et non vide. Le théorème des extrema assure donc que φ atteint un maximum global M sur W .

(c) Valeur sur le bord

Un vecteur de $V \setminus U$ a ses coordonnées positives ou nulles, et au moins une coordonnée nulle. Leur produit est donc nul : $\varphi(x) = 0$.

(d) Localisation du maximum

Au point $x_* = (1/n, \dots, 1/n)$, $\varphi(x_*) = n^{-n} > 0$. Ainsi $M \geq n^{-n} > 0$.

Un point de W situé dans $V \setminus U$ a son produit nul par (c), donc ne peut réaliser M . Tout point réalisant le maximum appartient à U et vérifie la contrainte

$$\sum_i x_i = 1.$$

Par conséquent, M est aussi le maximum sur U sous cette contrainte, et il y est atteint.

(e) Valeur et unicité du maximum

Méthode 1 — Contrainte linéaire et hessienne après paramétrisation

Sur l'ouvert U , la fonction φ est de classe C^∞ . Pour $x \in U$, $\partial_i \varphi(x) = \varphi(x)/x_i$.

En un maximum sous la contrainte linéaire

$$\sum_i x_i = 1,$$

le gradient appartient à l'espace engendré par le gradient $(1, \dots, 1)$ de la contrainte. Il existe donc un réel c tel que $\varphi(x)/x_i = c$ pour tous les indices. Comme $\varphi(x) > 0$, cela impose que toutes les coordonnées soient égales. La contrainte donne nécessairement $x = x_* = (1/n, \dots, 1/n)$.

On peut vérifier la nature de ce point par une hessienne sur les variables libres. Posons $k = n - 1$ et

$$G = \{y \in \mathbb{R}^k \mid y_i > 0 \text{ pour tous } i, \sum_{i=1}^k y_i < 1\}, \quad \psi(y) = \left(\prod_{i=1}^k y_i \right) \left(1 - \sum_{i=1}^k y_i \right).$$

L'ensemble G est ouvert et convexe, car il est défini par des inégalités linéaires strictes. La fonction ψ est polynomiale, donc C^2 sur G . Elle représente φ sous la contrainte, avec

$$x_n = 1 - \sum_i y_i.$$

En notant

$$p(y) = \prod_i y_i$$

et

$$t(y) = 1 - \sum_i y_i,$$

on a $\partial_i \psi = p(t/y_i - 1)$; le gradient s'annule exactement lorsque tous les $y_i = t$, donc au point $y_* = (1/n, \dots, 1/n)$.

La dérivée seconde diagonale est $\partial_{i,i}\psi = -2p/y_i$. Pour $i \neq j$, la dérivée mixte est

$$\partial_{i,j}\psi = p \left(\frac{t}{y_i y_j} - \frac{1}{y_i} - \frac{1}{y_j} \right).$$

Au point y_* , posons $c_0 = n^{-(n-2)} > 0$. Les coefficients diagonaux de la hessienne valent $-2c_0$ et les coefficients hors diagonale valent $-c_0$. Ainsi

$$H_\psi(y_*) = -c_0(I_k + J_k),$$

où J_k a tous ses coefficients égaux à 1. Le vecteur $(1, \dots, 1)$ est propre pour J_k de valeur propre k , et chaque vecteur dont la somme des coordonnées est nulle appartient à son noyau. Ces sous-espaces sont supplémentaires.

Les valeurs propres de la hessienne sont donc $-c_0(1+k) = -nc_0$ sur la droite constante, et $-c_0$ sur le sous-espace de somme nulle, de dimension $k-1$. Pour $n=2$, ce dernier sous-espace a dimension zéro et la seule valeur propre est -2 . Toutes les valeurs propres présentes sont strictement négatives : y_* est un maximum local strict.

L'existence d'un maximum global à l'intérieur, établie en (d), et l'unicité du point critique contraint assurent qu'il est aussi l'unique maximum global. Sa valeur est $M = n^{-n}$.

Méthode 2 — Remplacement de deux coordonnées par leur moyenne

Soit x un point réalisant M , dont l'existence dans U a été établie. Supposons que deux coordonnées x_i et x_j soient distinctes. Remplaçons-les toutes deux par $(x_i + x_j)/2$, en conservant les autres coordonnées. Le nouveau point appartient encore à U et conserve la somme 1.

Le produit des deux coordonnées augmente strictement, car

$$\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right)^2 - x_i x_j = \frac{(x_i - x_j)^2}{4} > 0.$$

Le produit des autres coordonnées est strictement positif ; pour $n = 2$, il s'agit du produit vide, égal à 1. Le produit de toutes les coordonnées augmente donc strictement, contradiction avec la maximalité de x .

Toutes les coordonnées du maximum sont ainsi égales à $1/n$. Le maximum est unique et vaut $M = n^{-n}$.

La première méthode illustre l'optimisation sous contrainte linéaire ; la seconde établit le résultat sans dérivation et explique pourquoi des coordonnées inégales réduisent le produit.

(f) Application aux valeurs propres d'une matrice symétrique

Le théorème spectral et l'invariance de la trace par similitude donnent

$$t = \text{Tr } S = \sum_i \mu_i \geq 0.$$

Si $t = 0$, chaque $\mu_i = 0$, donc le produit vaut zéro et l'inégalité est une égalité. La diagonalisation montre alors $S = 0$.

Si $t > 0$, posons $x_i = \mu_i/t$. Ces nombres sont positifs ou nuls et leur somme vaut 1, donc $(x_1, \dots, x_n) \in W$. La question (e) donne

$$\prod_i \mu_i = t^n \prod_i x_i \leq t^n n^{-n} = \left(\frac{\text{Tr } S}{n}\right)^n.$$

Pour $t > 0$, il y a égalité exactement lorsque $x_i = 1/n$ pour chaque i , c'est-à-dire lorsque toutes les valeurs propres de S valent t/n . Une matrice symétrique ayant une seule valeur propre c est, par diagonalisation, égale à cI_n .

En incluant le cas $t = 0$, l'égalité est donc réalisée exactement pour $S = cI_n$ avec $c \geq 0$.

(g) Application au produit décalé

Pour $x \geq 0$, la matrice $B = xI_n + {}^tAA$ est symétrique. Dans une base orthonormée propre de tAA , elle est diagonale de coefficients $x + \lambda_i$. Ces valeurs sont positives ou nulles, par la question 6(d).

On peut donc appliquer (f) à B :

$$\Delta(x) = \prod_i (x + \lambda_i) \leq \left(\frac{\text{Tr } B}{n} \right)^n.$$

Par linéarité de la trace et diagonalisation de tAA ,

$$\text{Tr } B = nx + \sum_i \lambda_i.$$

Cela établit les deux expressions du majorant demandé. Le produit Δ est traité comme un produit explicite, sans utiliser de polynôme caractéristique.

Partie III — Étude de deux cas particuliers

9) Cas d'un projecteur

(a) Trace d'un projecteur

Pour un projecteur, $\mathbb{R}^n = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$, comme démontré à la question 1. Dans une base obtenue en réunissant une base de l'image et une base du noyau, sa matrice est $\text{diag}(I_r, 0_{n-r})$, donc a trace r .

Les matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes sont semblables. Par invariance de la trace par similitude, toute matrice représentant f a trace r .

(b) Détermination du bloc A_1

La relation $f^2 = f$ donne, dans la base $\mathcal{C}$,

$$\begin{pmatrix} A_1^2 & 0 \\ A_3 A_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $A_1^2 = A_1$. La trace de cette matrice par blocs est $\text{Tr } A_1$; par (a), elle vaut r .

La matrice A_1 représente donc un projecteur sur un espace de dimension r . En appliquant la preuve de (a) à cet espace, sa trace égale son rang. Ce rang vaut r , donc A_1 est inversible.

En multipliant $A_1^2 = A_1$ par son inverse, on obtient $A_1 = I_r$.

(c) Valeurs propres non nulles et trace

Méthode 1 — Relation entre les blocs

La question 6(f), avec $A_1 = I_r$, donne $D = I_r + {}^t A_3 A_3$. Pour le i -ième vecteur canonique u_i de $\mathbb{R}^r$,

$$\lambda_i = {}^t u_i D u_i = 1 + \|A_3 u_i\|^2 \geq 1.$$

Ces λ_i , pour $1 \leq i \leq r$, sont précisément les valeurs propres non nulles de ${}^t A A$, avec répétitions. Les autres sont nulles. Ainsi

$$\text{Tr}({}^t A A) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \geq r.$$

Méthode 2 — Vecteurs propres dans l'image du projecteur

Par la question 7(c), les valeurs propres non nulles de s_f et de τ_f sont les mêmes. Soit $\lambda > 0$ une valeur propre de τ_f et $y \neq 0$ un vecteur propre associé. Comme $y = \lambda^{-1} f(f^*(y))$, il appartient à $\text{Im } f$, donc $f(y) = y$.

La définition de f^* par la transposée donne $\langle f^*(y) | y \rangle = \langle y | f(y) \rangle = \|y\|^2$. Cauchy-Schwarz entraîne $\|f^*(y)\| \geq \|y\|$, après division par $\|y\| > 0$.

Or $\lambda \|y\|^2 = \langle f(f^*(y)) | y \rangle = \|f^*(y)\|^2$. Donc $\lambda \geq 1$. Il y a r valeurs propres non nulles dans la liste étendue, d'où la même borne sur la trace.

La preuve par blocs réutilise la réduction précédente ; la preuve géométrique utilise la propriété $f(y) = y$ sur l'image du projecteur.

(d) Cas d'égalité et projecteurs orthogonaux

Tous les projecteurs orthogonaux de rang r vérifient l'égalité demandée. Plus précisément, parmi tous les projecteurs de rang r , cette égalité caractérise les projecteurs orthogonaux.

Méthode 1 — Bloc A_3

D'après (b) et la question 6(f),

$$\text{Tr}(^tAA) = \text{Tr}(I_r + {}^tA_3A_3) = r + \sum_{i,j} (A_3)_{i,j}^2.$$

Il y a égalité avec r exactement lorsque $A_3 = 0$. Dans ce cas, la matrice de f dans la base orthonormée $\mathcal{C}$ est $\text{diag}(I_r, 0)$: elle est symétrique et représente le projecteur orthogonal sur les r premières directions.

Réciproquement, si f est un projecteur orthogonal, il est symétrique. Sa matrice dans la base orthonormée $\mathcal{C}$ est symétrique ; la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix}$ impose alors $A_3 = 0$, donc la trace vaut r .

Méthode 2 — Cas d'égalité de la question 4(c)

Puisque $A^2 = A$, $\text{Tr}(A^2) = \text{Tr } A = r$. La question 4(c) donne $r \leq \text{Tr}({}^tAA)$, avec égalité exactement lorsque A est symétrique.

Un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est symétrique, résultat du programme. On obtient donc exactement la même caractérisation.

La première méthode identifie le bloc responsable de l'écart ; la seconde réutilise directement le cas d'égalité d'une inégalité générale.

10) Cas d'une symétrie

(a) Inverse de tAA

La relation $A^2 = I_n$ donne $A^{-1} = A$. Sa transposée vérifie aussi $({}^tA)^2 = I_n$, donc $({}^tA)^{-1} = {}^tA$.

Le produit tAA est ainsi inversible et

$$({}^tAA)^{-1} = A^{-1}({}^tA)^{-1} = A{}^tA.$$

(b) Valeurs propres réciproques

Posons $B = {}^tAA$. Cette matrice est symétrique, à valeurs propres positives ou nulles, et inversible ; ses valeurs propres sont donc strictement positives.

Pour $\lambda > 0$, l'équivalence $Bx = \lambda x \iff B^{-1}x = \lambda^{-1}x$ donne $E_\lambda(B) = E_{1/\lambda}(B^{-1})$.

Par (a), $B^{-1} = A^t A$. La question 7(c) affirme que $A^t A$ et ${}^t A A = B$ ont les mêmes valeurs propres et les mêmes dimensions d'espaces propres. Ainsi $1/\lambda$ est valeur propre de B , et

$$\dim E_\lambda(B) = \dim E_{1/\lambda}(B^{-1}) = \dim E_{1/\lambda}(B).$$

La liste étendue des valeurs propres est donc conservée lorsqu'on remplace chaque valeur par son inverse.

(c) Inégalité scalaire

Pour $x > 0$,

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0.$$

Le dénominateur est strictement positif. L'égalité est donc réalisée exactement lorsque $(x-1)^2 = 0$, c'est-à-dire lorsque $x = 1$.

(d) Minoration du produit

Notons

$$P = \prod_i (1 + \lambda_i) > 0.$$

Méthode 1 — Produit avec la liste réciproque

La question (b) donne

$$\prod_i (1 + 1/\lambda_i) = P.$$

Par conséquent,

$$P^2 = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i)(1 + 1/\lambda_i) = \prod_{i=1}^n (2 + \lambda_i + 1/\lambda_i).$$

La question (c) montre que chaque facteur vaut au moins 4. Ainsi $P^2 \geq 4^n$. Comme $P > 0$, $P \geq 2^n$.

Méthode 2 — Produit des valeurs propres

La liste réciproque étant la même, le nombre

$$L = \prod_i \lambda_i > 0$$

vérifie $L = 1/L$. Donc $L = 1$.

Pour chaque $\lambda_i > 0$, $(\sqrt{\lambda_i} - 1)^2 \geq 0$ donne $1 + \lambda_i \geq 2\sqrt{\lambda_i}$. En multipliant les inégalités positives,

$$P \geq 2^n \sqrt{\prod_i \lambda_i} = 2^n.$$

La première preuve utilise directement (c) ; la seconde repose sur une autre inégalité scalaire et le produit explicite des valeurs propres. Aucun déterminant n'est utilisé.

(e) Égalité et symétrie orthogonale

Dans la première preuve de (d), chaque facteur de P^2 est au moins 4. Le produit vaut 4^n exactement si chaque facteur vaut 4, donc, par (c), si toutes les λ_i valent 1.

La matrice $B = {}^tAA$ est symétrique ; si toutes ses valeurs propres valent 1, sa diagonalisation donne $B = I_n$. Réciproquement, $B = I_n$ donne toutes les $\lambda_i = 1$ et $P = 2^n$.

Ainsi, sous l'hypothèse $A^2 = I_n$, l'égalité correspond exactement aux matrices orthogonales A . Elles sont aussi symétriques : $A^{-1} = A$ et $A^{-1} = {}^t A$ donnent ${}^t A = A$.

Vérifions le lien avec les espaces $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$. Pour tout x ,

$$x = \frac{x + f(x)}{2} + \frac{x - f(x)}{2},$$

et les deux termes appartiennent respectivement à $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$. L'intersection est nulle, donc $\mathbb{R}^n = E_1(f) \oplus E_{-1}(f)$.

Si A est orthogonale et si $u \in E_1(f)$ et $z \in E_{-1}(f)$, alors

$$\langle u | z \rangle = \langle f(u) | f(z) \rangle = \langle u | -z \rangle = -\langle u | z \rangle,$$

donc les espaces sont orthogonaux.

Réciproquement, si ces deux espaces sont orthogonaux, écrivons $x = u + z$ dans leur somme directe. Alors $f(x) = u - z$ et Pythagore donne $\|f(x)\|^2 = \|u\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$.

La conservation de la norme implique celle du produit scalaire, en développant $\|f(x + y)\|^2 = \|x + y\|^2$. En l'appliquant aux vecteurs canoniques, on obtient ${}^t A A = I_n$. Ainsi f est bien une symétrie orthogonale.

Toutes les matrices réalisant l'égalité sont donc les matrices symétriques orthogonales, ou, de manière équivalente, les matrices $P \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) {}^t P$ avec P orthogonale et chaque $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

Partie IV — Décomposition polaire

Dans toute cette partie, A est inversible. D'après la question 6, s_f est symétrique à valeurs propres positives ou nulles et $\operatorname{Ker}(s_f) = \operatorname{Ker} f = \{0\}$. Toutes ses valeurs propres sont donc strictement positives.

11) Construction d'une racine carrée symétrique positive

Le théorème spectral fournit une base orthonormée $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de vecteurs propres de s_f . Notons $\lambda_i > 0$ les valeurs propres correspondantes, de sorte que $s_f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$.

L'image des vecteurs d'une base détermine un unique endomorphisme. La prescription $v(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i} \varepsilon_i$ définit donc un endomorphisme v .

Sa matrice dans $\mathcal{C}$ est diagonale à coefficients strictement positifs. Comme $\mathcal{C}$ est orthonormée, cette matrice symétrique représente un endomorphisme symétrique. Ses valeurs propres sont les $\sqrt{\lambda_i} > 0$, donc $v \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^n)$.

Enfin, $v^2(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i = s_f(\varepsilon_i)$ pour chaque vecteur de la base. L'égalité sur une base entraîne $v^2 = s_f$.

12) Espaces propres de toute racine carrée positive

Soit $w \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^n)$ tel que $w^2 = s_f$. L'endomorphisme w est symétrique, donc diagonalisable, et ses valeurs propres sont positives ou nulles. Si $w(x) = 0$, alors $s_f(x) = w^2(x) = 0$, donc $x = 0$. Ainsi w est inversible et toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Si μ est une valeur propre de w et $x \in E_\mu(w)$, on a $s_f(x) = w^2(x) = \mu^2 x$. Cela établit $E_\mu(w) \subset E_{\mu^2}(s_f)$.

Méthode 1 — Décomposition dans une base propre de w

Choisissons une base orthonormée $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs propres de w , avec $w(u_j) = \nu_j u_j$ et $\nu_j > 0$.

Soit

$$x = \sum_j c_j u_j \in E_{\mu^2}(s_f).$$

L'égalité $w^2(x) = \mu^2 x$ donne

$$\sum_j c_j(\nu_j^2 - \mu^2)u_j = 0.$$

La famille est libre, donc $c_j(\nu_j^2 - \mu^2) = 0$ pour chaque j . Si $c_j \neq 0$, $\nu_j^2 = \mu^2$; comme $\nu_j > 0$ et $\mu > 0$, on a $\nu_j = \mu$. Il en résulte $w(x) = \mu x$.

Ainsi $E_{\mu^2}(s_f) \subset E_\mu(w)$ et les deux espaces sont égaux.

Dans cette même base, $s_f = w^2$ est diagonale à coefficients ν_j^2 . Chaque valeur propre de s_f est donc le carré d'une valeur propre positive de w , et chaque valeur propre de w fournit son carré dans le spectre de s_f . Par conséquent,

$$\text{Sp}(w) = \{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \in \text{Sp}(s_f)\}.$$

Méthode 2 — Factorisation particulière

Pour $\mu > 0$, l'endomorphisme $w + \mu \text{Id}$ est inversible : dans une base propre de w , il est diagonal à coefficients $\nu_j + \mu > 0$.

On a

$$w^2 - \mu^2 \text{Id} = (w + \mu \text{Id})(w - \mu \text{Id}).$$

Si $x \in E_{\mu^2}(s_f)$, le membre de gauche appliqué à x est nul. En appliquant l'inverse de $w + \mu \text{Id}$, on obtient $(w - \mu \text{Id})(x) = 0$. Cela prouve l'inclusion inverse, puis l'égalité des espaces propres.

Plus généralement, si $\lambda > 0$ est une valeur propre de s_f , prenons $x \neq 0$ dans $E_\lambda(s_f)$ et remplaçons μ par $\sqrt{\lambda}$ dans le calcul. Il donne $w(x) = \sqrt{\lambda}x$, donc $\sqrt{\lambda}$ est valeur propre de w . L'inclusion initiale montre réciproquement que tout $\mu \in \text{Sp}(w)$ vérifie $\mu^2 \in \text{Sp}(s_f)$.

Cette preuve utilise uniquement une factorisation et une inversion justifiée, sans invoquer de lemme général sur les noyaux de polynômes d'endomorphismes.

13) Unicité et indépendance de la base choisie

La question 11 fournit l'existence d'un endomorphisme v satisfaisant les conditions.

Pour tout autre w satisfaisant ces conditions, la question 12 donne, pour chaque valeur propre λ de s_f ,

$$w(x) = \sqrt{\lambda}x \quad \text{pour tout } x \in E_\lambda(s_f).$$

La construction de v possède exactement la même action sur chacun de ces espaces propres. Le théorème spectral assure que leurs sommes directes constituent tout $\mathbb{R}^n$. Les endomorphismes v et w coïncident donc sur tout l'espace, et $w = v$.

Ainsi la racine carrée symétrique positive de s_f est unique. Dans toute base orthonormée de vecteurs propres de s_f , chacun des vecteurs de base est aussi propre pour v , avec la valeur propre $\sqrt{\lambda}$ correspondante. La matrice de v dans cette base est diagonale.

14) Racine carrée matricielle

Passons aux matrices dans la base canonique, qui est orthonormée. L'endomorphisme unique v de la question 13 est représenté par une matrice symétrique à valeurs propres positives, notée $S = \sqrt{{}^tAA}$.

La relation $v^2 = s_f$ devient $S^2 = {}^tAA$. Réciproquement, toute matrice symétrique à valeurs propres positives ou nulles dont le carré vaut tAA représente un endomorphisme satisfaisant les conditions de la question 13 ; elle doit donc représenter ce même v .

La matrice $\sqrt{{}^tAA} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ existe et est unique. Ses valeurs propres sont strictement positives puisque celles de tAA le sont, donc elle est inversible.

15) Existence et unicité de la décomposition polaire

Posons $S = \sqrt{{}^tAA}$ et $\Omega = AS^{-1}$. L'inverse de S existe d'après la question 14. Comme S est symétrique, son inverse est symétrique également : ${}^t(S^{-1}) = ({}^tS)^{-1} = S^{-1}$.

On calcule

$${}^t\Omega\Omega = S^{-1}{}^tAAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n.$$

La matrice Ω est inversible, étant produit de matrices inversibles, et la relation précédente donne $\Omega^{-1} = {}^t\Omega$. Elle est donc orthogonale.

Ainsi $A = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$: le couple recherché existe.

Supposons qu'un autre couple (Ω', S') satisfasse les mêmes conditions et $A = \Omega' S'$. Comme Ω' et A sont inversibles, $S' = (\Omega')^{-1}A$ est inversible. La symétrie de S' et l'orthogonalité de Ω' donnent

$${}^tAA = {}^tS'{}^t\Omega'\Omega'S' = (S')^2.$$

Par l'unicité de la question 14, $S' = S$. On peut alors multiplier $A = \Omega' S$ à droite par S^{-1} pour obtenir $\Omega' = AS^{-1} = \Omega$.

La décomposition polaire est unique, et ses facteurs sont

$$S = \sqrt{{}^tAA}, \quad \Omega = A(\sqrt{{}^tAA})^{-1}.$$

Partie V — Distance à l'ensemble des matrices orthogonales

16) Existence de l'infimum

Considérons l'ensemble réel $E_M = \{\|M - V\|_2 \mid V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$. Il est non vide, car I_n est orthogonale. Tous ses éléments sont positifs ou nuls, donc il est minoré par zéro.

Le théorème de la borne inférieure assure l'existence d'un infimum réel. En particulier,

$$0 \leq d(M) = \inf E_M \leq \|M - I_n\|_2 < +\infty.$$

La distance est donc bien définie. Aucune atteinte de cet infimum n'est supposée à ce stade.

17) Invariance par multiplication orthogonale

Rappelons d'abord deux propriétés directement issues de la définition. Pour R orthogonale, ${}^tRR = R{}^tR = I_n$. Si R, T sont orthogonales, RT l'est aussi, puisque ${}^t(RT)(RT) = {}^tT{}^tRRR = I_n$, et son inverse est ${}^tT{}^tR$. Enfin, $R^{-1} = {}^tR$ est elle-même orthogonale.

Méthode 1 — Calcul avec la trace

Pour toute matrice N ,

$$\|RN\|_2^2 = \text{Tr}({}^tN{}^tRRN) = \text{Tr}({}^tNN) = \|N\|_2^2.$$

D'autre part, en utilisant $\text{Tr}(XY) = \text{Tr}(YX)$ pour deux matrices carrées,

$$\|NR\|_2^2 = \text{Tr}({}^tR{}^tNNR) = \text{Tr}({}^tR{}^tRNN) = \text{Tr}({}^tNN) = \|N\|_2^2.$$

Les normes étant positives ou nulles, on obtient $\|RN\|_2 = \|NR\|_2 = \|N\|_2$.

Méthode 2 — Colonnes et transposition

Pour chaque vecteur colonne u , $\|Ru\|^2 = {}^tu{}^tRRu = \|u\|^2$. La norme matricielle au carré

est la somme des normes au carré de ses colonnes. Donc multiplier N à gauche par R conserve sa norme.

Pour la multiplication à droite, on utilise $\|{}^t B\|_2 = \|B\|_2$ et l'orthogonalité de ${}^t R$:

$$\|NR\|_2 = \|{}^t R^t N\|_2 = \|{}^t N\|_2 = \|N\|_2.$$

Les deux méthodes établissent la même invariance ; la seconde la relie à la conservation des normes des colonnes.

Les applications $V \mapsto VR^{-1}$ et $V \mapsto R^{-1}V$ prennent leurs valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Leurs inverses sont respectivement $T \mapsto TR$ et $T \mapsto RT$. Ce sont donc des bijections.

Pour la distance à RM , l'invariance à gauche donne

$$\|RM - V\|_2 = \|R(M - R^{-1}V)\|_2 = \|M - R^{-1}V\|_2.$$

Lorsque V parcourt l'ensemble orthogonal, $R^{-1}V$ parcourt ce même ensemble par bijectivité. Les ensembles de distances sont identiques, donc $d(RM) = d(M)$.

De même, $\|MR - V\|_2 = \|(M - VR^{-1})R\|_2 = \|M - VR^{-1}\|_2$, et la bijectivité précédente donne $d(MR) = d(M)$.

Finalement, $d(M) = d(RM) = d(MR)$.

18) Réduction à une matrice diagonale positive

La décomposition polaire donne $A = \Omega S$ avec Ω orthogonale. Par la question 17, $d(A) = d(S)$.

La matrice S est symétrique et possède des valeurs propres strictement positives. Sa diagonalisation orthogonale fournit $S = PD^tP$, avec P orthogonale et D diagonale strictement positive, comme dans l'énoncé.

En appliquant deux fois la question 17,

$$d(S) = d(PD^tP) = d(D^tP) = d(D).$$

Donc $d(A) = d(D)$.

19) Partie symétrique d'une matrice orthogonale

(a) Diagonalisation

La matrice $W = (V + {}^tV)/2$ vérifie ${}^tW = W$. Elle est réelle symétrique. Le théorème spectral assure donc sa diagonalisation dans une base orthonormée de vecteurs propres.

(b) Encadrement de la forme quadratique

Si X est la colonne représentant x , le scalaire ${}^tX^tVX$ est la transposée du scalaire tXVX , donc lui est égal. Ainsi

$$\langle w(x) | x \rangle = \frac{1}{2}(\langle v(x) | x \rangle + \langle v^*(x) | x \rangle) = \langle v(x) | x \rangle.$$

L'orthogonalité de V donne $\|v(x)\|^2 = {}^tX^tV VX = {}^tX X = \|x\|^2$, donc $\|v(x)\| = \|x\|$.

Par Cauchy-Schwarz,

$$|\langle w(x) | x \rangle| = |\langle v(x) | x \rangle| \leq \|v(x)\| \|x\| = \|x\|^2.$$

On en déduit

$$\langle x - w(x) | x \rangle = \|x\|^2 - \langle w(x) | x \rangle \geq 0.$$

Ces identités sont également valables pour $x = 0$.

(c) Valeurs propres de $I_n - W$

La matrice $I_n - W$ est symétrique. Soit μ l'une de ses valeurs propres et $x \neq 0$ un vecteur propre correspondant. Par (b),

$$\mu \|x\|^2 = \langle x - w(x) | x \rangle \geq 0.$$

Comme $\|x\|^2 > 0$, $\mu \geq 0$. Toutes les valeurs propres de $I_n - W$ sont donc positives ou nulles.

(d) Coefficients diagonaux

Appliquons la dernière inégalité de (b) au vecteur canonique e_i . On a $\|e_i\|^2 = 1$ et $\langle w(e_i) | e_i \rangle = w_{i,i}$. Il en résulte $1 - w_{i,i} \geq 0$ pour chaque indice i .

(e) Condition portant sur tous les coefficients diagonaux

Rectification locale de l'énoncé : la condition doit être $w_{i,i} = 1$ pour tous les indices simultanément. Une interprétation portant sur un seul indice serait fautive : pour $V = \text{diag}(1, -1, 1, \dots, 1)$, on a $W = V$, $w_{1,1} = 1$, mais $W \neq I_n$. Le sujet a été reformulé pour lever cette ambiguïté de portée.

Méthode 1 — Trace et valeurs propres positives ou nulles

Si tous les $w_{i,i}$ valent 1, alors $\text{Tr}(I_n - W) = 0$. La matrice $I_n - W$ est symétrique et ses valeurs propres sont positives ou nulles par (c). La trace est leur somme ; une somme de nombres positifs ou nuls égale à zéro impose que chacun soit nul.

Le théorème spectral donne alors $I_n - W = 0$, donc $W = I_n$. Réciproquement, $W = I_n$ donne $w_{i,i} = 1$ pour tous les indices.

Méthode 2 — Normes des colonnes de V

Les coefficients diagonaux de W sont ceux de V : $w_{i,i} = V_{i,i}$. Si tous les $w_{i,i} = 1$, chaque colonne de V contient un coefficient diagonal égal à 1 et a sa norme au carré égale à 1.

Pour la colonne i , cela donne

$$1 + \sum_{j \neq i} V_{j,i}^2 = 1,$$

donc tous les coefficients hors diagonale de cette colonne sont nuls. Ainsi $V = I_n$, et donc $W = I_n$.

La réciproque est immédiate par lecture des coefficients de I_n . Les deux méthodes prouvent l'équivalence rectifiée ; la seconde fournit aussi la conséquence $W = I_n \implies V = I_n$, puisque $W = I_n$ implique tous les $V_{i,i} = 1$.

20) Calcul de la distance et unicité du minimiseur

(a) Différence des carrés des distances

Le développement d'un carré dans le produit scalaire matriciel donne

$$\|D - V\|_2^2 = \|D\|_2^2 + \|V\|_2^2 - 2(D | V),$$

$$\|D - I_n\|_2^2 = \|D\|_2^2 + \|I_n\|_2^2 - 2(D | I_n).$$

Puisque V est orthogonale, $\|V\|_2^2 = \text{Tr}(^t V V) = n = \|I_n\|_2^2$. En soustrayant et en utilisant la symétrie du produit scalaire,

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2(I_n - V | D).$$

Écrivons $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, avec $d_i > 0$. La formule en coefficients de la question 4(a) donne

$$(I_n - V | D) = \sum_{i=1}^n (1 - V_{i,i}) d_i.$$

Or $W_{i,i} = V_{i,i}$. Cette somme vaut donc $(I_n - W | D)$, ce qui établit les deux égalités demandées.

(b) Positivité de la différence

Par la question 19(d), $1 - w_{i,i} \geq 0$ pour chaque i . Comme $d_i > 0$, tous les termes de la somme suivante sont positifs ou nuls :

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2 \sum_{i=1}^n d_i (1 - w_{i,i}) \geq 0.$$

Ainsi toute matrice orthogonale V vérifie $\|D - V\|_2 \geq \|D - I_n\|_2$, les deux normes étant positives ou nulles.

(c) Valeur de la distance et unicité

La matrice I_n est orthogonale et réalise la borne inférieure de (b). L'infimum est donc atteint, et $d(D) = \|D - I_n\|_2$. Avec la question 18,

$$d(A) = d(D) = \|D - I_n\|_2.$$

Comme $S = PD^tP$ et $P^tP = I_n$, on a $S - I_n = P(D - I_n)^tP$. L'invariance de la norme de la question 17 donne

$$\|S - I_n\|_2 = \|D - I_n\|_2.$$

En utilisant $S = \sqrt{{}^tAA}$, on obtient la formule finale :

$$d(A) = \|D - I_n\|_2 = \|\sqrt{{}^tAA} - I_n\|_2.$$

Pour l'unicité, soit V orthogonale telle que $\|D - V\|_2 = d(A) = \|D - I_n\|_2$. La question (a) donne

$$\sum_i d_i(1 - w_{i,i}) = 0.$$

Chaque terme est positif ou nul et chaque d_i est strictement positif; donc $w_{i,i} = 1$ pour tous les indices.

La question 19(e) donne $W = I_n$, puis $V = I_n$. Réciproquement, $V = I_n$ réalise bien cette distance. Ainsi I_n est l'unique matrice orthogonale réalisant la distance de D à l'ensemble orthogonal.

Si les valeurs propres de tAA sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, les coefficients de D sont les $\sqrt{\lambda_i}$, avec répétitions. On peut donc aussi écrire

$$d(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\sqrt{\lambda_i} - 1)^2}.$$

Relevé des adaptations

- 8(a) : rappel dans le préambule de la question 8 que l'ensemble de zéros d'une fonction continue est fermé et qu'une intersection finie de fermés est fermée. Ces précisions fournissent les seules propriétés topologiques supplémentaires nécessaires pour établir la fermeture de W .
- 19(e) : rectification de la portée du quantificateur. L'équivalence concerne la condition $w_{i,i} = 1$ pour tous les indices simultanément et $W = I_n$. Une condition imposée à un

seul indice ne suffit pas ; la reformulation garantit la cohérence avec la preuve d'unicité en 20(c).