



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2025

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Première partie

1. (a) Espérance de S_n .

Chaque X_i suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, donc possède un moment d'ordre deux et vérifie :

$$E(X_i^2) = \mathbb{V}(X_i) + E(X_i)^2 = 1.$$

Une somme finie de variables intégrables est intégrable. Par linéarité :

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = n.$$

L'indépendance n'est pas nécessaire pour ce calcul. L'existence du moment d'ordre deux de S_n est admise dans l'énoncé.

1. (b) Simulation de S_n .

Méthode 1 — Simulation d'un tableau de normales.

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def simul(n):
    X = rd.normal(0, 1, n)
    return np.sum(X**2)
```

X contient n réalisations indépendantes de normales de moyenne 0 et d'écart-type 1. Le calcul élève chaque coefficient au carré et `np.sum` additionne ces carrés. La valeur renvoyée possède donc la loi de S_n .

Méthode 2 — Accumulation dans une boucle.

Python

```
import numpy.random as rd

def simul(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        x = rd.normal(0, 1)
        s = s + x**2
    return s
```

La boucle effectue exactement n tirages et ajoute leurs carrés. Elle renvoie la même loi. La première méthode est concise et adaptée aux tableaux ; la seconde rend l'accumulation explicite. Les deux fonctions ont été exécutées pour des entiers strictement positifs.

1. (c) Interprétation du graphique.

Pour n fixé, les appels à `simul(n)` fournissent des réalisations indépendantes de même loi que S_n . La moyenne de leurs carrés approche $E(S_n^2)$ par la loi faible des grands nombres, car S_n^2 est intégrable d'après l'admission de 1. (a).

La fonction $f(n, N)$ approche donc :

$$E(S_n^2) - n^2 = E(S_n^2) - E(S_n)^2 = \mathbb{V}(S_n).$$

Les neuf points de la figure sont proches de la droite d'équation $y = 2x$. On conjecture ainsi que, pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{V}(S_n) = 2n.$$

La simulation donne une indication, et non une preuve. La démonstration sera obtenue en 2. (d).

2. (a) Densité de W_1 .

On passe par la fonction de répartition, puisque $W_1 = X_1^2/2$ est une transformation non injective de X_1 .

Si $w < 0$, $F_{W_1}(w) = 0$. Si $w \geq 0$, la continuité de la loi normale donne :

$$F_{W_1}(w) = P(-\sqrt{2w} \leq X_1 \leq \sqrt{2w}) = \Phi(\sqrt{2w}) - \Phi(-\sqrt{2w}).$$

La densité normale est paire, d'où $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Ainsi :

$$F_{W_1}(w) = 2\Phi(\sqrt{2w}) - 1 \quad \text{pour } w \geq 0.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, notamment en 0 car $\Phi(0) = 1/2$, et de classe C^1 sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Pour $w > 0$:

$$F'_{W_1}(w) = \frac{2\varphi(\sqrt{2w})}{\sqrt{2w}} = \frac{e^{-w}}{\sqrt{\pi w}}.$$

Par la caractérisation des variables à densité à partir de leur fonction de répartition, une densité de W_1 est :

$$f_{W_1}(w) = \begin{cases} \frac{e^{-w}}{\sqrt{\pi w}}, & w > 0, \\ 0, & w \leq 0. \end{cases}$$

La valeur choisie au point 0 ne modifie pas la loi.

2. (b) Valeur de $\Gamma(1/2)$.

La densité obtenue en 2. (a) est normalisée, donc :

$$1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-w}}{\sqrt{\pi w}} dw = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}}.$$

On en déduit :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Cette méthode utilise directement la question précédente et ne nécessite aucun calcul supplémentaire d'intégrale.

2. (c) Loi de W_n .

La densité obtenue en 2. (a) s'écrit :

$$f_{W_1}(w) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} w^{1/2-1} e^{-w} \quad (w > 0).$$

C'est la densité de la loi gamma de forme $1/2$ et de taux 1 . Les variables $X_i^2/2$ ont toutes cette loi et sont mutuellement indépendantes, par le lemme des coalitions appliqué aux X_i .

Or

$$W_n = \sum_{i=1}^n X_i^2/2.$$

La stabilité par somme des lois gamma indépendantes de même taux donne :

$$W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

En particulier, une densité de W_n est $w \mapsto \frac{w^{n/2-1}e^{-w}}{\Gamma(n/2)}$ pour $w > 0$, et 0 pour $w \leq 0$.

2. (d) Espérance et variance de S_n .

Méthode 1 — Moments de la loi gamma.

Posons $q = n/2 > 0$. Par transfert, les intégrales positives définissant les deux premiers moments de W_n convergent, car ce sont des intégrales Gamma de paramètres $q + 1$ et $q + 2$:

$$E(W_n) = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q)} = q,$$

$$E(W_n^2) = \frac{\Gamma(q+2)}{\Gamma(q)} = q(q+1).$$

Ainsi $\mathbb{V}(W_n) = q(q+1) - q^2 = q$. Comme $S_n = 2W_n$:

$$E(S_n) = n, \quad \mathbb{V}(S_n) = 2n.$$

Méthode 2 — Variance d'une somme indépendante.

Le calcul précédent pour W_1 donne $E(W_1) = 1/2$ et $E(W_1^2) = 3/4$. Puisque $X_1^2 = 2W_1$:

$$E(X_1^4) = 4E(W_1^2) = 3, \quad \mathbb{V}(X_1^2) = 3 - 1 = 2.$$

Les X_i^2 sont indépendantes et ont toutes cette variance finie. La formule de variance d'une somme indépendante donne alors :

$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i^2) = 2n.$$

La linéarité redonne $E(S_n) = n$. La première méthode exploite la loi de la somme ; la seconde exploite son écriture en termes indépendants.

3. (a) Espérance de l'inverse.

Pour $n \geq 3$, le paramètre $n/2 - 1$ est strictement positif. Le transfert et la densité de W_n donnent donc une intégrale convergente :

$$E\left(\frac{1}{W_n}\right) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} w^{n/2-2} e^{-w} dw = \frac{\Gamma(n/2-1)}{\Gamma(n/2)}.$$

La relation $\Gamma(n/2) = (n/2 - 1)\Gamma(n/2 - 1)$ entraîne :

$$E\left(\frac{1}{W_n}\right) = \frac{2}{n-2}.$$

Comme $S_n = 2W_n$:

$$E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{n-2}.$$

La restriction $n \geq 3$ est essentielle : pour $n = 1$ ou $n = 2$, l'intégrale de l'inverse diverge en 0.

3. (b) Intégrabilité de l'inverse de la racine.

Méthode 1 — Domination élémentaire.

Pour tout $s > 0$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \leq 1 + \frac{1}{s}.$$

En effet, si $s \geq 1$, le membre de gauche est au plus 1 ; si $0 < s < 1$, il est au plus $1/s$.

Comme $S_n > 0$ et $1/S_n$ est intégrable pour $n \geq 3$, la domination établit l'intégrabilité de $1/\sqrt{S_n}$.

Méthode 2 — Calcul direct par la densité gamma.

Comme $S_n = 2W_n$, le transfert donne, pour $n \geq 3$:

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} w^{(n-1)/2-1} e^{-w} dw.$$

Cette intégrale converge puisque $(n-1)/2 > 0$, et sa valeur est :

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) = \frac{\Gamma((n-1)/2)}{\sqrt{2}\Gamma(n/2)}.$$

L'intégrabilité est donc établie. La domination est la méthode attendue à partir de 3. (a) ; le calcul par transfert donne en plus la valeur de l'espérance et fonctionne déjà pour $n = 2$.

4. Existence et unicité du seuil.

Notons g_n une densité continue et strictement positive de T_n , dont l'existence est admise. Pour $t \geq 0$, posons :

$$H_n(t) = P(|T_n| \leq t) = \int_{-t}^t g_n(x) \, dx.$$

La fonction H_n est continue sur $[0, +\infty[$ et, pour $t > 0$:

$$H'_n(t) = g_n(t) + g_n(-t) > 0.$$

Elle est strictement croissante, y compris à partir de 0, par positivité de l'intégrale sur tout intervalle non vide. De plus, $H_n(0) = 0$ et $H_n(t) \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Puisque $1 - \alpha \in]0, 1[$, le théorème de la bijection assure l'existence d'un unique $t_{n,\alpha} > 0$ tel que $H_n(t_{n,\alpha}) = 1 - \alpha$. Un réel négatif ne peut convenir, car l'événement $\{|T_n| \leq t\}$ est alors vide. L'unicité vaut donc sur tout $\mathbb{R}$.

5. (a) Espérance de T_n .

Pour $n \geq 3$, Y et $1/\sqrt{S_n}$ sont indépendantes, car Y est indépendante de la famille des X_i . Chacune est intégrable : une normale possède des moments d'ordre deux, et 3. (b) traite le second facteur.

Le produit de deux variables indépendantes intégrables est intégrable, et son espérance est le produit des espérances. Ainsi :

$$E(|T_n|) = \sqrt{n} E(|Y|) E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) < +\infty,$$

puis :

$$E(T_n) = \sqrt{n} E(Y) E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) = 0.$$

5. (b) Variance de T_n .

Les variables Y^2 et $1/S_n$ sont indépendantes et intégrables. Par 3. (a) :

$$E(T_n^2) = nE(Y^2)E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{n}{n-2} < +\infty.$$

Comme $E(T_n) = 0$, la variance existe et vaut :

$$\mathbb{V}(T_n) = \frac{n}{n-2}.$$

5. (c) Écart quadratique entre T_n et Y .

Les moments d'ordre deux de T_n et Y existent. La différence possède donc un moment d'ordre deux, car $(T_n - Y)^2 \leq 2T_n^2 + 2Y^2$.

De plus, $T_n Y = \sqrt{n} Y^2 / \sqrt{S_n}$ est intégrable, par indépendance et intégrabilité de ses facteurs. Puisque $S_n = 2W_n$:

$$E(T_n Y) = \sqrt{n} E(Y^2) E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) = \sqrt{\frac{n}{2}} E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right).$$

En développant le carré et en utilisant la linéarité :

$$E((T_n - Y)^2) = E(T_n^2) + E(Y^2) - 2E(T_n Y)$$

$$= \frac{n}{n-2} + 1 - \sqrt{2n} E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$$

$$= \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n} E \left(\frac{1}{\sqrt{W_n}} \right).$$

Cette espérance est un moment particulier calculé explicitement ; aucune théorie générale de comparaison d'estimateurs n'intervient.

6. (a) Existence, monotonie et valeur initiale.

Vérifions d'abord que la définition de u_n a un sens pour tous les $n \geq 2$, y compris $n = 2$, qui n'était pas couvert par 3. (b). Le transfert donne :

$$u_n = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} w^{(n-1)/2-1} e^{-w} dw = \frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2)}.$$

L'intégrale converge puisque $(n-1)/2 > 0$. En particulier, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-w} dw = 1$, donc :

$$u_2 = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} = \sqrt{\pi}.$$

Par définition, $W_{n+1} = W_n + X_{n+1}^2/2 > W_n > 0$. La fonction $w \mapsto 1/\sqrt{w}$ est strictement décroissante, d'où :

$$\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}} < \frac{1}{\sqrt{W_n}}.$$

La croissance de l'espérance donne $u_{n+1} \leq u_n$. La suite est donc décroissante. Elle est même strictement décroissante : la différence positive et intégrable entre les deux variables a une espérance strictement positive.

6. (b) Relation entre deux termes consécutifs.

En utilisant la formule de 6. (a), pour $n \geq 2$:

$$u_n u_{n+1} = \frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2)} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n+1)/2)} = \frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma((n+1)/2)}.$$

Les valeurs de Gamma considérées sont strictement positives. La relation fonctionnelle, appliquée au paramètre positif $(n-1)/2$, donne :

$$\Gamma((n+1)/2) = \frac{n-1}{2} \Gamma((n-1)/2).$$

Ainsi :

$$u_{n+1} u_n = \frac{2}{n-1}.$$

Puisque $u_n > 0$, on peut aussi écrire $u_{n+1} = \frac{2}{(n-1)u_n}$.

6. (c) Calcul de la suite en Python.

Python

```
import numpy as np

def suite_u(n):
    U = np.zeros(n-1)
    U[0] = np.sqrt(np.pi)
    for k in range(2, n):
        U[k-1] = 2 / ((k-1) * U[k-2])
    return U
```

L'entrée est un entier $n \geq 2$. Le tableau possède $n-1$ cases. La case d'indice $k-2$

contient u_k , et celle d'indice $k - 1$ reçoit u_{k+1} . La boucle parcourt les entiers $2, \dots, n - 1$, et calcule donc jusqu'à u_n .

Si $n = 2$, la boucle est vide et le tableau renvoyé contient seulement $u_2 = \sqrt{\pi}$. Les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n = 80$ ont été exécutés ; la relation de récurrence et les dimensions des tableaux ont été vérifiées.

6. (d) Conjecture suggérée par la figure.

Le tableau V contient les entiers de 2 à 80. L'élévation au carré puis la multiplication par V sont effectuées coefficient par coefficient : la figure représente donc les 79 points (n, nu_n^2) .

Les ordonnées semblent décroître vers 2. On conjecture :

$$nu_n^2 \longrightarrow 2, \quad \text{et donc} \quad u_n \sim \sqrt{\frac{2}{n}},$$

puisque $u_n > 0$. Le programme a été exécuté : le premier terme représenté est $2\pi \approx 6,283$ et le dernier est environ 2,038. Ces observations numériques ne remplacent pas la preuve suivante.

6. (e) Démonstration de l'équivalent.

Pour $n \geq 3$, la monotonie donne $u_{n+1} \leq u_n \leq u_{n-1}$. Tous les termes sont positifs, donc :

$$u_n u_{n+1} \leq u_n^2 \leq u_{n-1} u_n.$$

La relation de 6. (b), appliquée aux indices n et $n - 1$, devient :

$$\frac{2}{n-1} \leq u_n^2 \leq \frac{2}{n-2}.$$

Ainsi :

$$\frac{n}{n-1} \leq \frac{nu_n^2}{2} \leq \frac{n}{n-2}.$$

Les deux bornes tendent vers 1. Par encadrement, $nu_n^2/2 \rightarrow 1$. Comme $u_n > 0$, la continuité de la racine carrée donne :

$$\frac{u_n}{\sqrt{2/n}} = \sqrt{\frac{nu_n^2}{2}} \rightarrow 1.$$

On a donc bien $u_n \sim \sqrt{2/n}$, et en particulier $u_n \rightarrow 0$.

7. Convergence en probabilité vers Y .

Méthode 1 — Majorant par le moment d'ordre deux de la différence.

Pour $n \geq 3, 5$. (c) donne :

$$E((T_n - Y)^2) = \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n} u_n.$$

Le premier terme tend vers 2 et l'équivalent de 6. (e) entraîne $\sqrt{2n} u_n \rightarrow 2$. Ainsi $E((T_n - Y)^2) \rightarrow 0$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Markov, appliquée à la variable positive $(T_n - Y)^2$, donne :

$$P(|T_n - Y| > \varepsilon) \leq \frac{E((T_n - Y)^2)}{\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

C'est la définition de $T_n \xrightarrow{P} Y$. Le premier terme $n = 2$ n'a aucune incidence sur la convergence.

Méthode 2 — Encadrement direct à partir de S_n/n .

Posons $A_n = S_n/n > 0$. Les résultats de 2. (d) donnent $E(A_n) = 1$ et $V(A_n) = 2/n$. Par Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\delta > 0$:

$$P(|A_n - 1| > \delta) \leq \frac{2}{n\delta^2}.$$

La fonction $h(a) = 1/\sqrt{a}$ est continue en 1. Pour $\varepsilon > 0$ et $M > 0$, choisissons $\delta \in]0, 1[$ assez petit pour que $|a - 1| \leq \delta$ implique $|h(a) - 1| \leq \varepsilon/M$.

Sur l'événement $\{|Y| \leq M\} \cap \{|A_n - 1| \leq \delta\}$, on a :

$$|T_n - Y| = |Y| |h(A_n) - 1| \leq \varepsilon.$$

Par inclusion d'événements, puis Markov appliquée à Y^2 :

$$P(|T_n - Y| > \varepsilon) \leq P(|Y| > M) + P(|A_n - 1| > \delta) \leq \frac{1}{M^2} + \frac{2}{n\delta^2}.$$

Pour rendre cette probabilité inférieure à un réel $\eta > 0$, on choisit d'abord M tel que $1/M^2 < \eta/2$, puis n assez grand pour que $2/(n\delta^2) < \eta/2$. La convergence en probabilité est établie par sa définition.

La première méthode exploite le calcul préparé par le sujet ; la seconde illustre un encadrement d'événements sans opération automatique sur des convergences en loi.

Deuxième partie

Le sujet utilise ici deux identités particulières admises : la formule de probabilité pour la région $\mathcal{A}$ et, après 12, l'égalité entre les deux ordres d'intégration. Elles s'appliquent exclusivement aux expressions écrites dans l'énoncé. Les calculs ci-dessous portent ensuite sur des intégrales successives d'une variable ; aucun théorème général d'intégration multiple n'est invoqué.

8. Représentation de $\mathcal{A}$ pour $a = 2, b = -1$.

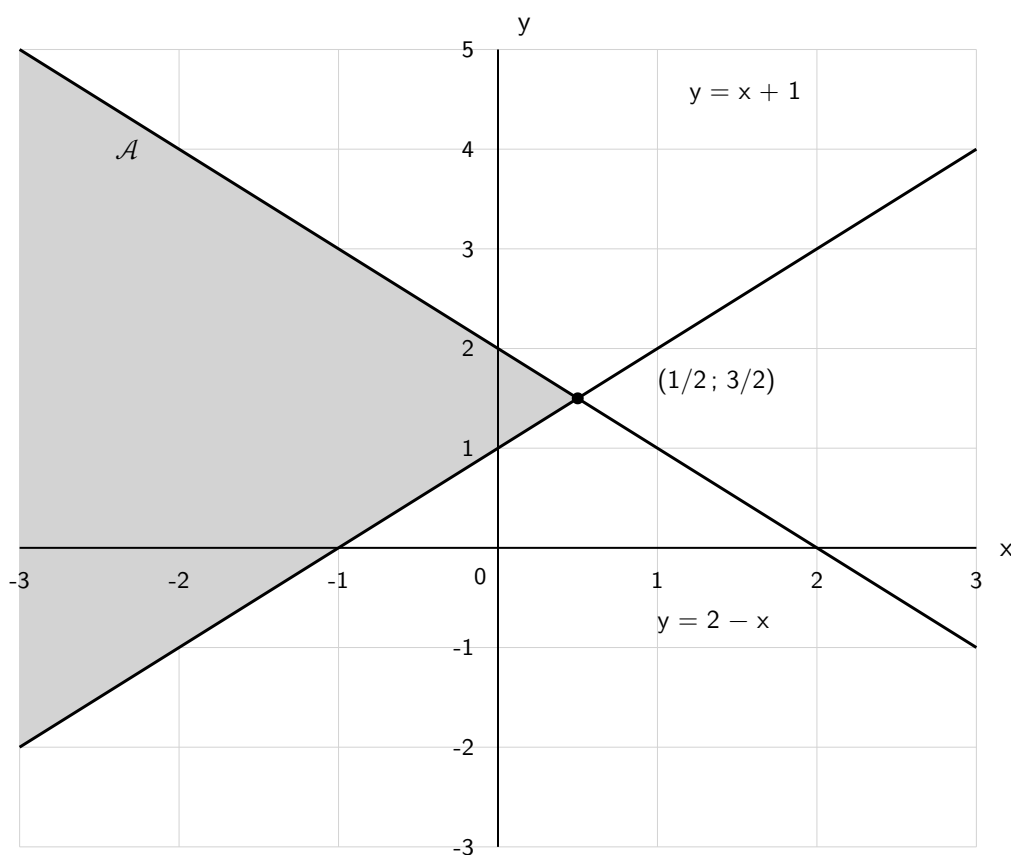
Les deux inégalités se réécrivent :

$$y \leq 2 - x, \quad y \geq x + 1.$$

Ainsi :

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 1 \leq y \leq 2 - x\}.$$

L'intervalle de valeurs possibles de y est non vide exactement lorsque $x + 1 \leq 2 - x$, c'est-à-dire $x \leq 1/2$. Les deux droites se coupent au point $(1/2, 3/2)$. La région est l'angle situé à gauche de ce point, entre les droites $y = x + 1$ et $y = 2 - x$, frontières comprises.



La partie grisée représente l'intersection de $\mathcal{A}$ avec la fenêtre du dessin ; la région se prolonge indéfiniment vers la gauche.

9. (a) Section horizontale lorsque $y \geq d$.

Pour y fixé :

$$(x, y) \in \mathcal{A} \iff x \leq a - y \text{ et } x \leq b + y \iff x \leq \min(a - y, b + y).$$

Or $y \geq d = (a - b)/2$ équivaut à $a - y \leq b + y$. Dans ce cas, le minimum est $a - y$, donc :

$$(x, y) \in \mathcal{A} \iff x \in]-\infty, a - y].$$

9. (b) Intégration de la section.

D'après 9. (a), pour $y \geq d$, l'indicatrice vaut 1 exactement lorsque $x \leq a - y$. Puisque φ est intégrable sur $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(x, y) \varphi(x) \, dx = \int_{-\infty}^{a-y} \varphi(x) \, dx = \Phi(a - y).$$

10. Section horizontale lorsque $y \leq d$.

Cette fois $y \leq (a - b)/2$ implique $b + y \leq a - y$. Les deux inégalités définissant $\mathcal{A}$ sont donc équivalentes à $x \leq b + y$.

L'intégrabilité de φ permet alors d'écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(x, y) \varphi(x) \, dx = \int_{-\infty}^{b+y} \varphi(x) \, dx = \Phi(b + y).$$

Au point $y = d$, les deux expressions coïncident puisque $a - d = b + d = c$.

11. (a) Caractère fermé de $\mathcal{A}$.

Question adaptée au programme actuel : les propriétés topologiques nécessaires ont été rappelées dans le préambule.

Les ensembles $\{(x, y) \mid x + y \leq a\}$ et $\{(x, y) \mid x - y \leq b\}$ sont des demi-plans définis par des inégalités affines larges. Ils sont fermés, selon le rappel du sujet. Leur intersection est fermée, et cette intersection est précisément $\mathcal{A}$.

Ainsi $\mathcal{A}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

11. (b) Transformation de la probabilité.

Résultat admis dans cette version adaptée : pour les normales indépendantes X, Y et la région $\mathcal{A}$ du sujet,

$$P((X, Y) \in \mathcal{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(x, y) \varphi(x) \, dx \right) \varphi(y) \, dy.$$

Cette identité remplace le résultat général sur les densités conjointes figurant dans le PDF. Elle est l'unique formule de ce type nécessaire à la suite.

Notons $p = P((X, Y) \in \mathcal{A})$. Les questions 9 et 10 donnent :

$$p = \int_{-\infty}^d \Phi(b + y) \varphi(y) \, dy + \int_d^{+\infty} \Phi(a - y) \varphi(y) \, dy.$$

Ces deux intégrales convergent absolument, car $0 \leq \Phi \leq 1$ et φ est intégrable.

Dans la seconde, on pose $y = d + z$. Alors z parcourt $[0, +\infty[$ et $a - y = a - d - z = c - z$. Elle devient :

$$\int_0^{+\infty} \Phi(c - z) \varphi(d + z) \, dz.$$

Dans la première, on pose $y = d - z$. Alors $y = -\infty$ correspond à $z = +\infty$, et $y = d$ à $z = 0$. Le signe négatif de $dy = -dz$ inverse les bornes. Puisque $b + y = b + d - z = c - z$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \Phi(c - z) \varphi(d - z) dz.$$

En additionnant :

$$p = \int_0^{+\infty} (\varphi(d + z) + \varphi(d - z)) \Phi(c - z) dz.$$

Les substitutions affines peuvent être effectuées d'abord sur des segments, puis étendues aux bornes impropres par les convergences établies.

12. Introduction d'une intégrale intérieure.

Pour $z \geq 0$ fixé, la définition de Φ et la substitution affine $s = t - z$ donnent :

$$\Phi(c - z) = \int_{-\infty}^{c-z} \varphi(s) ds = \int_{-\infty}^c \varphi(t - z) dt.$$

Le facteur $\varphi(d + z) + \varphi(d - z)$ est constant par rapport à t . En remplaçant $\Phi(c - z)$ dans 11. (b), on obtient :

$$p = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^c (\varphi(d + z) + \varphi(d - z)) \varphi(t - z) dt \right) dz.$$

Pour chaque z , l'intégrale intérieure est convergente. L'intégrale extérieure converge par 11. (b). À ce stade, aucun ordre d'intégration n'a été échangé.

Résultat admis dans cette version adaptée : pour cette expression précise,

$$p = \int_{-\infty}^c \left(\int_0^{+\infty} (\varphi(d+z) + \varphi(d-z)) \varphi(t-z) \, dz \right) dt.$$

Cette égalité particulière, déjà admise dans le PDF, permet de calculer l'intégrale intérieure en 14. Elle ne sert pas à invoquer un théorème général de changement d'ordre.

13. Identité sur les densités normales.

Posons $r = (u+v)/\sqrt{2}$ et $s = (u-v)/\sqrt{2}$. En développant les carrés :

$$r^2 + s^2 = \frac{(u+v)^2 + (u-v)^2}{2} = u^2 + v^2.$$

Par la définition de φ :

$$\varphi(r)\varphi(s) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2 + s^2}{2}\right) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{u^2 + v^2}{2}\right) = \varphi(u)\varphi(v).$$

L'identité demandée est donc vérifiée pour tous réels u, v .

14. Calcul de l'intégrale intérieure.

Pour t fixé, séparons les deux termes :

$$J_+(t) = \int_0^{+\infty} \varphi(d+z)\varphi(t-z) \, dz, \quad J_-(t) = \int_0^{+\infty} \varphi(d-z)\varphi(t-z) \, dz.$$

Ils convergent : chaque facteur $\varphi(t-z)$ est au plus $1/\sqrt{2\pi}$ et les fonctions $z \mapsto \varphi(d \pm z)$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$.

Pour $J_+(t)$, 13 avec $u = d+z$ et $v = t-z$ donne :

$$\varphi(d+z)\varphi(t-z) = \varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right) \varphi\left(\frac{d-t+2z}{\sqrt{2}}\right).$$

On pose $s = (d-t+2z)/\sqrt{2}$, donc $dz = ds/\sqrt{2}$. Le facteur indépendant de z peut être sorti de l'intégrale :

$$J_+(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right) \int_{(d-t)/\sqrt{2}}^{+\infty} \varphi(s) \, ds.$$

La symétrie de la loi normale entraîne $1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$, donc :

$$J_+(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right) \Phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right).$$

Pour $J_-(t)$, 13 avec $u = d - z$ et $v = t - z$ donne :

$$\varphi(d-z)\varphi(t-z) = \varphi\left(\frac{t+d-2z}{\sqrt{2}}\right) \varphi\left(\frac{d-t}{\sqrt{2}}\right).$$

On pose $s = (t+d-2z)/\sqrt{2}$, donc $dz = -ds/\sqrt{2}$. Lorsque z parcourt $[0, +\infty[$, s décroît de $(t+d)/\sqrt{2}$ vers $-\infty$. La parité de φ donne :

$$\begin{aligned} J_-(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) \int_{-\infty}^{(t+d)/\sqrt{2}} \varphi(s) \, ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) \Phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

En remplaçant l'intégrale intérieure de l'identité admise après 12 par $J_+(t) + J_-(t)$:

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^c \left(\varphi \left(\frac{t+d}{\sqrt{2}} \right) \Phi \left(\frac{t-d}{\sqrt{2}} \right) + \varphi \left(\frac{t-d}{\sqrt{2}} \right) \Phi \left(\frac{t+d}{\sqrt{2}} \right) \right) dt.$$

Cette intégrale converge aussi directement : chaque Φ est entre 0 et 1, et les deux densités transformées par des applications affines sont intégrables.

15. Reconnaissance d'une dérivée.

La fonction Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $\Phi' = \varphi$. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons :

$$H(t) = \Phi \left(\frac{t+d}{\sqrt{2}} \right) \Phi \left(\frac{t-d}{\sqrt{2}} \right).$$

La dérivation d'un produit et la dérivation d'une composée donnent :

$$H'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi \left(\frac{t+d}{\sqrt{2}} \right) \Phi \left(\frac{t-d}{\sqrt{2}} \right) + \varphi \left(\frac{t-d}{\sqrt{2}} \right) \Phi \left(\frac{t+d}{\sqrt{2}} \right) \right).$$

Pour tout $L < c$, le théorème fondamental sur $[L, c]$ donne $\int_L^c H'(t) dt = H(c) - H(L)$.
Lorsque $L \rightarrow -\infty$, les deux arguments de Φ tendent vers $-\infty$, donc $H(L) \rightarrow 0$.

En utilisant la convergence de l'intégrale établie en 14 :

$$p = H(c) = \Phi \left(\frac{c+d}{\sqrt{2}} \right) \Phi \left(\frac{c-d}{\sqrt{2}} \right).$$

16. Lois marginales et indépendance de W, Z .

Puisque $c+d = a$ et $c-d = b$, le résultat précédent s'écrit :

$$P(X+Y \leq a, X-Y \leq b) = \Phi \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right) \Phi \left(\frac{b}{\sqrt{2}} \right).$$

Pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, en prenant $a = \sqrt{2}s$ et $b = \sqrt{2}t$, on obtient :

$$P(W \leq s, Z \leq t) = \Phi(s)\Phi(t).$$

Pour s fixé, les événements $\{W \leq s, Z \leq m\}$, avec m entier tendant vers $+\infty$, croissent vers $\{W \leq s\}$. La continuité monotone des probabilités donne :

$$P(W \leq s) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \Phi(s)\Phi(m) = \Phi(s).$$

Le même raisonnement en laissant croître le seuil de W montre $P(Z \leq t) = \Phi(t)$. Les deux variables ont donc la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

La formule de probabilité jointe se réécrit :

$$P(W \leq s, Z \leq t) = P(W \leq s)P(Z \leq t) \quad \text{pour tous } s, t \in \mathbb{R}.$$

La caractérisation de l'indépendance par la factorisation de la fonction de répartition jointe permet de conclure que W et Z sont indépendantes. L'objectif de la partie est entièrement établi.

Troisième partie

17. (a) Décomposition du vecteur centré.

Comme $(a_1, \dots, a_n)$ est une base orthonormée, les coordonnées de x dans cette base sont ses produits scalaires avec les a_k :

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, a_k \rangle a_k.$$

Or :

$$\langle x, a_1 \rangle = \frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \bar{x}.$$

Ainsi $\langle x, a_1 \rangle a_1 = \bar{x}(1, \dots, 1)$. En retirant le terme d'indice 1 :

$$\sum_{k=2}^n \langle x, a_k \rangle a_k = x - \bar{x}(1, \dots, 1) = (x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}).$$

Géométriquement, ce vecteur est la projection orthogonale de x sur l'orthogonal de la droite engendrée par $(1, \dots, 1)$.

17. (b) Identité des sommes de carrés.

Méthode 1 — Pythagore appliqué au vecteur centré.

Les vecteurs $\langle x, a_k \rangle a_k$, pour $k = 2, \dots, n$, sont deux à deux orthogonaux. Puisque chaque a_k est de norme 1, Pythagore donne :

$$\left\| \sum_{k=2}^n \langle x, a_k \rangle a_k \right\|^2 = \sum_{k=2}^n \langle x, a_k \rangle^2.$$

La question précédente et l'expression de la norme euclidienne dans la base canonique donnent aussi :

$$\left\| \sum_{k=2}^n \langle x, a_k \rangle a_k \right\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Les deux sommes sont donc égales.

Méthode 2 — Identité de centrage et conservation de la norme.

Dans une base orthonormée,

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, a_k \rangle^2.$$

Comme $\langle x, a_1 \rangle^2 = n\bar{x}^2$:

$$\sum_{k=2}^n \langle x, a_k \rangle^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2.$$

En développant l'autre somme et en utilisant

$$\sum_i x_i = n\bar{x} :$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2.$$

L'égalité est établie. La première méthode met en évidence la projection ; la seconde fournit l'identité de centrage utilisée fréquemment dans les calculs de variance.

18. (a) Cas particulier en dimension deux.

Résultat admis dans cette version adaptée : si $X_1, \dots, X_n$ sont des normales centrées réduites mutuellement indépendantes, leurs coordonnées $Y_k = \langle X, a_k \rangle$ dans une base orthonormée sont elles aussi des normales centrées réduites mutuellement indépendantes.

Ce résultat particulier est fourni par le sujet ; il sera également utilisé en 19 pour séparer la moyenne des écarts centrés.

Prenons $n = 2$ et :

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1).$$

Ces deux vecteurs sont de norme 1 et leur produit scalaire est nul. Ils forment donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ satisfaisant la condition sur a_1 .

Leurs coordonnées aléatoires sont :

$$Y_1 = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}, \quad Y_2 = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}.$$

Le résultat admis donne leur indépendance et leurs lois $\mathcal{N}(0, 1)$. On retrouve exactement le résultat de la deuxième partie.

18. (b) Indépendance et covariance dans ce cas particulier.

Les combinaisons linéaires R_1, R_2 ont des moments d'ordre deux, puisque les X_i en ont. La bilinéarité de la covariance et l'indépendance de X_1, X_2 donnent :

$$\text{Cov}(R_1, R_2) = \beta_1 \mathbb{V}(X_1) + \beta_2 \mathbb{V}(X_2) + (\beta_1 + \beta_2) \text{Cov}(X_1, X_2) = \beta_1 + \beta_2.$$

Si R_1 et R_2 sont indépendantes, leur covariance est nulle : cela établit le sens nécessaire.

Réciproquement, supposons $\text{Cov}(R_1, R_2) = 0$. Alors $\beta_2 = -\beta_1$. La condition $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$ implique $\beta_1 \neq 0$, et :

$$R_1 = X_1 + X_2 = \sqrt{2} Y_1, \quad R_2 = \beta_1(X_1 - X_2) = \sqrt{2} \beta_1 Y_2.$$

Par 18. (a), Y_1, Y_2 sont indépendantes. Le lemme des coalitions assure donc l'indépendance de leurs transformations scalaires R_1, R_2 .

Ainsi R_1 et R_2 sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle. Cette équivalence est démontrée pour les combinaisons normales précises du sujet ; elle n'est pas invoquée pour des variables quelconques.

19. (a) Loi de la moyenne.

Méthode 1 — Stabilité par somme des normales indépendantes.

Les X_i sont mutuellement indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Leur somme suit donc $\mathcal{N}(0, n)$. Une transformation affine d'une normale est normale, avec moyenne et variance transformées. Ainsi :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right).$$

Méthode 2 — Première coordonnée dans la base orthonormée.

La définition de a_1 donne :

$$Y_1 = \langle X, a_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i = \sqrt{n} \bar{X}.$$

Le résultat admis assure $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Par transformation affine, $\bar{X} = Y_1/\sqrt{n}$ suit $\mathcal{N}(0, 1/n)$.

La première méthode est le calcul habituel de la loi d'une moyenne gaussienne ; la seconde prépare directement la décomposition qui suit.

19. (b) Expression à l'aide des Y_k .

Le calcul précédent donne :

$$\bar{X} = \frac{Y_1}{\sqrt{n}}.$$

L'identité 17. (b), appliquée à chaque réalisation $x = X(\omega)$, fournit :

$$U = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{k=2}^n \langle X, a_k \rangle^2 = \sum_{k=2}^n Y_k^2.$$

Les modifications éventuelles des variables sur un ensemble de probabilité nulle ne changent ni ces identités presque sûres, ni les lois, ni les conclusions d'indépendance.

19. (c) Indépendance et loi de U .

Le résultat admis donne l'indépendance mutuelle des Y_k . Le lemme des coalitions assure l'indépendance de $Y_1/\sqrt{n}$ et de

$$\sum_{k=2}^n Y_k^2,$$

car ces variables sont des fonctions de groupes disjoints de variables indépendantes.

Par 19. (b), $\bar{X}$ et U sont donc indépendantes.

De plus, $Y_2, \dots, Y_n$ sont $n - 1$ normales centrées réduites indépendantes. La définition de la loi χ^2 dans la première partie donne :

$$U \hookrightarrow \chi^2(n - 1).$$

On n'utilise ici aucune propriété de cette loi autre que sa définition comme somme de carrés et les résultats établis dans la première partie.

20. (a) Relation entre V et U .

Chaque variable $X_i = (Z_i - \mu)/\sigma$ suit $\mathcal{N}(0, 1)$, et les X_i sont mutuellement indépendantes, par transformation affine et le lemme des coalitions. La condition $\sigma > 0$ autorise la division.

Puisque $Z_i = \mu + \sigma X_i$, on a :

$$\bar{Z} = \mu + \sigma \bar{X}, \quad Z_i - \bar{Z} = \sigma(X_i - \bar{X}).$$

En élevant au carré et en sommant :

$$V = \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sigma^2 U.$$

20. (b) Estimateur sans biais de σ^2 .

Méthode 1 — Espérance de la somme de carrés obtenue en 19.

La variable $V/(n-1)$ est une fonction de l'échantillon et de sa taille ; elle ne dépend pas des paramètres inconnus μ, σ^2 . C'est donc un estimateur de σ^2 .

Par 19. (c), U suit la loi $\chi^2(n-1)$. La question 1. (a) établit que son espérance existe et vaut $n-1$. Comme $V = \sigma^2 U$ et $n \geq 2$:

$$E\left(\frac{V}{n-1}\right) = \frac{\sigma^2}{n-1} E(U) = \sigma^2.$$

L'estimateur est donc sans biais, pour tous $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

Méthode 2 — Développement de la somme centrée.

Pour chaque i , $Z_i - \bar{Z} = (Z_i - \mu) - (\bar{Z} - \mu)$. En développant et en utilisant

$$\sum_i (Z_i - \mu) = n(\bar{Z} - \mu) :$$

$$V = \sum_{i=1}^n (Z_i - \mu)^2 - n(\bar{Z} - \mu)^2.$$

Les moments considérés existent. On a $E((Z_i - \mu)^2) = \sigma^2$. Par indépendance, $E(\bar{Z}) = \mu$ et $V(\bar{Z}) = \sigma^2/n$. Donc :

$$E(V) = n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n} = (n-1)\sigma^2.$$

Il en résulte encore $E(V/(n-1)) = \sigma^2$. Cette seconde démonstration établit le caractère sans biais sans utiliser la loi de U ; elle montre pourquoi le facteur correctif est $n-1$.

20. (c) Loi du quotient.

Le numérateur et le dénominateur se réécrivent, grâce à 20. (a), sous la forme :

$$\bar{Z} - \mu = \sigma \bar{X}, \quad \sqrt{\frac{V}{n(n-1)}} = \sigma \sqrt{\frac{U}{n(n-1)}},$$

car $\sigma > 0$. Le quotient est défini puisque $V > 0$ selon la convention du sujet. En simplifiant :

$$\frac{\bar{Z} - \mu}{\sqrt{V/(n(n-1))}} = \frac{\sqrt{n} \bar{X}}{\sqrt{U/(n-1)}} = \frac{Y_1}{\sqrt{\left(\sum_{k=2}^n Y_k^2\right)/(n-1)}}.$$

Le numérateur Y_1 suit $\mathcal{N}(0, 1)$. Les $Y_2, \dots, Y_n$ sont des normales centrées réduites indépendantes, mutuellement et de Y_1 . Le quotient est donc exactement de la forme définissant $\mathcal{T}(n-1)$ dans la première partie :

$$\frac{\bar{Z} - \mu}{\sqrt{V/(n(n-1))}} \hookrightarrow \mathcal{T}(n-1).$$

Cette identification reste valable pour $n = 2$: aucun moment de cette loi n'est requis. Elle résulte d'une identité exacte, et non d'un remplacement asymptotique de σ par un estimateur.

21. Intervalle de confiance exact de μ .

D'après 4, le réel $t = t_{n-1, \alpha}$ existe, est unique et est strictement positif. Posons $D = \sqrt{V/(n(n-1))} > 0$. Le résultat de 20. (c) donne, pour tous $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$:

$$P\left(\left|\frac{\bar{Z} - \mu}{D}\right| \leq t\right) = 1 - \alpha.$$

En multipliant par $D > 0$, puis en isolant μ , on obtient les équivalences d'événements :

$$\left|\frac{\bar{Z} - \mu}{D}\right| \leq t \iff |\bar{Z} - \mu| \leq tD \iff \bar{Z} - tD \leq \mu \leq \bar{Z} + tD.$$

Un intervalle de confiance de μ est donc :

$$I_\alpha = \left[\bar{Z} - t_{n-1, \alpha} \sqrt{\frac{V}{n(n-1)}}, \bar{Z} + t_{n-1, \alpha} \sqrt{\frac{V}{n(n-1)}} \right].$$

Ses bornes ne font intervenir que l'échantillon, n et le seuil tabulé. Sa probabilité de couverture est exactement $1 - \alpha$, pour chaque taille $n \geq 2$ et chaque couple de paramètres autorisé. Il s'agit donc d'un intervalle exact, non asymptotique.

Relevé des adaptations

- 1. (c) et 6. (d) : les figures sont retranscrites en SVG dans l'énoncé. Pour 1. (c), les neuf positions sont mesurées sur l'original après calibration des axes ; les ordonnées sont des observations numériques approchées. Pour 6. (d), les 79 points sont calculés à partir de la récurrence exacte et contrôlés visuellement sur l'original.
- 2. (c), 19. (c) et 20. (c) : les notations de lois non usuelles sont conservées avec leurs définitions explicites dans les préambules. Aucune propriété générale des lois du khi-deux ou de Student n'est supposée connue ; les propriétés utilisées sont démontrées ou admises précisément dans le sujet.
- 8 : le dessin demandé dans le corrigé est intégré en SVG, avec les frontières et leur intersection calculées exactement.
- 11. (a) : les propriétés de fermeture des demi-plans et des intersections finies sont rappelées dans l'énoncé pour éviter tout recours implicite à la topologie générale.
- 11. (b) : le théorème général sur les probabilités de régions du plan à partir des densités de deux variables indépendantes est remplacé, dans le préambule, par la seule identité particulière nécessaire pour les normales et la région $\mathcal{A}$ du sujet.
- 12 : l'égalité particulière entre les deux ordres d'intégration est conservée comme résultat admis, sans théorème général d'intégration multiple.
- 18. (a) et 19. (c) : le résultat sur les coordonnées normales indépendantes dans la base orthonormée est conservé comme admission précise du préambule, sans supposer connue une théorie générale supplémentaire.

- 1. (b), 1. (c) et 6. (c), formulaire Python : les descriptions de tableaux NumPy sont précisées pour distinguer un tableau à une dimension d'une matrice ligne. Le paramètre `a` de `rd.gamma` est explicité comme une échelle, et son taux vaut $1/a$. Les codes du sujet sont déjà en Python et leur comportement mathématique est conservé.