



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques

2011

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à p lignes et q colonnes, et $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ cet ensemble lorsque $p = q$. On note I_p la matrice identité.

Dans tout le problème :

- on identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^p$ aux colonnes de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$;
- tA désigne la transposée de A et $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres réelles, éventuellement vide;
- pour $A = (a_{k,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on pose

$$N(A) = \max_{1 \leq k \leq p} \sum_{j=1}^p |a_{k,j}|$$

et

$$\rho(A) = \inf_{m \geq 1} N(A^m)^{1/m}.$$

L'ensemble dont on prend l'infimum est non vide, minoré par 0, et contient $N(A)$; ainsi $\rho(A)$ est un réel bien défini, compris entre 0 et $N(A)$. La définition vaut aussi lorsque une puissance de A est nulle, avec $0^{1/m} = 0$;

- pour des vecteurs $X = (x_k)$ et $Y = (y_k)$ de $\mathbb{R}^p$, $X < Y$ signifie $x_k < y_k$ pour tout k , et $X \leq Y$ signifie $x_k \leq y_k$ pour tout k . On note $X \geq 0$ si toutes ses coordonnées sont positives ou nulles, et $X > 0$ si elles sont toutes strictement positives;
- le vecteur nul de $\mathbb{R}^p$ est noté 0 ;
- $|X|$ désigne le vecteur de coordonnées $|x_k|$;
- une matrice est positive si tous ses coefficients sont positifs ou nuls, et strictement positive si tous sont strictement positifs;

- une suite de matrices $M_n = (m_{k,j}(n))$ converge vers $M = (m_{k,j})$ lorsque $m_{k,j}(n) \rightarrow m_{k,j}$ pour tout couple d'indices. On admet que les sommes, produits et multiplications par un scalaire fixe respectent cette convergence.

On pourra utiliser les propriétés suivantes, pour des matrices carrées réelles de même ordre et un réel t :

$$N(C + D) \leq N(C) + N(D), \quad N(CD) \leq N(C)N(D), \quad N(tC) = |t|N(C),$$

$$N(I_p) = 1.$$

Le problème étudie les relations entre la croissance des puissances d'une matrice, ses valeurs propres réelles et la limite éventuelle de ses puissances. Les résultats sur les matrices positives interviennent notamment dans l'étude des processus markoviens et de l'équilibre d'une économie.

Partie I — Deux exemples

1. Exemple 1. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1.a) Calculer J^2 et déterminer les valeurs propres de J .
- 1.b) Exprimer A en fonction de I_3 et de J . En déduire $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et calculer $\rho(A)$.
- 1.c) Exprimer A^n en fonction de I_3, J, n pour $n \geq 1$. En déduire $N(A^n)$.
- 1.d) Montrer que (A^n) converge vers une matrice M à expliciter. Préciser son rang et montrer que M est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

2. Exemple 2. Soit la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.a) Déterminer $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$. Justifier que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Calculer $N(A)$ et $\rho(A)$.

On pourra utiliser le bloc $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, vérifier ${}^tBB = B{}^tB = 2I_2$ et en déduire des

bornes sur les sommes des valeurs absolues des coefficients des lignes de B^m .

2.b) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe de la droite $\text{Vect}(1, 0, 0)$ et du plan $\{(0, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Décrire l'action de A sur chacun de ces deux sous-espaces stables et exprimer son bloc sur le plan sous la forme

$$\sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}.$$

2.c) Expliciter A^n pour $n \geq 1$. Comparer $\rho(A^n)$ et $\rho(A)^n$.

2.d) Montrer que, pour $n \geq 1$,

$$N(A^n) = 2^{n/2} (|\cos(n\pi/4)| + |\sin(n\pi/4)|).$$

Comparer $\lim_{n \rightarrow +\infty} N(A^n)^{1/n}$ et $\rho(A)$.

Partie II — Un critère de convergence vers la matrice nulle

On considère $A = (a_{k,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Lorsqu'une valeur propre λ et un vecteur propre X sont utilisés, ils sont réels, et $X \neq 0$.

3. Soit k_0 tel que $0 < |x_{k_0}| = \max_{1 \leq j \leq p} |x_j|$, où $AX = \lambda X$.

Établir

$$|\lambda| \leq \sum_{j=1}^p |a_{k_0,j}| \leq N(A).$$

En appliquant ce résultat aux puissances de A , en déduire $|\lambda| \leq \rho(A) \leq N(A)$, ainsi que $0 \leq \rho(A) \leq N(A)$.

4. Soit $n \geq 1$.

4.a) Montrer que, si λ est une valeur propre réelle de A , λ^n est une valeur propre de A^n . Établir aussi $\rho(A^n) \geq \rho(A)^n$ directement à partir de la définition de ρ .

4.b) Pour un entier $m \geq 1$ fixé, montrer

$$\rho(A^n)^{1/n} \leq N(A^m)^{1/m}.$$

On pourra écrire $nk = qm + r$, avec $0 \leq r < m$, et utiliser

$N(A^{nk}) \leq N(A^m)^q \max_{0 \leq j < m} N(A^j)$ avant de faire tendre k vers l'infini. Traiter séparément le cas $N(A^m) = 0$.

4.c) En déduire $\rho(A^n) \leq \rho(A)^n$.

4.d) En déduire $\rho(A^n) = \rho(A)^n$, puis établir $0 \leq \rho(A) \leq N(A)^{1/n}$.

5. On suppose que A^n converge vers la matrice nulle. Montrer que $N(A^n) \rightarrow 0$. En déduire $\rho(A) < 1$.

6. Dans cette question, on suppose que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $A_\varepsilon = A/(\rho(A) + \varepsilon)$.

6.a) Montrer que, si $\rho(A) < 1$, alors A^n converge vers la matrice nulle.

6.b) Montrer que $\rho(A_\varepsilon) < 1$. En déduire qu'il existe n_0 tel que $N(A_\varepsilon^n) \leq 1$ pour $n \geq n_0$.

6.c) Établir $N(A^n) = (\rho(A) + \varepsilon)^n N(A_\varepsilon^n)$ pour $n \geq 1$.

6.d) Établir, pour $n \geq n_0$,

$$0 \leq N(A^n)^{1/n} - \rho(A) \leq \varepsilon.$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} N(A^n)^{1/n} = \rho(A)$.

Dans la suite, on admet que, pour toute matrice réelle carrée C , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N(C^n)^{1/n} = \rho(C),$$

et que $C^n \rightarrow 0$ si et seulement si $\rho(C) < 1$.

Partie III — Matrices positives : relations entre $\rho(A)$ et les coefficients de A

Ici, $A = (a_{k,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est positive et non nulle.

7. Soit $B = (b_{k,j})$ positive, avec $b_{k,j} \leq a_{k,j}$ pour tous k, j . Montrer que $N(B^n) \leq N(A^n)$ pour tout $n \geq 1$. En déduire $\rho(B) \leq \rho(A)$.

8. On suppose qu'il existe une constante s telle que

$$\sum_{j=1}^p a_{k,j} = s$$

pour toute ligne k . Établir $\rho(A) = s$.

9. On pose

$$\sigma = \min_{1 \leq k \leq p} \sum_{j=1}^p a_{k,j}.$$

À l'aide de 7 et 8, établir $\sigma \leq \rho(A) \leq N(A)$.

10. Soit $X = {}^t(x_1, \dots, x_p) > 0$ et soit Δ_X la matrice diagonale de coefficients diagonaux $x_1, \dots, x_p$.

10.a) Justifier l'existence de Δ_X^{-1} et calculer $\Delta_X^{-1} A \Delta_X$.

10.b) Établir

$$\min_{1 \leq k \leq p} \frac{\sum_{j=1}^p a_{k,j} x_j}{x_k} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq k \leq p} \frac{\sum_{j=1}^p a_{k,j} x_j}{x_k}.$$

10.c) En déduire que, s'il existe $\beta \geq 0$ tel que $\beta X < AX$, alors $\beta < \rho(A)$.

Partie IV — Matrices strictement positives

On admet le résultat particulier suivant : pour toute matrice réelle strictement positive A , il existe une valeur propre réelle λ de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$, et un vecteur propre réel non nul X associé à λ .

Dans cette partie, A est strictement positive ; on choisit λ et X satisfaisant ce résultat.

11.a) Montrer que $\rho(A) > 0$.

11.b) Établir $|AX| \leq A|X|$. En déduire $\rho(A)|X| \leq A|X|$.

11.c) On pose $Z = A|X|$. Montrer que $Z > 0$.

11.d) On pose $Y = A|X| - \rho(A)|X|$ et on suppose $Y \neq 0$. Établir $AY > 0$ et $\rho(A)Z < AZ$.

11.e) En déduire que $\rho(A)$ est une valeur propre de A et que $|X|$ est un vecteur propre associé.

12.a) Soient z_1, z_2 deux réels non nuls tels que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Montrer qu'ils ont le même signe.

12.b) Soient $p \geq 2$ et $z_1, \dots, z_p$ des réels non nuls tels que

$$\left| \sum_{j=1}^p z_j \right| = \sum_{j=1}^p |z_j|.$$

Montrer qu'il existe $\eta \in \{-1, 1\}$ tel que $z_j = \eta |z_j|$ pour tout j .

13. Montrer que $|X| > 0$ et que $|AX| = A|X|$. En déduire qu'il existe $\eta \in \{-1, 1\}$ tel que $X = \eta |X|$.

14.a) Montrer que $\rho(A)$ est l'unique valeur propre réelle de A dont la valeur absolue est $\rho(A)$.

14.b) Supposons qu'il existe deux vecteurs propres réels $U = (u_k)$ et $V = (v_k)$, linéairement indépendants, associés à $\rho(A)$. En considérant $u_1 V - v_1 U$, aboutir à une contradiction. En déduire la dimension de l'espace propre associé à $\rho(A)$.

15.a) Montrer que A et ${}^t A$ ont les mêmes valeurs propres réelles. En déduire $\rho({}^t A) = \rho(A)$.

15.b) Soit Z un vecteur propre de ${}^t A$ associé à $\rho(A)$. Justifier que ses coordonnées sont toutes strictement positives ou toutes strictement négatives.

15.c) Soit $U > 0$ un vecteur propre de A associé à $\rho(A)$. On pose $Y = Z / ({}^t Z U)$. Justifier que ce quotient est défini, puis établir $Y > 0$, ${}^t A Y = \rho(A) Y$ et ${}^t Y U = 1$.

16. Soit $M = U {}^t Y$, avec les vecteurs de 15.c.

16.a) Montrer que M est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^p$, et préciser son image et son noyau.

16.b) Établir, pour $n \geq 1$,

$$\left(\frac{A}{\rho(A)} - M\right)^n = \left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^n - M.$$

17. Soit μ une valeur propre réelle non nulle de $A - \rho(A)M$ et W un vecteur propre réel associé.

17.a) Montrer que $MW = 0$. En déduire que μ est une valeur propre de A et que $|\mu| \leq \rho(A)$.

17.b) En raisonnant par l'absurde et en utilisant 14.a, montrer que $|\mu| < \rho(A)$.

17.c) Établir, par un argument réel portant sur les puissances, que

$$\rho(A - \rho(A)M) < \rho(A).$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A/\rho(A))^n = M$.

Indication : on pourra poser $\Delta_U = \text{diag}(u_1, \dots, u_p)$, $T = \Delta_U^{-1} A \Delta_U / \rho(A)$, ${}^t\pi = {}^tY \Delta_U$, $\mathbf{1} = {}^t(1, \dots, 1)$ et $\Pi = \mathbf{1} {}^t\pi$. Vérifier que les sommes des lignes de T valent 1, puis utiliser $\delta = \min_{k,j} T_{k,j} / \pi_j$ et la matrice positive $R = T - \delta \Pi$.

Partie V — Un algorithme de calcul de $\rho(A)$ et d'un vecteur propre associé

On munit $\mathbb{R}^p$ du produit scalaire canonique et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Soit A réelle, strictement positive et symétrique, possédant p valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ telles que $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_p|$.

Soit $V_0 > 0$ et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de vecteurs propres telle que $Ae_k = \lambda_k e_k$. Une suite de vecteurs converge vers L si $\|X_n - L\| \rightarrow 0$.

On définit $V_{n+1} = AV_n$ pour tout $n \geq 0$.

18.a) Si

$$V_0 = \sum_{k=1}^p s_k e_k,$$

montrer que $s_1 \neq 0$.

18.b) Établir $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|V_{n+1}\|/\|V_n\| = \lambda_1$.

18.c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n/\|V_n\|$, en distinguant les deux signes possibles de s_1 .

19. Les vecteurs sont représentés par des tableaux NumPy de longueur p , les matrices par des tableaux de forme (p, p) . On dispose des fonctions suivantes :

Python

```
import numpy as np

def norme(V):
    return np.sqrt(np.dot(V, V))

def prodmat(A, V):
    return np.dot(A, V)

def affecte(V):
    return np.array(V)
```

La fonction `norme` calcule la norme euclidienne ; `prodmat(A, V)` renvoie AV ; `affecte(V)` renvoie une copie du tableau V .

19.a) Écrire une fonction `puissance(A, n, V0)` qui renvoie V_n pour un entier $n \geq 1$.

19.b) Écrire une fonction `vectpropre(A, n, V0)` qui renvoie l'approximation d'un vecteur propre associé à λ_1 obtenue avec l'indice n , puis une fonction `valpropre(A, n, V0)` qui renvoie une approximation de λ_1 obtenue avec ce même indice. Expliquer les étapes des fonctions proposées.