



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques

2011

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé — HEC-ESCP, mathématiques, 2011

Le corrigé utilise exclusivement les matrices, vecteurs et scalaires réels du sujet adapté. La quantité $\rho(A)$ est définie par $\inf_{m \geq 1} N(A^m)^{1/m}$; sa relation avec les valeurs propres et la croissance des puissances est établie au fil du problème.

Propriétés préliminaires de N

La positivité de N et l'équivalence $N(C) = 0 \iff C = 0$ découlent de sa définition. L'inégalité triangulaire pour chaque coefficient, puis pour chaque somme de ligne, donne $N(C + D) \leq N(C) + N(D)$. La définition donne aussi $N(tC) = |t|N(C)$ et $N(I_p) = 1$.

Pour le produit, dans chaque ligne k ,

$$\sum_j |(CD)_{k,j}| \leq \sum_j \sum_\ell |c_{k,\ell}| |d_{\ell,j}| = \sum_\ell |c_{k,\ell}| \sum_j |d_{\ell,j}| \leq N(D) \sum_\ell |c_{k,\ell}|.$$

En prenant le maximum, $N(CD) \leq N(C)N(D)$. Par récurrence, $N(C^q) \leq N(C)^q$ pour $q \geq 0$, en incluant $q = 0$.

On utilisera également une propriété élémentaire de l'infimum : si des réels $b_m \geq 0$ ont pour infimum b et si $a > 0$, alors $\inf_m b_m^a = b^a$. En effet, tous les b_m^a sont au moins b^a ; pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe m tel que $b_m < b + \varepsilon$, donc l'infimum des puissances est au plus $(b + \varepsilon)^a$. La continuité de la puissance sur $[0, +\infty)$ conclut lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Partie I — Deux exemples

1.a) Chaque coefficient de J^2 est la somme de trois unités, donc $J^2 = 3J$. Si $JX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, cette relation donne $\lambda^2 X = 3\lambda X$, donc $\lambda \in \{0, 3\}$.

Posons $E = {}^t(1, 1, 1)$. Pour $X = {}^t(x_1, x_2, x_3)$,

$$JX = (x_1 + x_2 + x_3)E.$$

Ainsi $E_3(J) = \text{Vect}(E)$ et $E_0(J) = \{X \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Le premier espace a dimension 1, le second dimension 2, et les deux valeurs sont effectivement propres.

Donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(J) = \{0, 3\}$; la somme des espaces propres est $\mathbb{R}^3$.

1.b) On a $A = (J - I_3)/2$. Sur la droite $\text{Vect}(E)$, A agit par $(3 - 1)/2 = 1$; sur le noyau de J , il agit par $(0 - 1)/2 = -1/2$. Ces espaces forment une somme directe de dimension 3, donc

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -1/2\}.$$

Pour calculer $\rho(A)$ avec la définition réelle, on observe que $N(A) = 1$, donc $\rho(A) \leq 1$.

Comme $AE = E$, une récurrence donne $A^m E = E$ pour tout $m \geq 1$. Chaque ligne de A^m a donc somme 1, et la somme des valeurs absolues des coefficients de cette ligne est au moins 1. Ainsi $N(A^m) \geq 1$ pour tout m , donc $\rho(A) \geq 1$. On conclut à $\rho(A) = 1$.

1.c) Méthode 1 — Deux projecteurs complémentaires

Posons $P = J/3$ et $Q = I_3 - P$. Comme $J^2 = 3J$, on a $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ et $PQ = QP = 0$. L'égalité de 1.b devient $A = P - \frac{1}{2}Q$. Par récurrence, les produits croisés étant nuls,

$$A^n = P + \left(-\frac{1}{2}\right)^n Q = \left(-\frac{1}{2}\right)^n I_3 + \frac{1 - (-1/2)^n}{3} J.$$

Méthode 2 — Binôme pour des matrices qui commutent

Les matrices J et I_3 commutent. De $J^2 = 3J$, on déduit $J^k = 3^{k-1}J$ pour $k \geq 1$. Le binôme donne

$$A^n = \frac{1}{2^n} \left((-1)^n I_3 + \frac{J}{3} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^k \right).$$

La somme vaut $(3 - 1)^n - (-1)^n = 2^n - (-1)^n$, donc on retrouve la même expression. La première méthode utilise la décomposition en deux sous-espaces propres; la seconde exploite directement la relation algébrique satisfaite par J .

Pour le calcul de N , posons $q_n = (-1/2)^n$. Les coefficients diagonaux de A^n valent $(1 + 2q_n)/3$ et les autres $(1 - q_n)/3$. Pour $n \geq 1$, $-1/2 \leq q_n \leq 1/4$, donc tous ces coefficients sont positifs ou nuls. Chaque ligne a somme

$$\frac{1+2q_n}{3} + 2\frac{1-q_n}{3} = 1.$$

Ainsi $N(A^n) = 1$ pour tout $n \geq 1$.

1.d) Comme $(-1/2)^n \rightarrow 0$, la formule de 1.c donne $A^n \rightarrow M = J/3$. Pour tout X ,

$$MX = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}E.$$

Son image est la droite $\text{Vect}(E)$, donc son rang est 1. De plus $M^2 = J^2/9 = J/3 = M$; c'est la matrice d'un projecteur. Son noyau est le plan $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Comme M est symétrique, ce projecteur est même la projection orthogonale sur $\text{Vect}(E)$ pour le produit scalaire canonique.

2.a) Question adaptée au programme actuel : l'exemple est donné par une matrice réelle à un bloc de dimension 2.

Notons $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour un vecteur propre ${}^t(t, x, y)$ de A associé à un réel λ , le système est

$$(1 - \lambda)t = 0, \quad (1 - \lambda)x - y = 0, \quad x + (1 - \lambda)y = 0.$$

Les deux dernières équations donnent $((1 - \lambda)^2 + 1)x = 0$. Le coefficient est strictement positif pour tout réel λ , donc $x = 0$ puis $y = 0$. Un vecteur propre non nul exige alors $t \neq 0$ et $\lambda = 1$. Ainsi

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}, \quad E_1(A) = \text{Vect}(1, 0, 0).$$

La somme des dimensions des espaces propres réels vaut $1 < 3$, donc A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. La définition donne $N(A) = 2$.

Pour calculer $\rho(A)$, un produit direct donne $B^t B = {}^t B B = 2I_2$. Par récurrence,

$${}^t(B^m(B^m)) = 2^m I_2.$$

Chaque ligne de B^m a donc norme euclidienne $2^{m/2}$. Pour deux réels a, b , l'inégalité triangulaire et Cauchy-Schwarz donnent

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b| \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Comme A^m est diagonale par blocs 1, B^m , et $2^{m/2} \geq 1$,

$$2^{m/2} \leq N(A^m) \leq \sqrt{2} 2^{m/2}.$$

Ainsi toutes les quantités $N(A^m)^{1/m}$ sont au moins $\sqrt{2}$, et elles sont majorées par $\sqrt{2} 2^{1/(2m)}$, qui tend vers $\sqrt{2}$. Leur infimum vaut donc $\rho(A) = \sqrt{2}$. L'unique valeur propre réelle ne suffit pas ici à décrire la croissance des puissances ; la définition de ρ conserve cette croissance.

2.b) Question adaptée au programme actuel : on remplace une base propre par une base adaptée à deux sous-espaces réels stables.

La droite $D = \text{Vect}(1, 0, 0)$ est stable et A y est l'identité. Le plan $F = \{(0, x, y)\}$ est stable puisque

$${}^t(A(0, x, y)) = {}^t(0, x - y, x + y).$$

La base canonique (e_1, e_2, e_3) est adaptée à $\mathbb{R}^3 = D \oplus F$. Dans la base (e_2, e_3) de F , la matrice est B . Comme $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$,

$$B = \sqrt{2}R_{\pi/4}, \quad R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Cette écriture décrit une multiplication des longueurs par $\sqrt{2}$ et une rotation dans le plan. Les formules d'addition du sinus et du cosinus, par multiplication des quatre coefficients, donnent $R_{\theta}R_{\varphi} = R_{\theta+\varphi}$. Aucun résultat supplémentaire sur les matrices de rotation n'est supposé.

2.c) Question adaptée au programme actuel. L'identité de 2.b et une récurrence donnent

$B^n = 2^{n/2} R_{n\pi/4}$. Donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n/2} \cos(n\pi/4) & -2^{n/2} \sin(n\pi/4) \\ 0 & 2^{n/2} \sin(n\pi/4) & 2^{n/2} \cos(n\pi/4) \end{pmatrix}.$$

Pour calculer $\rho(A^n)$ sans anticiper la partie II, appliquons les bornes de 2.a aux puissances A^{nk} :

$$2^{nk/2} \leq N((A^n)^k) \leq \sqrt{2} 2^{nk/2}.$$

Après extraction de la racine k -ième, puis passage à l'infimum, on obtient $\rho(A^n) = 2^{n/2} = \rho(A)^n$.

2.d) Question adaptée au programme actuel. Les deux dernières lignes de la matrice précédente ont la même somme de valeurs absolues,

$$2^{n/2} (|\cos(n\pi/4)| + |\sin(n\pi/4)|).$$

Pour tout réel t , l'identité $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ donne $1 \leq |\cos t| + |\sin t| \leq \sqrt{2}$. La somme est donc au moins 1 après multiplication par $2^{n/2}$; elle domine celle de la première ligne. Ainsi la formule demandée pour $N(A^n)$ est vérifiée.

En particulier, elle vaut $2^{n/2}$ pour n pair et $2^{(n+1)/2}$ pour n impair. Dans tous les cas,

$$\sqrt{2} \leq N(A^n)^{1/n} \leq \sqrt{2} 2^{1/(2n)}.$$

Le théorème d'encadrement donne $N(A^n)^{1/n} \rightarrow \sqrt{2} = \rho(A)$.

Partie II — Un critère de convergence vers la matrice nulle

3. Question adaptée au programme actuel : λ, X sont réels et la définition de ρ porte sur les puissances.

Comme $X \neq 0$, il existe une coordonnée de valeur absolue maximale strictement positive. Pour l'indice k_0 choisi, l'équation $AX = \lambda X$ donne

$$|\lambda| |x_{k_0}| = \left| \sum_j a_{k_0,j} x_j \right| \leq \sum_j |a_{k_0,j}| |x_j| \leq |x_{k_0}| \sum_j |a_{k_0,j}|.$$

On divise par $|x_{k_0}| > 0$:

$$|\lambda| \leq \sum_j |a_{k_0,j}| \leq N(A).$$

Une récurrence donne $A^m X = \lambda^m X$. Le même argument appliqué à A^m fournit $|\lambda|^m \leq N(A^m)$, soit $|\lambda| \leq N(A^m)^{1/m}$ pour tout $m \geq 1$. En prenant l'infimum,

$$|\lambda| \leq \rho(A) \leq N(A).$$

Enfin, $\rho(A) \geq 0$ par sa définition. La borne $0 \leq \rho(A) \leq N(A)$ vaut même si A n'a aucune valeur propre réelle ; l'argument concernant λ est conditionné à son existence.

4.a) Question adaptée au programme actuel : le résultat sur ρ se prouve directement par son infimum.

Si $AX = \lambda X$ et $X \neq 0$, une récurrence donne $A^n X = \lambda^n X$. Donc λ^n est une valeur propre réelle de A^n .

La définition et la propriété des infimums rappelée au début donnent

$$\rho(A^n)^{1/n} = \inf_{k \geq 1} N(A^{nk})^{1/(nk)}.$$

Les indices nk forment une partie des entiers positifs ; l'infimum sur cette partie est au moins l'infimum sur tous les indices. Ainsi $\rho(A^n)^{1/n} \geq \rho(A)$ et $\rho(A^n) \geq \rho(A)^n$.

4.b) Question adaptée au programme actuel : on utilise la division euclidienne des exposants.

Fixons $m \geq 1$ et posons $a = N(A^m)$. Si $a = 0$, $A^m = 0$; pour $nk \geq m$,

$A^{nk} = A^{nk-m} A^m = 0$. La matrice A^n possède donc une puissance nulle et $\rho(A^n) = 0$.

L'inégalité demandée est vraie, ses deux membres étant nuls.

Supposons maintenant $a > 0$ et posons $C_m = \max_{0 \leq j < m} N(A^j)$. C'est une constante finie, avec $C_m \geq N(I_p) = 1$. Écrivons $nk = qm + r$, où $0 \leq r < m$. Par sous-multiplicativité,

$$N(A^{nk}) \leq N((A^m)^q)N(A^r) \leq a^q C_m.$$

La définition de $\rho(A^n)$ donne alors, pour tout k ,

$$\rho(A^n)^{1/n} \leq N(A^{nk})^{1/(nk)} \leq a^{q/(nk)} C_m^{1/(nk)}.$$

Comme $q/(nk) = (nk - r)/(mnk) \rightarrow 1/m$ et $C_m^{1/(nk)} \rightarrow 1$, le membre de droite tend vers $a^{1/m}$. Le membre de gauche est fixe ; en passant à la limite, on obtient

$$\rho(A^n)^{1/n} \leq N(A^m)^{1/m}.$$

4.c) Question adaptée au programme actuel. La borne de 4.b vaut pour tout $m \geq 1$, donc $\rho(A^n)^{1/n}$ est un minorant de l'ensemble définissant $\rho(A)$. Ainsi $\rho(A^n)^{1/n} \leq \rho(A)$, puis $\rho(A^n) \leq \rho(A)^n$.

4.d) Les deux inégalités de 4.a et 4.c donnent $\rho(A^n) = \rho(A)^n$. Comme l'infimum définissant $\rho(A^n)$ est au plus sa valeur à l'indice 1, $\rho(A^n) \leq N(A^n)$. En extrayant une racine n -ième, on obtient

$$0 \leq \rho(A) \leq N(A^n)^{1/n}.$$

Ce raisonnement est valable y compris si une puissance est nulle.

5. La convergence de A^n vers 0 signifie que chaque coefficient tend vers 0. Pour tout n ,

$$0 \leq N(A^n) \leq \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^p |(A^n)_{k,j}|.$$

La somme est finie et tous ses termes tendent vers 0 ; par encadrement, $N(A^n) \rightarrow 0$. Il existe alors $m \geq 1$ tel que $N(A^m) < 1$. La question 4.d, ou directement la définition, donne $\rho(A) \leq N(A^m)^{1/m} < 1$. La stricte inégalité est ainsi justifiée.

6.a) Question adaptée au programme actuel : la diagonalisation est réelle.

Il existe une matrice réelle inversible P et une matrice diagonale réelle

$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ telles que $A = PDP^{-1}$. D'après 3, $|\lambda_j| \leq \rho(A) < 1$ pour tout j . Ainsi $\lambda_j^n \rightarrow 0$ et $D^n \rightarrow 0$. L'égalité $A^n = PD^nP^{-1}$ et les règles de convergence des produits par des matrices fixes donnent $A^n \rightarrow 0$.

6.b) Pour tout réel t , l'identité $(tA)^m = t^m A^m$ et l'homogénéité de N donnent

$$N((tA)^m)^{1/m} = |t|N(A^m)^{1/m}.$$

En prenant l'infimum, $\rho(tA) = |t|\rho(A)$; pour $t = 0$, cette égalité se vérifie directement.

Comme $\rho(A) + \varepsilon > 0$,

$$\rho(A_\varepsilon) = \frac{\rho(A)}{\rho(A) + \varepsilon} < 1.$$

La matrice A_ε reste diagonalisable sur $\mathbb{R}$ dans la même base. La question 6.a donne

$A_\varepsilon^n \rightarrow 0$; le premier argument de 5 donne $N(A_\varepsilon^n) \rightarrow 0$. Il existe donc n_0 tel que $N(A_\varepsilon^n) \leq 1$ pour tout $n \geq n_0$.

6.c) Par définition, $A = (\rho(A) + \varepsilon)A_\varepsilon$. Le scalaire étant positif,

$$A^n = (\rho(A) + \varepsilon)^n A_\varepsilon^n,$$

puis l'homogénéité de N donne exactement $N(A^n) = (\rho(A) + \varepsilon)^n N(A_\varepsilon^n)$.

6.d) Pour $n \geq n_0$, les questions 6.b et 6.c donnent $N(A^n)^{1/n} \leq \rho(A) + \varepsilon$. La question 4.d donne la borne inférieure $N(A^n)^{1/n} \geq \rho(A)$. Ainsi

$$0 \leq N(A^n)^{1/n} - \rho(A) \leq \varepsilon.$$

Cette propriété est obtenue pour tout $\varepsilon > 0$, avec un rang n_0 qui peut dépendre de ε .

C'est la définition de la convergence de $N(A^n)^{1/n}$ vers $\rho(A)$.

Résultats utilisés dans la suite

Résultats admis dans cette version adaptée : pour toute matrice carrée réelle C ,

$$N(C^n)^{1/n} \rightarrow \rho(C), \quad C^n \rightarrow 0 \iff \rho(C) < 1.$$

Ils étendent les conclusions de 5–6 aux matrices qui ne sont pas diagonalisables et permettent ensuite de traiter les comparaisons et les changements de base.

Avec la définition choisie dans cette version, on peut aussi les justifier élémentairement. Si $C^m = 0$ pour un m , ils sont immédiats : les puissances sont finalement nulles et $\rho(C) = 0$. Sinon, posons $a_m = N(C^m) > 0$ et $K_m = \max_{0 \leq r < m} N(C^r) \geq 1$. Pour $n = qm + r$, la même preuve que 4.b donne

$$\rho(C) \leq N(C^n)^{1/n} \leq a_m^{q/n} K_m^{1/n}.$$

Pour $\varepsilon > 0$, la définition de l'infimum fournit un m tel que $a_m^{1/m} < \rho(C) + \varepsilon$. Pour ce m fixé, la borne supérieure tend vers $a_m^{1/m}$; elle est donc inférieure à $\rho(C) + 2\varepsilon$ pour n assez grand. L'encadrement établit la limite générale.

Si $\rho(C) < 1$, choisir m tel que $a_m^{1/m} < 1$. La borne $N(C^n) \leq a_m^q K_m$ tend vers 0, puisque $0 < a_m < 1$ et $q \rightarrow +\infty$. Chaque coefficient de C^n est majoré en valeur absolue par $N(C^n)$, donc $C^n \rightarrow 0$. La réciproque est exactement la question 5. Ces justifications n'utilisent aucune théorie supplémentaire de réduction.

Partie III — Matrices positives : relations entre $\rho(A)$ et les coefficients de A

7. Le produit de matrices positives est positif. Si $C \leq D$ coefficient par coefficient et si E est positive, alors $EC \leq ED$ et $CE \leq DE$, puisque chaque coefficient est une somme de produits préservant l'ordre.

Par récurrence, $0 \leq B^n \leq A^n$. En effet, c'est vrai pour $n = 1$ et, si c'est vrai pour n ,

$$B^{n+1} = B^n B \leq A^n B \leq A^n A = A^{n+1}.$$

Pour une matrice positive, N est le maximum des sommes des coefficients des lignes, sans valeurs absolues à ajouter. L'ordre précédent donne donc $N(B^n) \leq N(A^n)$. En prenant les racines n -ièmes puis les limites établies après 6, on obtient $\rho(B) \leq \rho(A)$. Cette conclusion inclut le cas $B = 0$.

8. Comme A est positive, $s \geq 0$. Si $s = 0$, chaque coefficient de chaque ligne serait nul ; cela contredirait $A \neq 0$. Donc $s > 0$.

Méthode 1 — Vecteur propre et encadrement

Posons $\mathbf{1} = {}^t(1, \dots, 1)$. Les sommes de lignes donnent $A\mathbf{1} = s\mathbf{1}$, donc s est une valeur propre réelle. Par 3, $s \leq \rho(A)$. Or $N(A) = s$, donc $\rho(A) \leq s$. Ainsi $\rho(A) = s$.

Méthode 2 — Puissances et sommes de lignes

De $A\mathbf{1} = s\mathbf{1}$, on déduit $A^n\mathbf{1} = s^n\mathbf{1}$. Les matrices A^n sont positives, et chacune de leurs lignes a somme s^n . Ainsi $N(A^n) = s^n$ pour tout $n \geq 1$ et $\rho(A) = \inf_n (s^n)^{1/n} = s$.

La première méthode utilise une valeur propre immédiatement visible ; la seconde calcule exactement la croissance de toutes les puissances.

9. La borne supérieure $\rho(A) \leq N(A)$ est déjà connue. Les sommes de lignes étant positives ou nulles, $\sigma \geq 0$.

Si $\sigma = 0$, la borne inférieure est la positivité de $\rho(A)$. Si $\sigma > 0$, posons

$$s_k = \sum_j a_{k,j} > 0$$

et définissons $B = (b_{k,j})$ par $b_{k,j} = \sigma a_{k,j} / s_k$. Comme $0 < \sigma / s_k \leq 1$, B est positive et $B \leq A$. Toutes les sommes de lignes de B valent σ , donc 8 donne $\rho(B) = \sigma$. La question 7 fournit $\sigma = \rho(B) \leq \rho(A)$.

Dans tous les cas,

$$\sigma \leq \rho(A) \leq N(A).$$

La distinction des cas évite toute division par une somme de ligne éventuellement nulle.

10.a) Tous les x_k sont strictement positifs. La matrice diagonale Δ_X est donc inversible et

$$\Delta_X^{-1} = \text{diag}(1/x_1, \dots, 1/x_p).$$

Le produit à gauche divise la ligne k par x_k ; celui à droite multiplie la colonne j par x_j .

Ainsi, si $C = \Delta_X^{-1} A \Delta_X$,

$$c_{k,j} = a_{k,j} \frac{x_j}{x_k}.$$

Cette matrice est positive et non nulle.

10.b) On commence par vérifier que le changement de base conserve ρ avec sa définition par les puissances.

Plus généralement, si $C = P^{-1}AP$ et P est inversible, alors $C^n = P^{-1}A^nP$ et $A^n = PC^nP^{-1}$. Posons $K = N(P)N(P^{-1}) > 0$. Par sous-multiplicativité,

$$N(C^n) \leq KN(A^n), \quad N(A^n) \leq KN(C^n).$$

Après extraction des racines n -ièmes et passage aux limites générales justifiées après 6, avec $K^{1/n} \rightarrow 1$, on obtient $\rho(C) \leq \rho(A)$ et $\rho(A) \leq \rho(C)$, donc $\rho(C) = \rho(A)$.

Appliquons cela à $C = \Delta_X^{-1} A \Delta_X$. Sa somme de ligne k vaut

$$\sum_j a_{k,j} x_j / x_k.$$

La question 9 appliquée à C , puis l'égalité des rayons, donne exactement

$$\min_k \frac{\sum_j a_{k,j} x_j}{x_k} \leq \rho(A) \leq \max_k \frac{\sum_j a_{k,j} x_j}{x_k}.$$

10.c) Si $\beta X < AX$, chaque coordonnée donne

$$\beta x_k < \sum_j a_{k,j} x_j.$$

Comme $x_k > 0$,

$$\beta < \frac{\sum_j a_{k,j} x_j}{x_k}$$

pour tout k . Il n'y a qu'un nombre fini de rapports : leur minimum reste strictement supérieur à β . La borne inférieure de 10.b donne donc $\beta < \rho(A)$.

Partie IV — Matrices strictement positives

Résultat d'existence utilisé dans cette partie

Question adaptée au programme actuel. Résultat admis dans cette version adaptée : pour toute matrice réelle strictement positive A , il existe une valeur propre réelle λ telle que $|\lambda| = \rho(A)$ et un vecteur propre réel non nul X associé.

Cette admission porte uniquement sur l'existence de ce couple pour les matrices strictement positives. Les questions suivantes établiront que $\lambda = \rho(A) > 0$, que les vecteurs propres correspondants ont des coordonnées de même signe et que l'espace propre est une droite. Les conclusions de convergence seront également démontrées par des arguments réels.

11.a) Chaque coefficient de A est strictement positif ; les sommes de lignes sont donc strictement positives. Leur minimum σ est strictement positif, puisqu'il n'y a que p lignes. La question 9 donne $\rho(A) \geq \sigma > 0$.

11.b) Pour chaque ligne k , la positivité des coefficients et l'inégalité triangulaire donnent

$$|(AX)_k| = \left| \sum_j a_{k,j} x_j \right| \leq \sum_j a_{k,j} |x_j| = (A|X|)_k.$$

Ainsi $|AX| \leq A|X|$. Comme $AX = \lambda X$ et $|\lambda| = \rho(A)$, on a $|AX| = \rho(A)|X|$, d'où $\rho(A)|X| \leq A|X|$.

11.c) Le vecteur X étant non nul, au moins l'un des $|x_j|$ est strictement positif. Pour

chaque ligne k , tous les $a_{k,j}$ sont strictement positifs; la somme

$$Z_k = \sum_j a_{k,j} |x_j|$$

contient donc un terme strictement positif et les autres sont positifs ou nuls. Ainsi $Z_k > 0$ pour tout k , donc $Z = A|X| > 0$.

11.d) Par 11.b, $Y = A|X| - \rho(A)|X| \geq 0$. Si $Y \neq 0$, l'argument de 11.c appliqué à Y donne $AY > 0$.

Puisque $Z = A|X|$, on a

$$AY = A^2|X| - \rho(A)A|X| = AZ - \rho(A)Z.$$

Ainsi $AY > 0$ équivaut à $\rho(A)Z < AZ$.

11.e) Si $Y \neq 0$, 11.c–11.d donnent $Z > 0$ et $\rho(A)Z < AZ$. En appliquant 10.c avec $\beta = \rho(A) > 0$ et le vecteur Z , on obtiendrait $\rho(A) < \rho(A)$, contradiction. Donc $Y = 0$, soit

$$A|X| = \rho(A)|X|.$$

Le vecteur $|X|$ est non nul; $\rho(A)$ est donc une valeur propre réelle de A , et $|X|$ un vecteur propre associé.

12.a) Question adaptée au programme actuel : on traite l'égalité triangulaire pour deux scalaires réels.

En élevant l'égalité au carré,

$$(z_1 + z_2)^2 = (|z_1| + |z_2|)^2,$$

donc $z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 = z_1^2 + z_2^2 + 2|z_1||z_2|$. Ainsi $z_1z_2 = |z_1||z_2| > 0$, puisque les deux réels sont non nuls. Ils ont donc le même signe.

12.b) Question adaptée au programme actuel : la conclusion est un signe commun.

Posons

$$P = \sum_{z_j > 0} z_j \geq 0$$

et

$$Q = \sum_{z_j < 0} (-z_j) \geq 0.$$

L'hypothèse devient $|P - Q| = P + Q$. Si $P \geq Q$, elle donne $P - Q = P + Q$, donc $Q = 0$. Si $Q \geq P$, elle donne $Q - P = P + Q$, donc $P = 0$.

Les z_j sont tous non nuls, donc aucun ne peut avoir le signe correspondant à une somme nulle. Ils sont par conséquent tous strictement positifs ou tous strictement négatifs. En prenant respectivement $\eta = 1$ ou $\eta = -1$, on obtient $z_j = \eta|z_j|$ pour tout j .

13. Question adaptée au programme actuel : on établit que toutes les coordonnées de X ont un même signe réel.

Les questions 11.c et 11.e donnent $A|X| > 0$ et $A|X| = \rho(A)|X|$. Comme $\rho(A) > 0$, chaque coordonnée de $|X|$ est strictement positive. Donc $|X| > 0$ et tous les x_j sont non nuls.

Par ailleurs, $|AX| = |\lambda X| = \rho(A)|X| = A|X|$. Dans la première ligne, cela donne

$$\left| \sum_{j=1}^p a_{1,j} x_j \right| = \sum_{j=1}^p |a_{1,j} x_j|.$$

Si $p \geq 2$, les réels $a_{1,j} x_j$ sont tous non nuls et la question 12.b donne un signe commun. Comme $a_{1,j} > 0$, les x_j ont eux-mêmes ce signe commun. Si $p = 1$, un vecteur non nul possède déjà une unique coordonnée de signe déterminé. Dans tous les cas, il existe $\eta \in \{-1, 1\}$ tel que $X = \eta|X|$.

Le raisonnement s'applique à tout vecteur propre réel non nul associé à une valeur propre réelle de valeur absolue $\rho(A)$, et pas seulement au couple initial choisi.

14.a) Question adaptée au programme actuel : l'unicité concerne les valeurs propres réelles de valeur absolue $\rho(A)$.

Soit λ une telle valeur propre et X un vecteur propre réel non nul associé. D'après 13, $X = \eta|X|$ avec $\eta \in \{-1, 1\}$; d'après 11.e, $A|X| = \rho(A)|X|$. Ainsi

$$AX = \eta A|X| = \eta \rho(A)|X| = \rho(A)X.$$

Mais $AX = \lambda X$ et $X \neq 0$, donc $\lambda = \rho(A)$. La valeur $\rho(A)$ existe par 11.e, ce qui achève la preuve de son unicité parmi les valeurs propres réelles de même valeur absolue. Le contrôle de la croissance des autres directions sera assuré séparément par 17.c.

14.b) La question 13 appliquée à U, V montre que toutes leurs coordonnées sont non nulles, en particulier $u_1 \neq 0$ et $v_1 \neq 0$. Posons $W = u_1 V - v_1 U$.

Si U, V sont linéairement indépendants, $W \neq 0$: sinon on aurait $V = (v_1/u_1)U$. Par linéarité, $AW = \rho(A)W$, donc W serait un vecteur propre associé à $\rho(A)$. Or sa première coordonnée vaut $u_1 v_1 - v_1 u_1 = 0$, ce qui contredit 13.

Il ne peut donc exister deux vecteurs propres indépendants pour cette valeur. Comme l'espace propre contient le vecteur non nul $|X|$, sa dimension est exactement 1.

15.a) Méthode 1 — Rang et transposition

Pour tout réel t , le rang d'une matrice égale celui de sa transposée. Ainsi

$$\text{rg}(A - tI_p) = \text{rg}({}^t(A - tI_p)) = \text{rg}({}^tA - tI_p).$$

Par le théorème du rang, le noyau de l'une est non nul si et seulement si celui de l'autre l'est. Donc t est valeur propre réelle de A si et seulement s'il est valeur propre réelle de tA .

Méthode 2 — Inversibilité et transposition

En dimension finie, t n'est pas valeur propre de A si et seulement si $A - tI_p$ est injective,

donc inversible. Une matrice est inversible si et seulement si sa transposée l'est : si C^{-1} existe, $({}^tC)^{-1} = {}^t(C^{-1})$, et la réciproque vient de la même identité appliquée à la transposée. Ainsi $A - tI_p$ est inversible exactement lorsque ${}^tA - tI_p$ l'est. On retrouve l'égalité des valeurs propres réelles.

Ces deux méthodes utilisent des résultats autorisés d'algèbre linéaire ; la première calcule les dimensions des noyaux et la seconde caractérise leur nullité par l'inversibilité.

Pour l'égalité des rayons dans cette question, A et tA sont strictement positives. Les questions 3 et 11.e appliquées à chacune montrent que leur ρ est la plus grande valeur absolue de leurs valeurs propres réelles : toutes sont majorées par ρ , et ρ est elle-même propre. Comme les ensembles propres sont égaux, $\rho({}^tA) = \rho(A)$.

15.b) La matrice tA est strictement positive et son rayon vaut $\rho(A)$ par 15.a. La question 13, appliquée à cette matrice et au vecteur Z associé à ce rayon, montre que $|Z| > 0$ et que $Z = \eta|Z|$ pour un signe η . Ses coordonnées sont donc toutes strictement positives ou toutes strictement négatives.

15.c) Comme $U > 0$, chaque produit $z_k u_k$ a le signe commun des coordonnées de Z et est non nul. Leur somme tZU est donc strictement positive si $Z > 0$, et strictement négative si $Z < 0$. En particulier, elle n'est pas nulle : $Y = Z/({}^tZU)$ est bien défini.

Le dénominateur a le même signe que toutes les coordonnées du numérateur, donc $Y > 0$. La linéarité donne

$${}^tAY = \frac{{}^tAZ}{{}^tZU} = \rho(A)Y,$$

et la normalisation donne

$${}^tYU = \frac{{}^tZU}{{}^tZU} = 1.$$

16.a) Pour $W \in \mathbb{R}^p$, $MW = U({}^tYW)$. L'image est donc contenue dans $\text{Vect}(U)$. Comme ${}^tYU = 1$, $MU = U$, et l'image est exactement cette droite.

De plus,

$$M^2 = U{}^tYU{}^tY = U({}^tYU){}^tY = M.$$

Ainsi M est la matrice d'un projecteur. Comme $U \neq 0$, $MW = 0$ équivaut à ${}^tYW = 0$. Son noyau est donc l'hyperplan

$$\text{Ker } M = \{W \mid {}^tYW = 0\} = \text{Vect}(Y)^\perp.$$

La normalisation ${}^tYU = 1$ assure que cette droite image et cet hyperplan noyau sont supplémentaires.

16.b) Posons $B = A/\rho(A)$, défini puisque $\rho(A) > 0$. Les relations $AU = \rho(A)U$ et ${}^tYA = \rho(A){}^tY$ donnent

$$BM = M, \quad MB = M, \quad M^2 = M.$$

Méthode 1 — Récurrence

Pour $n = 1$, l'égalité est immédiate. Si $(B - M)^n = B^n - M$, alors

$$(B - M)^{n+1} = (B^n - M)(B - M) = B^{n+1} - B^nM - MB + M^2 = B^{n+1} - M,$$

car $B^nM = M$, $MB = M$ et $M^2 = M$. La récurrence établit l'identité pour tout $n \geq 1$.

Méthode 2 — Binôme pour des matrices qui commutent

Comme $BM = MB$, le binôme s'applique. Pour $k \geq 1$, $M^k = M$ et $B^{n-k}M = M$, y compris lorsque $n - k = 0$. Donc

$$(B - M)^n = B^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k M.$$

La somme des coefficients vaut $(1 - 1)^n - 1 = -1$, d'où $(B - M)^n = B^n - M$. La récurrence suit la relation de projecteur ; le binôme exploite la commutation et rassemble tous les termes en une seule somme.

17.a) Posons $C = A - \rho(A)M$. Les relations utilisées en 16.b donnent $MA = \rho(A)M$ et $M^2 = M$, donc

$$MC = MA - \rho(A)M^2 = 0.$$

Si $CW = \mu W$ et $\mu \neq 0$, appliquer M donne $0 = \mu MW$, donc $MW = 0$. L'équation propre devient alors $AW = \mu W$. Comme $W \neq 0$, μ est une valeur propre réelle de A , et 3 donne $|\mu| \leq \rho(A)$.

17.b) Supposons $|\mu| = \rho(A)$. Puisque μ est valeur propre réelle de A , 14.a impose $\mu = \rho(A)$. La dimension 1 de l'espace propre donnée par 14.b implique $W = tU$ pour un réel $t \neq 0$. Alors $MW = tMU = tU = W$, tandis que 17.a donne $MW = 0$. Cela impose $W = 0$, contradiction.

Ainsi chaque valeur propre réelle non nulle considérée vérifie $|\mu| < \rho(A)$. Cette seule comparaison des valeurs propres réelles ne remplace pas l'estimation de croissance nécessaire à la question suivante.

17.c) Question adaptée au programme actuel : on contrôle toutes les puissances par une contraction réelle, au lieu de conclure à partir d'un ensemble de valeurs propres non réelles.

On note $r = \rho(A) > 0$, $B = A/r$, $D = \Delta_U = \text{diag}(u_1, \dots, u_p)$ et

$$T = D^{-1}BD, \quad {}^t\pi = {}^tYD, \quad \mathbf{1} = {}^t(1, \dots, 1), \quad \Pi = \mathbf{1}{}^t\pi.$$

Les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs, donc D est inversible. La matrice T est strictement positive. Comme $D\mathbf{1} = U$ et $BU = U$,

$$T\mathbf{1} = D^{-1}BU = \mathbf{1}.$$

Toutes les sommes de lignes de T valent donc 1. De plus, $\pi_j = y_j u_j > 0$ et

$${}^t\pi\mathbf{1} = {}^tYU = 1, \quad {}^t\pi T = {}^tYBD = {}^tYD = {}^t\pi.$$

Il en résulte $\Pi^2 = \Pi$, $T\Pi = \Pi T = \Pi$ et $N(\Pi) = 1$. Enfin,

$$D^{-1}MD = D^{-1}U{}^tYD = \Pi,$$

si bien que $T - \Pi$ est semblable à $B - M$.

Posons $\delta = \min_{k,j} T_{k,j}/\pi_j$. Ce minimum d'un nombre fini de réels strictement positifs est strictement positif. Comme $T_{k,j} \geq \delta\pi_j$, en sommant une ligne on obtient

$$1 \geq \delta \sum_j \pi_j = \delta.$$

Donc $0 < \delta \leq 1$.

Définissons $R = T - \delta\Pi$. Ses coefficients sont positifs ou nuls et ses sommes de lignes valent $1 - \delta$. On a aussi

$$R\Pi = (1 - \delta)\Pi, \quad \Pi R = (1 - \delta)\Pi.$$

Si $\delta = 1$, R est une matrice positive à sommes de lignes nulles, donc $R = 0$ et $T = \Pi$.

Alors $B - M = 0$, donc $A - rM = 0$. Son rayon est $0 < r$ et $B^n = M$ pour tout $n \geq 1$, par 16.b. La conclusion est acquise dans ce cas.

Supposons $0 < \delta < 1$ et posons $c = 1 - \delta \in (0, 1)$. On a $T - \Pi = R - c\Pi$. Les relations précédentes, par la même récurrence que 16.b, donnent

$$(T - \Pi)^n = R^n - c^n\Pi.$$

Pour expliciter l'étape de récurrence, si la relation est vraie à l'ordre n , son produit par $R - c\Pi$ vaut

$$R^{n+1} - cR^n\Pi - c^n\Pi R + c^{n+1}\Pi^2 = R^{n+1} - c^{n+1}\Pi,$$

puisque $R^n\Pi = c^n\Pi$, $\Pi R = c\Pi$ et $\Pi^2 = \Pi$.

La matrice R est positive et a toutes ses sommes de lignes égales à c . La preuve de 8 donne $N(R^n) = c^n$. Par l'inégalité triangulaire et $N(\Pi) = 1$,

$$N((T - \Pi)^n) \leq N(R^n) + c^n N(\Pi) = 2c^n.$$

La limite générale des racines des puissances donne donc

$$\rho(T - \Pi) \leq c = 1 - \delta < 1.$$

Le rayon est invariant par similitude d'après la preuve de 10.b, et homogène d'après 6.b. Comme $A - rM = r(B - M)$, on conclut à

$$\rho(A - rM) = r\rho(B - M) = r\rho(T - \Pi) \leq r(1 - \delta) < r.$$

Cette estimation porte sur la croissance de toutes les puissances, et ne nécessite aucune autre hypothèse sur les valeurs propres de $A - rM$.

Le critère général établi après 6 implique $(B - M)^n \rightarrow 0$. La question 16.b donne alors $B^n - M \rightarrow 0$, donc

$$\left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^n \rightarrow M.$$

On dispose même d'une borne directe : $(B - M)^n = D(T - \Pi)^n D^{-1}$, donc

$$N(B^n - M) \leq 2N(D)N(D^{-1})(1 - \delta)^n.$$

Elle confirme la convergence par encadrement et précise sa vitesse géométrique dans cette preuve réelle.

Partie V — Un algorithme de calcul de $\rho(A)$ et d'un vecteur propre associé

18.a) La matrice A est réelle symétrique, et la base $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormée et propre. Elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$. La question 3 donne $\max_k |\lambda_k| \leq \rho(A)$. D'après 11.e, $\rho(A)$ est une valeur propre réelle de cette matrice strictement positive, donc figure dans la liste. Avec $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_p|$, on obtient $|\lambda_1| = \rho(A)$, puis 14.a donne

$$\lambda_1 = \rho(A) > 0.$$

La question 13 appliquée à e_1 assure que toutes ses coordonnées sont non nulles et ont le même signe. Dans une base orthonormée, $s_1 = \langle V_0, e_1 \rangle$. Comme $V_0 > 0$, chacun des termes de ce produit scalaire a le signe commun de e_1 . Leur somme est donc strictement positive si $e_1 > 0$, et strictement négative si $e_1 < 0$. Ainsi $s_1 \neq 0$.

Pour $p = 1$, le même argument est valable ; les sommes d'indices $k \geq 2$ utilisées ensuite sont vides.

18.b) Par récurrence, $V_n = A^n V_0$. En utilisant la décomposition initiale,

$$V_n = \sum_{k=1}^p s_k \lambda_k^n e_k.$$

Le vecteur V_n est non nul : sa composante $s_1 \lambda_1^n$ ne s'annule pas. On peut aussi noter que $V_0 > 0$ et A strictement positive donnent $V_n > 0$ par récurrence.

Posons $q_k = \lambda_k / \lambda_1$ pour $k \geq 2$. L'ordre strict des modules et $\lambda_1 > 0$ donnent $|q_k| < 1$. Par orthonormalité,

$$\|V_n\|^2 = \lambda_1^{2n} \left(s_1^2 + \sum_{k=2}^p s_k^2 q_k^{2n} \right).$$

Donc

$$\frac{\|V_{n+1}\|}{\|V_n\|} = \lambda_1 \sqrt{\frac{s_1^2 + \sum_{k=2}^p s_k^2 q_k^{2n+2}}{s_1^2 + \sum_{k=2}^p s_k^2 q_k^{2n}}}.$$

Toutes les puissances de q_k tendent vers 0. Le dénominateur dans la fraction tend vers $s_1^2 > 0$, donc le quotient tend vers 1. Par continuité de la racine carrée, $\|V_{n+1}\|/\|V_n\| \rightarrow \lambda_1$.

18.c) Comme $\lambda_1 > 0$, on peut factoriser sans changement de signe :

$$\frac{V_n}{\|V_n\|} = \frac{s_1 e_1 + \sum_{k=2}^p s_k q_k^n e_k}{\sqrt{s_1^2 + \sum_{k=2}^p s_k^2 q_k^{2n}}}.$$

La somme du numérateur en dehors de $s_1 e_1$ tend vers le vecteur nul ; par orthonormalité, le carré de sa norme vaut

$$\sum_{k=2}^p s_k^2 q_k^{2n} \rightarrow 0.$$

Le dénominateur tend vers $|s_1| > 0$. Ainsi

$$\frac{V_n}{\|V_n\|} \rightarrow \frac{s_1}{|s_1|} e_1 = \begin{cases} e_1 & s_1 > 0, \\ -e_1 & s_1 < 0. \end{cases}$$

Le vecteur limite est dans les deux cas le vecteur propre unitaire à coordonnées strictement positives : si $e_1 > 0, s_1 > 0$, et si $e_1 < 0, s_1 < 0$.

19.a) Code adapté en Python. La fonction suivante réalise exactement n multiplications par A , en partant d'une copie de V_0 .

Python

```
import numpy as np

def norme(V):
    return np.sqrt(np.dot(V, V))

def prodmat(A, V):
    return np.dot(A, V)

def affecte(V):
    return np.array(V)

def puissance(A, n, V0):
    V = affecte(V0)
    for k in range(n):
        V = prodmat(A, V)
```

```
return V
```

Avant la boucle, V vaut V_0 . Après k passages, il vaut V_k , par la relation $V_{k+1} = AV_k$. La boucle `range(n)` comporte n passages, donc la valeur renvoyée est V_n . La copie initiale conserve le tableau d'entrée. La commande `np.dot(A, V)` réalise le produit matriciel; une multiplication coefficient par coefficient ne conviendrait pas.

Les dimensions sont A de forme (p, p) et V de longueur p ; chaque produit renvoie donc un vecteur de longueur p . Le domaine demandé est $n \geq 1$; la même fonction calcule aussi V_0 si $n = 0$.

19.b) Code adapté en Python. Le vecteur approché est $V_n/\|V_n\|$ et la valeur propre approchée est $\|AV_n\|/\|V_n\|$, conformément à 18.b–18.c. Voici le code complet, imports et fonctions auxiliaires compris :

Python

```
import numpy as np

def norme(V):
    return np.sqrt(np.dot(V, V))

def prodmat(A, V):
    return np.dot(A, V)

def affecte(V):
    return np.array(V)

def puissance(A, n, V0):
    V = affecte(V0)
    for k in range(n):
        V = prodmat(A, V)
    return V

def vectpropre(A, n, V0):
    V = puissance(A, n, V0)
```

```
return V / norme(V)
```

```
def valpropre(A, n, V0):
    V = puissance(A, n, V0)
    W = prodmat(A, V)
    return norme(W) / norme(V)
```

La fonction vectpropre normalise V_n ; elle renvoie un vecteur unitaire qui tend vers le vecteur propre positif associé à λ_1 . La fonction valpropre calcule en plus $W = AV_n = V_{n+1}$, puis le quotient des normes, qui tend vers λ_1 . Les divisions sont légitimes dans les hypothèses du sujet puisque $V_n > 0$, donc $\|V_n\| > 0$.

Le quotient utilise le même indice n que le vecteur normalisé : il compare V_{n+1} à V_n . L'indépendance de ces deux fonctions évite toute modification du vecteur d'entrée ; aucune connaissance préalable du signe choisi pour e_1 n'est requise.

Les fonctions ont été exécutées, avec notamment le test suivant :

Python

```
A = np.array([[2., 1.], [1., 2.]])
V0 = np.array([1., 2.])
n = 20
print(puissance(A, 2, V0))
print(vectpropre(A, n, V0))
print(valpropre(A, n, V0))
```

Cette matrice est strictement positive et symétrique. Ses vecteurs propres $(1, 1)$ et $(1, -1)$ ont pour valeurs propres 3 et 1, avec des modules distincts. Le code renvoie $V_2 = (13, 14)$, puis un vecteur voisin de $(0,70710678, 0,70710678)$ et une valeur voisine de 3. Les calculs sont des approximations numériques ; les convergences sont démontrées en 18 et ne reposent pas sur ce test.

Relevé des adaptations

- Préambule, questions 1–18 : les matrices, vecteurs, valeurs propres et scalaires utilisés sont réels. Pour conserver une quantité décrivant aussi les puissances des matrices sans valeurs propres réelles, $\rho(A)$ est défini par $\inf_{m \geq 1} N(A^m)^{1/m}$. Les propriétés nécessaires de cette définition sont établies dans le corrigé. Les conventions d'ordre et de convergence du préambule sont conservées.
- Question 2.a–2.d : l'exemple initial est remplacé par la matrice réelle à blocs 1 et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La base propre initialement demandée devient une base adaptée à une droite et un plan stables. Les puissances, la croissance de $N(A^n)$ et la relation entre $\rho(A^n)$ et $\rho(A)$ restent étudiées explicitement, avec uniquement les formules trigonométriques réelles.
- Question 3 : le raisonnement sur une coordonnée maximale est conservé pour les vecteurs propres réels. L'application à toutes les puissances établit le lien avec la nouvelle définition de ρ .
- Questions 4.a–4.d : les demandes nécessitant des racines non réelles sont remplacées par des comparaisons d'infimums et une division euclidienne des exposants. La conclusion $\rho(A^n) = \rho(A)^n$ et la borne par $N(A^n)^{1/n}$ sont conservées.
- Question 6.a–6.d : la diagonalisation est supposée réelle. Les résultats sur la convergence et sur $N(A^n)^{1/n}$ sont conservés. Les deux résultats généraux admis à la fin de cette partie sont aussi justifiés élémentairement dans le corrigé avec la définition retenue.
- Préambule de la partie IV : admission précise, limitée aux matrices strictement positives, de l'existence d'une valeur propre réelle de valeur absolue $\rho(A)$ et d'un vecteur propre réel associé. Cette conséquence suffit à réparer les dépendances du préambule initial ; les propriétés de signe, de dimension et de convergence ne sont pas admises.

- Questions 12.a–12.b et 13 : l'égalité triangulaire est reformulée pour des réels non nuls ; le paramètre de direction devient un signe $\eta \in \{-1, 1\}$. Les conclusions de positivité et d'unicité propres nécessaires à la suite sont conservées sur $\mathbb{R}$.
- Questions 14.a et 15.a : les demandes concernent les valeurs propres réelles. L'égalité des rayons des deux matrices strictement positives est explicitement déduite de ces résultats.
- Question 17.c : ajout d'une indication de contraction utilisant une matrice positive à sommes de lignes égales à 1. Cette preuve réelle établit la stricte diminution du rayon de croissance, même lorsque les valeurs propres réelles ne décrivent pas toutes les directions ; elle conserve la conclusion $(A/\rho(A))^n \rightarrow M$.
- Questions 19.a–19.b : Code adapté en Python. Les procédures de calcul deviennent des fonctions renvoyant les vecteurs ou scalaires calculés ; les copies, produits matriciels, indices et normalisations sont explicités et vérifiés. Aucun code de l'ancien langage n'est conservé.

Aucun passage utile du PDF ne reste illisible et aucun point ne reste à vérifier.