



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques

2010

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, $n \geq 2$ est un entier et $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Le produit scalaire et la norme associée sont notés $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on écrit $x \geq y$ si $x_i \geq y_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On note $\mathbf{0}$ le vecteur nul et $\mathbf{1}$ le vecteur dont toutes les coordonnées valent 1.

On rappelle ou on admet les propriétés suivantes :

- Une partie non vide K de $\mathbb{R}^n$ est convexe si, pour tous $u, v \in K$ et $t \in [0, 1]$, le vecteur $tu + (1 - t)v$ appartient à K .
- L'image réciproque d'un intervalle fermé par une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est fermée. L'image réciproque d'un intervalle ouvert est ouverte.
- Une intersection finie de parties fermées est fermée ; une boule fermée est fermée et bornée.
- Une permutation des coordonnées, ou leur multiplication par des constantes non nulles, transforme une partie fermée en une partie fermée.

Un vecteur h sépare deux convexes K_1, K_2 s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tous $u \in K_1$ et $v \in K_2$,

$$\langle h, u \rangle < c < \langle h, v \rangle.$$

Pour une partie convexe non vide K et $x \in \mathbb{R}^n$, on appelle projection de x sur K , et on note $p(x)$ s'il existe, tout vecteur $y \in K$ vérifiant

$$\|x - y\| = \min_{z \in K} \|x - z\|.$$

Partie I — Projection sur un convexe fermé

1. Exemple 1. Soit $K = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid z_1 \leq 1, z_2 \leq 1\}$. Soit $x = (x_1, x_2) \notin K$, avec $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$.

1. (a) Montrer que K est convexe et fermé. Est-il borné ?
1. (b) Établir l'existence et l'unicité de $p(x)$. Déterminer cette projection.
1. (c) Faire une figure représentant K , un vecteur x et sa projection $p(x)$.
1. (d) Écrire une fonction Python `distance(x1, x2)` qui associe à tout vecteur x satisfaisant les hypothèses de cette question le réel $\|x - p(x)\|$.
1. (e) Vérifier que, pour tout $z \in K$, $\langle z - p(x), x - p(x) \rangle \leq 0$.
1. (f) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $z \in K$,
 $\langle x - p(x), z \rangle < c < \langle x - p(x), x \rangle$.

2. Exemple 2. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, différent de $\{0\}$ et de $\mathbb{R}^n$.

2. (a) Montrer que E est convexe. On admet qu'il est fermé.
2. (b) Dans cette question, $E = \{w \in \mathbb{R}^4 \mid w_1 + w_2 - w_3 - w_4 = 0\}$. Soit
 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \notin E$. Déterminer $\min_{w \in E} \|x - w\|$ et $p(x)$.

Cas général. Soit K une partie convexe, fermée et non vide de $\mathbb{R}^n$, et soit $x \notin K$.

3. Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(z) = \|x - z\|$.
3. (a) Justifier la continuité de f .
3. (b) Soit $z_0 \in K$. On considère la boule fermée B_0 de centre x et de rayon $\|x - z_0\|$. On pose $K' = B_0 \cap K$. Justifier que K' est fermé et borné.
3. (c) En déduire que f admet un minimum sur K' . Soit $\hat{z} \in K'$ tel que
 $f(\hat{z}) = \min_{z \in K'} f(z)$.

3. (d) Montrer que $\|x - z\| \geq \|x - \hat{z}\|$ pour tout $z \in K$. Conclure.

4. (a) Vérifier, pour tous $a, b \in \mathbb{R}^n$, l'identité

$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{4}\|a-b\|^2 = \frac{1}{2}\|x-a\|^2 + \frac{1}{2}\|x-b\|^2.$$

4. (b) On pose $d = \min_{z \in K} \|x - z\|$. Soient $u, v \in K$ tels que $\|x - u\| = \|x - v\| = d$. À l'aide de 4. (a), montrer que $u = v$. Conclure.

5. On rappelle que $p(x)$ désigne la projection de x sur K .

5. (a) Établir, pour tout $z \in K$ et $t \in [0, 1]$,

$$\|x - p(x)\|^2 \leq \|x - (tz + (1-t)p(x))\|^2.$$

5. (b) En déduire, pour tout $z \in K$, $\langle z - p(x), x - p(x) \rangle \leq 0$.

5. (c) Réciproquement, on suppose qu'il existe $y \in K$ tel que $\langle z - y, x - y \rangle \leq 0$ pour tout $z \in K$. Montrer que $y = p(x)$. Conclure.

5. (d) Établir $\langle x - p(x), p(x) \rangle < \langle x - p(x), x \rangle$. Montrer que $x - p(x)$ sépare K et $\{x\}$.

Partie II — Un cas particulier

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels strictement positifs. On pose

$$K = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^2 \leq 1 \right\}.$$

6. Montrer que K est convexe, fermé et borné.

On fixe désormais $x \notin K$ tel que $x_i > 0$ pour tout i . On pose

$$K_0 = \left\{ z \in K \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^2 = 1 \right\}, \quad K_1 = \left\{ z \in K \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^2 < 1 \right\}.$$

7. Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(z) = \|x - z\|^2$.

7. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur l'ouvert K_1 .

7. (b) La restriction de f à K_1 admet-elle des points critiques? En déduire que $p(x) \in K_0$.

7. (c) Montrer que les coordonnées de $p(x)$ sont positives ou nulles, et ne sont pas toutes nulles.

8. On définit l'ouvert

$$\Omega = \left\{ (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid z_i > 0 \text{ pour tout } i, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i^2 < 1 \right\}.$$

On définit sur Ω les fonctions

$$\Psi(z_1, \dots, z_{n-1}) = \sqrt{\frac{1}{\alpha_n} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i^2 \right)},$$

$$H(z_1, \dots, z_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - z_i)^2 + (x_n - \Psi(z_1, \dots, z_{n-1}))^2.$$

On suppose $(z_1^*, \dots, z_{n-1}^*)$ point critique de H . On pose $z_n^* = \Psi(z_1^*, \dots, z_{n-1}^*)$ et $z^* = (z_1^*, \dots, z_n^*)$.

8. (a) Montrer que $z_n^* > 0$ et $z^* \in K_0$.

8. (b) On pose $\lambda = \frac{1}{\alpha_n} \left(\frac{x_n}{z_n^*} - 1 \right)$. Montrer que $z_i^* = x_i / (1 + \lambda \alpha_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

8. (c) On pose $\beta = \max_{1 \leq i \leq n} (-1/\alpha_i)$. Montrer que $\lambda > \beta$.

8. (d) Étudier, sur $]\beta, +\infty[$, la fonction

$$y \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i x_i^2}{(1 + \alpha_i y)^2}.$$

En déduire l'existence d'un unique réel λ_0 tel que $\lambda_0 > \beta$ et

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 / (1 + \lambda_0 \alpha_i)^2 = 1.$$

Montrer que $\lambda_0 > 0$. Expliciter les coordonnées de z^* en fonction de λ_0 , des α_i et des x_i .

9. (a) Établir, pour tout $z \in K$, $\langle z - z^*, x - z^* \rangle \leq 0$. En déduire $z^* = p(x)$.

9. (b) Montrer que

$$c = \frac{\lambda_0}{2} \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i x_i^2}{1 + \lambda_0 \alpha_i} \right)$$

vérifie $\langle x - p(x), z \rangle < c < \langle x - p(x), x \rangle$ pour tout $z \in K$.

Partie III — Une séparation de deux convexes

On admet la proposition suivante : si K_1, K_2 sont deux convexes fermés de $\mathbb{R}^n$, chacun contenant une boule ouverte de rayon strictement positif, et tels que $K_1 \cap K_2 = \{x_0\}$, alors il existe $h \neq \mathbf{0}$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle h, x \rangle \leq c \leq \langle h, y \rangle \quad \text{pour tous } x \in K_1, y \in K_2.$$

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des parties $K \subset \mathbb{R}^n$ satisfaisant les trois conditions suivantes :

- (i) K est convexe, fermé, borné et contenu dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq \mathbf{0}\}$;
- (ii) K contient un vecteur dont toutes les coordonnées sont strictement positives;
- (iii) pour tout $x \in K$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$, $x \geq y \geq \mathbf{0}$ implique $y \in K$.

10. Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ un exemple de $K \in \mathcal{B}_2$.

Dans toute la suite de cette partie, on fixe $K \in \mathcal{B}_n$.

11. Une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement concave si, pour tous $0 < a < b$ et $t \in]0, 1[$,

$$f(ta + (1-t)b) > tf(a) + (1-t)f(b).$$

Montrer que $\ln$ est strictement concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

12. Soit $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \prod_{i=1}^n x_i.$$

12. (a) Justifier que g admet un maximum sur K .

12. (b) Soit $u \in K$ tel que $g(u) = \max_{x \in K} g(x)$. Montrer que $u_i > 0$ pour tout i .

12. (c) Établir l'unicité d'un tel vecteur u . On pourra raisonner par contraposée et utiliser 11.

13. On note $\phi^*(K) = (\phi_1^*(K), \dots, \phi_n^*(K))$ l'unique vecteur où g atteint son maximum. On pose

$$F = \left\{ \left(\frac{x_1}{\phi_1^*(K)}, \dots, \frac{x_n}{\phi_n^*(K)} \right) \mid x \in K \right\}.$$

13. (a) Montrer que $F \in \mathcal{B}_n$.

13. (b) Montrer que

$$\prod_{i=1}^n y_i \leq 1$$

pour tout $y \in F$.

14. On pose

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq \mathbf{0}, \prod_{i=1}^n x_i \geq 1\}.$$

14. (a) Montrer que A est fermé.

14. (b) En utilisant 11, montrer que A est convexe.

15. Établir $A \cap F = \{\mathbf{1}\}$. En déduire l'existence de $h \neq \mathbf{0}$ tel que

$$\langle h, y \rangle \leq \langle h, \mathbf{1} \rangle \leq \langle h, x \rangle \quad \text{pour tous } x \in A, y \in F.$$

16. On veut montrer que toutes les coordonnées de h sont strictement positives.

16. (a) Supposons $0 \geq h$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $v_k = \langle h, k1 \rangle$. Montrer que $v_k \rightarrow -\infty$. En déduire une contradiction et l'existence d'un indice i_0 tel que $h_{i_0} > 0$.

16. (b) Supposons qu'il existe i_1 tel que $h_{i_1} \leq 0$. Pour $k \geq 1$, on définit $w^{(k)}$ par

$$w_{i_0}^{(k)} = \frac{1}{k}, \quad w_{i_1}^{(k)} = k, \quad w_i^{(k)} = 1 \quad (i \notin \{i_0, i_1\}).$$

On pose $z_k = \langle h, w^{(k)} \rangle$. Étudier la convergence de (z_k) et en déduire une contradiction. Conclure que $h_i > 0$ pour tout i .

17. Par un raisonnement semblable, montrer que toutes les coordonnées de h sont égales. En déduire

$$\sum_{i=1}^n y_i \leq n \leq \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{pour tous } x \in A, y \in F.$$

Partie IV — La solution de Nash

Un élément de $\mathcal{B}_n$ représente un problème de négociation. Les vecteurs de K représentent des accords possibles et x_i mesure le gain de la personne i ; le vecteur nul représente le désaccord.

Pour $i \neq j$, on note $x[i, j]$ le vecteur obtenu en échangeant les coordonnées i et j de x : $x[i, j]_i = x_j$, $x[i, j]_j = x_i$ et les autres coordonnées ne changent pas. On pose

$$K[i, j] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x[i, j] \in K\}.$$

Pour $a, x \in \mathbb{R}^n$, on note $a \otimes x = (a_1 x_1, \dots, a_n x_n)$ et $a \otimes K = \{a \otimes x \mid x \in K\}$.

Une règle de partage est une application $\phi : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$. On s'intéresse aux règles satisfaisant :

P1. Pour tout $K \in \mathcal{B}_n$, $\phi(K) \in K$ et il n'existe pas $x \in K$ tel que $x \neq \phi(K)$ et $x \geq \phi(K)$.

P2. Pour tout $K \in \mathcal{B}_n$ et tout a de coordonnées strictement positives,

$$\phi(a \otimes K) = a \otimes \phi(K).$$

P3. Pour $K, K' \in \mathcal{B}_n$ tels que $K \subset K'$ et $\phi(K') \in K$, on a $\phi(K') = \phi(K)$.

P4. Pour tout $K \in \mathcal{B}_n$ et tous indices distincts i, j , $\phi(K[i, j]) = \phi(K)[i, j]$.

18. Associer à chacune des propriétés P1, P2, P3, P4 l'une des interprétations suivantes et justifier brièvement : symétrie, optimalité, invariance par changement d'échelle, invariance par élimination d'options non pertinentes.

19. Montrer que ϕ^* , définie en 13, vérifie P1, P2, P3 et P4.

20. Soit ϕ une règle satisfaisant P1, P2, P3 et P4.

20. (a) On pose

$$K_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^n x_i \leq n\}.$$

À l'aide de P1 et P4, montrer que $\phi(K_0) = \mathbf{1}$.

20. (b) Soit $K \in \mathcal{B}_n$ et soit F l'ensemble défini en 13. À l'aide de P3 et de 17, montrer que $\phi(F) = \mathbf{1}$. En déduire $\phi(K) = \phi^*(K)$. Conclure.