



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques

2010

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

On reprend les notations du sujet. Le produit scalaire et la norme sont ceux de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

Partie I — Projection sur un convexe fermé

1. (a)

Si $u, v \in K$ et $t \in [0, 1]$, chacune des coordonnées de $tu + (1 - t)v$ est inférieure ou égale à $t + (1 - t) = 1$. Donc ce vecteur appartient à K , qui est convexe.

Les applications $(z_1, z_2) \mapsto z_1$ et $(z_1, z_2) \mapsto z_2$ sont continues. Leurs images réciproques de $] -\infty, 1]$ sont fermées, et K est leur intersection ; il est donc fermé.

Les vecteurs $(-r, 0)$, pour $r \geq 0$, appartiennent à K et ont une norme égale à r . Ainsi K n'est pas borné.

1. (b)

Pour $z \in K$, on a $\|x - z\|^2 = (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2$. Chaque coordonnée peut être choisie indépendamment dans $] -\infty, 1]$.

Pour un réel a , si $a \leq 1$, le minimum de $(a - t)^2$ sur $t \leq 1$ vaut 0 et est atteint uniquement en $t = a$. Si $a > 1$, alors $a - t \geq a - 1 > 0$ pour $t \leq 1$, donc le minimum vaut $(a - 1)^2$ et est atteint uniquement en $t = 1$.

En appliquant ce résultat aux deux coordonnées,

$$p(x) = (\min(x_1, 1), \min(x_2, 1)).$$

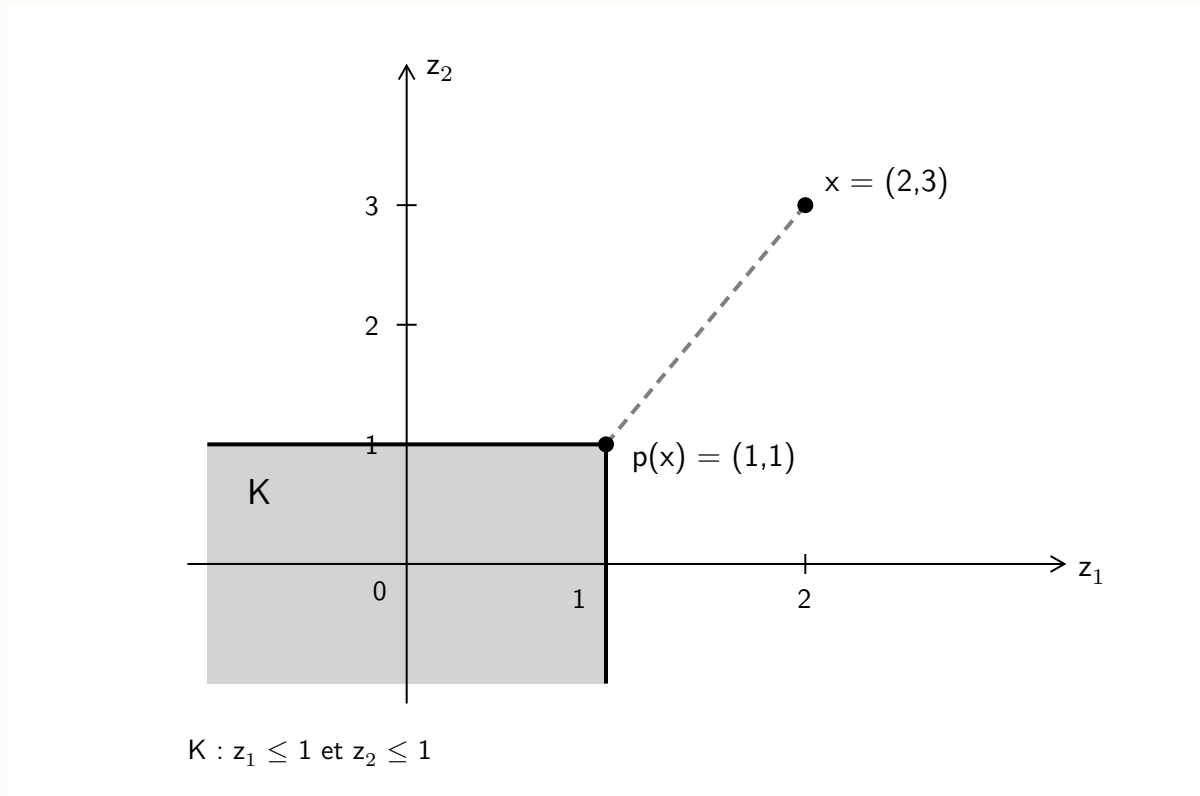
Ce vecteur appartient à K et minimise la somme des deux carrés ; il réalise donc la distance minimale. L'unicité du choix dans chaque coordonnée prouve celle de la projection.

En particulier,

$$\|x - p(x)\| = \sqrt{\max(x_1 - 1, 0)^2 + \max(x_2 - 1, 0)^2}.$$

1. (c)

Pour illustrer le cas où les deux coordonnées dépassent 1, choisissons $x = (2, 3)$. La formule précédente donne $p(x) = (1, 1)$. La zone grisée représente la portion visible de K ; ce convexe se prolonge indéfiniment vers la gauche et vers le bas.



1. (d)

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

La formule de 1. (b) donne directement

Python

```
import numpy as np

def distance(x1, x2):
    d1 = max(x1 - 1, 0)
    d2 = max(x2 - 1, 0)
    return np.sqrt(d1 ** 2 + d2 ** 2)
```

Les variables d_1 et d_2 sont les coordonnées de $x - p(x)$. La fonction renvoie leur norme euclidienne.

Le code a été exécuté : pour $(2, 3)$, il renvoie $\sqrt{5} \simeq 2,23606798$; pour $(0,5, 2)$ et $(2, 0,5)$, il renvoie 1. Ces résultats correspondent à la formule exacte de la distance.

1. (e)

Posons $p = p(x)$ et $h = x - p$. Pour chaque $i \in \{1, 2\}$, si $x_i \leq 1$, alors $p_i = x_i$ et $h_i = 0$. Si $x_i > 1$, alors $p_i = 1$, $h_i = x_i - 1 > 0$ et, pour $z \in K$, $z_i - p_i = z_i - 1 \leq 0$.

Dans les deux cas, $(z_i - p_i)h_i \leq 0$. En additionnant,

$$\langle z - p, x - p \rangle = \sum_{i=1}^2 (z_i - p_i)h_i \leq 0.$$

1. (f)

L'inégalité précédente donne $\langle h, z \rangle \leq \langle h, p \rangle$ pour tout $z \in K$. Comme $x \notin K$ et $p \in K$, le vecteur $h = x - p$ est non nul. Donc

$$\langle h, x \rangle - \langle h, p \rangle = \langle h, x - p \rangle = \|h\|^2 > 0.$$

En choisissant

$$c = \frac{\langle h, p \rangle + \langle h, x \rangle}{2},$$

on obtient $\langle h, z \rangle \leq \langle h, p \rangle < c < \langle h, x \rangle$. Ce réel convient pour tous les vecteurs $z \in K$.

2. (a)

Si $u, v \in E$ et $t \in [0, 1]$, le vecteur $tu + (1 - t)v$ est une combinaison linéaire de deux éléments du sous-espace vectoriel E , donc appartient à E . Ainsi E est convexe.

La fermeture de E est admise dans le sujet.

2. (b)

Posons $a = (1, 1, -1, -1)$ et $s = \langle a, x \rangle = x_1 + x_2 - x_3 - x_4$. On a $\|a\|^2 = 4$ et $s \neq 0$ car $x \notin E$.

Méthode 1 — Décomposition orthogonale.

L'hyperplan est $E = a^\perp$, donc $E^\perp = \text{Vect}(a)$. La décomposition orthogonale de x est

$$x = \left(x - \frac{s}{4}a\right) + \frac{s}{4}a.$$

Le premier terme appartient à E car son produit scalaire avec a vaut $s - (s/4) \times 4 = 0$.
Le second appartient à $E^\perp$.

Le projecteur orthogonal donne donc

$$p(x) = x - \frac{s}{4}a = \left(x_1 - \frac{s}{4}, x_2 - \frac{s}{4}, x_3 + \frac{s}{4}, x_4 + \frac{s}{4}\right).$$

Pour tout $w \in E$, les vecteurs $x - p(x)$ et $p(x) - w$ sont orthogonaux. Pythagore donne $\|x - w\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - w\|^2$, ce qui prouve le minimum et son unicité. La distance vaut

$$\min_{w \in E} \|x - w\| = \left\| \frac{s}{4}a \right\| = \frac{|s|}{2}.$$

Méthode 2 — Minoration par Cauchy-Schwarz.

Pour tout $w \in E$, on a $\langle a, x - w \rangle = s$. Cauchy-Schwarz donne

$$|s| \leq \|a\| \|x - w\| = 2 \|x - w\|, \text{ donc } \|x - w\| \geq |s|/2.$$

Le vecteur $w_0 = x - (s/4)a$ appartient à E et atteint cette borne. Il est donc une projection. Si une autre projection atteignait la borne, l'égalité dans Cauchy-Schwarz imposerait $x - w$ colinéaire à a . Son produit scalaire avec a étant s , on aurait nécessairement $x - w = (s/4)a$ et $w = w_0$.

La première méthode calcule le projecteur à partir du supplémentaire orthogonal. La seconde prouve la distance par une borne atteinte et le cas d'égalité.

3. (a)

L'inégalité triangulaire donne, pour $z, w \in K$,

$$|\|x - z\| - \|x - w\|| \leq \|z - w\|.$$

Ainsi $|f(z) - f(w)| \leq \|z - w\|$. En particulier, si $\|z - w\| < \varepsilon$, alors $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$. La fonction f est continue sur K .

3. (b)

La boule B_0 est fermée et bornée, et K est fermé. Leur intersection K' est donc fermée ; elle est bornée puisqu'elle est incluse dans B_0 .

Elle est aussi non vide : le point z_0 appartient à K et vérifie $\|x - z_0\| \leq \|x - z\|$, donc appartient à B_0 et à K' .

3. (c)

Rectification locale de l'énoncé : le minimum défini à cette étape porte sur K' , et non encore sur K . Son caractère global sur K est établi à la question suivante.

La restriction de f à K' est continue. Le sous-ensemble K' de $\mathbb{R}^n$ est non vide, fermé et borné. Le théorème d'existence des extrema d'une fonction continue sur une telle partie donne $\hat{z} \in K'$ tel que

$$f(\hat{z}) = \min_{z \in K'} f(z).$$

3. (d)

Si $z \in K'$, la définition de $\hat{z}$ donne $\|x - z\| \geq \|x - \hat{z}\|$.

Si $z \in K \setminus K'$, on a $z \notin B_0$, donc $\|x - z\| > \|x - z_0\|$. Or $z_0 \in K'$ et $\hat{z}$ minimise f sur K' , d'où $\|x - z_0\| \geq \|x - \hat{z}\|$.

L'inégalité demandée vaut donc pour tout $z \in K$. Le vecteur $\hat{z} \in K$ réalise la distance minimale : une projection de x sur K existe.

4. (a)

Posons $U = x - a$ et $V = x - b$. Alors $x - (a + b)/2 = (U + V)/2$ et $a - b = V - U$. Le développement du produit scalaire donne

$$\|U + V\|^2 = \|U\|^2 + 2\langle U, V \rangle + \|V\|^2,$$

$$\|V - U\|^2 = \|U\|^2 - 2\langle U, V \rangle + \|V\|^2.$$

En additionnant puis en divisant par 4,

$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{4}\|a-b\|^2 = \frac{1}{2}\|x-a\|^2 + \frac{1}{2}\|x-b\|^2.$$

4. (b)

Comme K est convexe et $u, v \in K$, leur milieu appartient à K . La définition de d impose $\|x - (u + v)/2\| \geq d$.

L'identité de 4. (a), appliquée à u, v , donne

$$\left\|x - \frac{u+v}{2}\right\|^2 + \frac{1}{4}\|u-v\|^2 = d^2.$$

Le premier terme est au moins d^2 ; le second est positif ou nul. On obtient donc $\|u - v\|^2 = 0$, soit $u = v$.

La projection dont l'existence a été prouvée en 3 est ainsi unique.

5. (a)

Pour $z \in K$ et $t \in [0, 1]$, la convexité donne $tz + (1 - t)p(x) \in K$. Le vecteur $p(x)$ minimise la distance à x sur K , donc

$$\|x - p(x)\| \leq \|x - (tz + (1 - t)p(x))\|.$$

Ces normes sont non négatives ; leur élévation au carré préserve l'inégalité et donne celle demandée.

5. (b)

Posons $p = p(x)$, $a = x - p$ et $b = z - p$. La question précédente s'écrit $\|a\|^2 \leq \|a - tb\|^2$. En développant,

$$0 \leq -2t\langle a, b \rangle + t^2\|b\|^2.$$

Pour $0 < t \leq 1$, on peut diviser par t et obtenir $2\langle a, b \rangle \leq t\|b\|^2$. En faisant tendre t vers 0 par valeurs positives, le membre de droite tend vers 0. Ainsi

$$\langle z - p(x), x - p(x) \rangle \leq 0.$$

5. (c)

Pour $z \in K$, on développe

$$\|x - z\|^2 = \|(x - y) - (z - y)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|z - y\|^2 - 2\langle x - y, z - y \rangle.$$

L'hypothèse rend le dernier terme positif ou nul. On obtient $\|x - z\|^2 \geq \|x - y\|^2$, puis $\|x - z\| \geq \|x - y\|$. Comme $y \in K$, il réalise la distance minimale et, par unicité, $y = p(x)$.

On a donc la caractérisation

$$y = p(x) \iff y \in K \text{ et } \langle z - y, x - y \rangle \leq 0 \text{ pour tout } z \in K.$$

5. (d)

Le vecteur $h = x - p(x)$ est non nul, car $x \notin K$. On a

$$\langle h, x \rangle - \langle h, p(x) \rangle = \|h\|^2 > 0.$$

De plus, 5. (b) donne $\langle h, z \rangle \leq \langle h, p(x) \rangle$ pour tout $z \in K$. En prenant

$$c = \frac{\langle h, p(x) \rangle + \langle h, x \rangle}{2},$$

on obtient $\langle h, z \rangle < c < \langle h, x \rangle$. Les ensembles K et $\{x\}$ sont convexes et le vecteur $h = x - p(x)$ les sépare au sens défini dans le préambule.

Partie II — Un cas particulier

6.

Posons

$$q(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^2.$$

C'est une fonction polynomiale continue; ainsi $K = q^{-1}(] - \infty, 1])$ est fermé. Il est non vide puisque $0 \in K$.

Soit $\alpha_{\min} = \min_i \alpha_i > 0$. Pour $z \in K$, on a $\alpha_{\min} \|z\|^2 \leq q(z) \leq 1$, donc $\|z\| \leq 1/\sqrt{\alpha_{\min}}$. Le sous-ensemble K est donc borné.

Méthode 1 — Identité quadratique pour la convexité.

Pour $u, v \in K$ et $t \in [0, 1]$, le développement des carrés donne

$$q(tu + (1-t)v) = tq(u) + (1-t)q(v) - t(1-t)q(u-v).$$

Le dernier terme soustrait est positif ou nul. Donc $q(tu + (1-t)v) \leq t + (1-t) = 1$, et $tu + (1-t)v \in K$. Ainsi K est convexe.

Méthode 2 — Transformation vers la boule unité.

Posons $D = \text{Diag}(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$. On a $q(z) = \|Dz\|^2$. Pour $u, v \in K$, l'inégalité triangulaire donne

$$\|D(tu + (1-t)v)\| \leq t\|Du\| + (1-t)\|Dv\| \leq 1.$$

Cela prouve à nouveau la convexité. La première preuve développe la forme quadratique; la seconde reconnaît une boule après une transformation linéaire.

7. (a)

La fonction

$$f(z) = \sum_i (x_i - z_i)^2$$

est polynomiale sur $\mathbb{R}^n$, donc de classe C^∞ . Sa restriction à K_1 est en particulier de classe C^1 .

Le sous-ensemble $K_1 = \{z \mid q(z) < 1\}$ est ouvert par continuité de q et la propriété rappelée dans le sujet. Les dérivées sont

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(z) = 2(z_i - x_i), \quad \nabla f(z) = 2(z - x).$$

Sa hessienne, sur tout $\mathbb{R}^n$, est $2I_n$.

7. (b)

Un point critique de la restriction à l'ouvert K_1 doit vérifier $\nabla f(z) = 0$, donc $z = x$. Or $x \notin K$, donc $x \notin K_1$. Il n'existe aucun point critique dans K_1 .

La projection $p(x)$ existe et est unique par la partie I. Elle minimise f sur K , car minimiser une distance non négative ou son carré est équivalent.

Si $p(x) \in K_1$, elle serait un minimum local de la fonction différentiable sur cet ouvert et

vérifierait la condition nécessaire $\nabla f(p(x)) = 0$, ce qui est impossible. Comme $K = K_0 \cup K_1$, on a donc $p(x) \in K_0$.

7. (c)

Supposons qu'une coordonnée p_i de $p = p(x)$ soit négative. Remplaçons-la par $-p_i > 0$, sans changer les autres coordonnées, pour obtenir y . La valeur de q ne change pas, donc $y \in K$.

Si $a = -p_i > 0$, la différence entre les carrés des distances est

$$\|x - p\|^2 - \|x - y\|^2 = (x_i + a)^2 - (x_i - a)^2 = 4x_i a > 0,$$

puisque $x_i > 0$. Cela contredit le caractère minimal de p . Ainsi toutes ses coordonnées sont positives ou nulles.

Elles ne sont pas toutes nulles, car $p \in K_0$ donne

$$\sum_i \alpha_i p_i^2 = 1.$$

8. (a)

Rectification locale de l'énoncé : l'ouvert Ω est défini directement dans $\mathbb{R}^{n-1}$ par $z_i > 0$ et

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i^2 < 1.$$

La référence initiale à $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ pour un vecteur de $n - 1$ coordonnées est ainsi remplacée par l'inégalité correspondante.

Puisque $(z_1^*, \dots, z_{n-1}^*) \in \Omega$, le réel

$$1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (z_i^*)^2$$

est strictement positif. Avec $\alpha_n > 0$, la définition de Ψ impose $z_n^* > 0$.

On a également

$$\alpha_n (z_n^*)^2 = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (z_i^*)^2,$$

soit $q(z^*) = 1$. Ainsi $z^* \in K_0$. Ses n coordonnées sont toutes strictement positives.

8. (b)

Le radicand de Ψ est strictement positif sur Ω . La fonction racine carrée y est de classe C^∞ ; par composition, Ψ et H sont de classe C^∞ sur cet ouvert.

Pour $1 \leq i < n$, la dérivation donne

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z_i} = -\frac{\alpha_i z_i}{\alpha_n \Psi},$$

puis

$$\frac{\partial H}{\partial z_i} = 2(z_i - x_i) + 2(x_n - \Psi) \frac{\alpha_i z_i}{\alpha_n \Psi}.$$

Au point critique, ces dérivées sont nulles. En utilisant $\Psi(z_1^*, \dots, z_{n-1}^*) = z_n^*$, on obtient

$$x_i = z_i^* \left(1 + \frac{\alpha_i}{\alpha_n} \left(\frac{x_n}{z_n^*} - 1 \right) \right) = z_i^* (1 + \lambda \alpha_i).$$

Pour $i = n$, la définition de λ donne directement $x_n = z_n^* (1 + \lambda \alpha_n)$.

Comme chaque x_i et chaque z_i^* est strictement positif, $1 + \lambda \alpha_i = x_i / z_i^* > 0$. On peut donc diviser et conclure

$$z_i^* = \frac{x_i}{1 + \lambda \alpha_i} \quad (1 \leq i \leq n).$$

Cette preuve utilise la paramétrisation explicite donnée par Ψ , sans résultat général sur les contraintes non linéaires.

8. (c)

Les inégalités $1 + \lambda\alpha_i > 0$ et $\alpha_i > 0$ donnent $\lambda > -1/\alpha_i$ pour chaque i .

Le maximum $\beta = \max_i(-1/\alpha_i)$ est atteint, car la famille est finie. L'une de ces inégalités est donc $\lambda > \beta$.

8. (d)

Posons

$$G(y) = \sum_i \alpha_i x_i^2 / (1 + \alpha_i y)^2$$

pour $y > \beta$. Tous les dénominateurs $1 + \alpha_i y$ sont strictement positifs sur cet intervalle. La fonction est continue et dérivable, avec

$$G'(y) = -2 \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2 x_i^2}{(1 + \alpha_i y)^3} < 0.$$

Elle est donc strictement décroissante. Lorsque $y \rightarrow +\infty$, chacun de ses n termes tend vers 0, donc $G(y) \rightarrow 0$.

Choisissons un indice j tel que $\beta = -1/\alpha_j$. Quand $y \rightarrow \beta^+$, le dénominateur du terme d'indice j tend vers 0 par valeurs positives, alors que $\alpha_j x_j^2 > 0$. Ce terme tend vers $+\infty$ et les autres sont positifs, donc $G(y) \rightarrow +\infty$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie, il existe un unique $\lambda_0 \in]\beta, +\infty[$ tel que $G(\lambda_0) = 1$.

On a $\beta < 0$ et

$$G(0) = \sum_i \alpha_i x_i^2 > 1,$$

car $x \notin K$. Comme G est décroissante, l'égalité $G(\lambda_0) = 1$ impose $\lambda_0 > 0$.

La relation $q(z^*) = 1$ de 8. (a), associée aux coordonnées de 8. (b), donne $G(\lambda) = 1$.

L'unicité implique $\lambda = \lambda_0$. Ainsi

$$z_i^* = \frac{x_i}{1 + \lambda_0 \alpha_i} \quad (1 \leq i \leq n).$$

Ces expressions établissent aussi l'existence effective d'un point critique, au-delà de l'hypothèse provisoire de la question 8. En effet, définissons z_i^* par cette formule. Les coordonnées sont positives et $q(z^*) = G(\lambda_0) = 1$. Donc les $n - 1$ premières coordonnées appartiennent à Ω , leur valeur de Ψ est z_n^* , et les relations $x_i = z_i^*(1 + \lambda_0 \alpha_i)$ annulent les dérivées de H calculées en 8. (b).

9. (a)

On a $x_i - z_i^* = \lambda_0 \alpha_i z_i^*$ et $q(z^*) = 1$, avec $\lambda_0 > 0$.

Méthode 1 — Cauchy-Schwarz pondérée.

Appliquons Cauchy-Schwarz aux vecteurs de coordonnées $\sqrt{\alpha_i} z_i$ et $\sqrt{\alpha_i} z_i^*$. Pour $z \in K$,

$$\sum_i \alpha_i z_i z_i^* \leq \left(\sum_i \alpha_i z_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_i \alpha_i (z_i^*)^2 \right)^{1/2} \leq 1.$$

Ainsi

$$\langle z - z^*, x - z^* \rangle = \lambda_0 \left(\sum_i \alpha_i z_i z_i^* - 1 \right) \leq 0.$$

Méthode 2 — Développement de la contrainte quadratique.

La formule de développement donne

$$q(z) = q(z^*) + 2 \sum_i \alpha_i z_i^* (z_i - z_i^*) + q(z - z^*).$$

Comme $q(z) \leq 1 = q(z^*)$, on obtient

$$\sum_i \alpha_i z_i^* (z_i - z_i^*) \leq -\frac{1}{2} q(z - z^*) \leq 0.$$

En multipliant par $\lambda_0 > 0$, on retrouve l'inégalité demandée, avec même une majoration par $-(\lambda_0/2)q(z - z^*)$.

Dans les deux méthodes, $z^* \in K$ et l'inégalité vaut pour tout $z \in K$. La caractérisation de 5. (c) donne donc $z^* = p(x)$. La première méthode reconnaît une sphère après pondération ; la seconde exploite directement la différence des valeurs de la contrainte.

9. (b)

Posons $p = p(x) = z^*$ et $h = x - p$. La formule des coordonnées donne

$$\langle h, p \rangle = \lambda_0 \sum_i \alpha_i p_i^2 = \lambda_0,$$

$$\langle h, x \rangle = \lambda_0 \sum_i \frac{\alpha_i x_i^2}{1 + \lambda_0 \alpha_i}.$$

Le réel du sujet est donc exactement

$$c = \frac{\langle h, p \rangle + \langle h, x \rangle}{2}.$$

Comme $x \notin K$ et $p \in K$, $h \neq \mathbf{0}$ et $\langle h, x \rangle - \langle h, p \rangle = \|h\|^2 > 0$. La question 9. (a) donne $\langle h, z \rangle \leq \langle h, p \rangle$ pour tout $z \in K$.

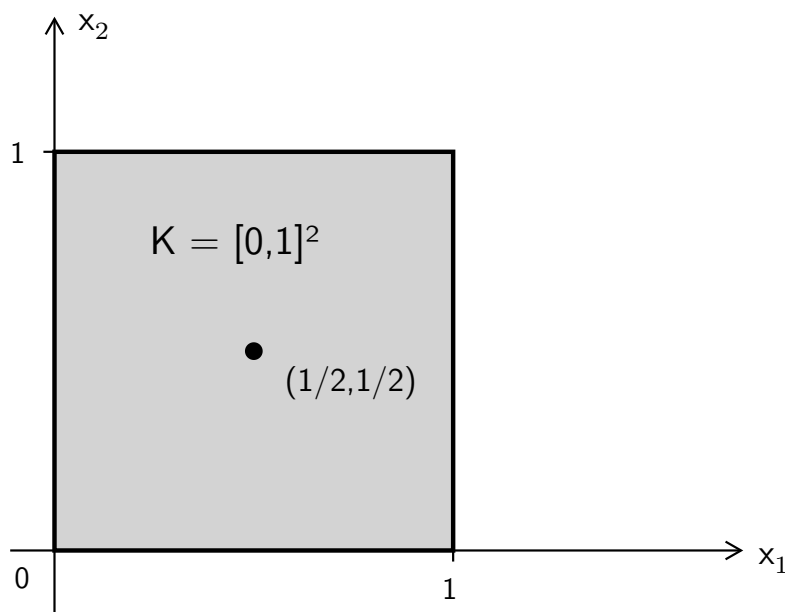
Par conséquent $\langle h, z \rangle < c < \langle h, x \rangle$, comme demandé.

Partie III — Une séparation de deux convexes

10.

On peut choisir $K = [0, 1]^2$. Ce carré est fermé, borné, convexe et contenu dans le quadrant positif. Il contient $(1/2, 1/2)$, dont les coordonnées sont strictement positives.

Si $x \in [0, 1]^2$ et $\mathbf{0} \leq y \leq x$, alors $0 \leq y_i \leq x_i \leq 1$ pour chaque coordonnée ; donc $y \in [0, 1]^2$. Les trois conditions définissant $\mathcal{B}_2$ sont satisfaites.



11.

Fixons $0 < a < b$, $t \in]0, 1[$ et $c = ta + (1 - t)b \in]a, b[$.

Méthode 1 — Comparaison des pentes par les accroissements finis.

La fonction $\ln$ est continue sur les segments considérés et dérivable sur leurs intérieurs.

Le théorème des accroissements finis donne $u \in]a, c[$ et $v \in]c, b[$ tels que

$$\frac{\ln c - \ln a}{c - a} = \frac{1}{u}, \quad \frac{\ln b - \ln c}{b - c} = \frac{1}{v}.$$

Comme $0 < u < v$, on a $1/u > 1/v$. Avec $c - a = (1 - t)(b - a)$ et $b - c = t(b - a)$, cela donne

$$t(\ln c - \ln a) > (1 - t)(\ln b - \ln c).$$

En regroupant, $\ln c > t \ln a + (1 - t) \ln b$, ce qui établit la stricte concavité.

Méthode 2 — Inégalité stricte avec la tangente.

Pour ce réel $c > 0$, posons $r(y) = \ln y - \ln c - (y - c)/c$. On a $r'(y) = 1/y - 1/c$, strictement positif pour $y < c$ et strictement négatif pour $y > c$. Ainsi r admet un maximum strict en c , de valeur 0.

Pour $y \neq c$, on obtient donc $\ln y < \ln c + (y - c)/c$. Appliquons cette inégalité à a et b , qui sont tous deux distincts de c , et multiplions par t et $1 - t$:

$$t \ln a + (1 - t) \ln b < \ln c + \frac{t(a - c) + (1 - t)(b - c)}{c} = \ln c.$$

La première preuve relie la concavité à la décroissance des pentes. La seconde emploie une tangente située strictement au-dessus du graphe hors du point de contact.

12. (a)

La fonction

$$g(x) = \prod_i x_i$$

est polynomiale, donc continue. L'ensemble $K \in \mathcal{B}_n$ est non vide, fermé et borné. Le théorème d'existence des extrema sur une telle partie de $\mathbb{R}^n$ donne un vecteur $u \in K$ où g atteint son maximum.

12. (b)

Par la condition (ii), il existe $a \in K$ dont toutes les coordonnées sont strictement positives. Donc $g(a) > 0$, et le maximum $g(u)$ vérifie $g(u) \geq g(a) > 0$.

Toutes les coordonnées de u sont positives ou nulles par (i). Si l'une était nulle, leur produit serait nul. Ainsi $u_i > 0$ pour chaque i .

12. (c)

Supposons que deux vecteurs distincts $u, v \in K$ réalisent le même maximum $M > 0$. Par 12. (b), toutes leurs coordonnées sont strictement positives. Leur milieu $w = (u + v)/2$ appartient à K par convexité.

Pour chaque coordonnée, la concavité de $\ln$ donne $\ln w_i \geq (\ln u_i + \ln v_i)/2$. Au moins une coordonnée de u diffère de celle de v , et l'inégalité est alors stricte par 11.

En additionnant,

$$\ln g(w) = \sum_i \ln w_i > \frac{1}{2} \sum_i \ln u_i + \frac{1}{2} \sum_i \ln v_i = \ln M.$$

L'exponentielle étant strictement croissante, $g(w) > M$, ce qui contredit la définition du maximum. Celui-ci est donc atteint en un unique vecteur.

13. (a)

Notons $u = \phi^*(K)$. Ses coordonnées sont strictement positives par 12. (b). La transformation $T(x) = (x_1/u_1, \dots, x_n/u_n)$ est linéaire et bijective; $F = T(K)$.

Elle conserve la convexité par linéarité et la fermeture par la propriété particulière admise dans le sujet. Elle conserve aussi le caractère borné : si $\|x\| \leq R$ sur K et $M = \max_i(1/u_i)$, alors $\|T(x)\|^2 \leq M^2\|x\|^2 \leq M^2R^2$.

Les coordonnées des vecteurs de F sont positives ou nulles. De plus, $u \in K$ et $T(u) = \mathbf{1}$, donc F contient un vecteur strictement positif.

Enfin, si $y = T(x) \in F$ et $\mathbf{0} \leq z \leq y$, on a $\mathbf{0} \leq u \otimes z \leq x$, car tous les u_i sont positifs. Par la condition (iii) pour K , $u \otimes z \in K$. En appliquant T , on obtient $z \in F$.

Ainsi les trois conditions sont satisfaites et $F \in \mathcal{B}_n$.

13. (b)

Pour $y = T(x) \in F$, avec $x \in K$,

$$\prod_i y_i = \frac{\prod_i x_i}{\prod_i u_i} = \frac{g(x)}{g(u)} \leq 1.$$

Le dénominateur est strictement positif par 12. (b), et l'inégalité découle de la maximalité de u .

14. (a)

Chaque demi-espace $\{x \mid x_i \geq 0\}$ est fermé, car l'application coordonnée est continue. La fonction polynomiale g est également continue, donc $\{x \mid g(x) \geq 1\} = g^{-1}([1, +\infty[)$ est fermé.

L'ensemble A est l'intersection de ces $n + 1$ parties fermées. Il est donc fermé. Il est non vide, car $\mathbf{1} \in A$.

14. (b)

Si $x \in A$, toutes ses coordonnées sont positives ou nulles et leur produit est au moins 1. Aucune coordonnée ne peut donc être nulle ; toutes sont strictement positives.

Pour $x, y \in A$ et $0 < t < 1$, le vecteur $z = tx + (1 - t)y$ a des coordonnées positives. La concavité de $\ln$, déduite de 11, donne pour chaque i

$$\ln z_i \geq t \ln x_i + (1 - t) \ln y_i.$$

Si $x_i = y_i$, il y a égalité ; sinon, l'inégalité est même stricte. En additionnant,

$$\ln g(z) \geq t \ln g(x) + (1 - t) \ln g(y) \geq 0.$$

Donc $g(z) \geq 1$ et $z \in A$. Pour $t = 0$ ou $t = 1$, l'appartenance est immédiate puisque $z = y$ ou $z = x$. Ainsi A est convexe.

15.

On a $\mathbf{1} \in F$ par 13. (a) et $\mathbf{1} \in A$, donc $\mathbf{1} \in A \cap F$.

Réciproquement, si $y \in A \cap F$, 13. (b) et la définition de A donnent

$$\prod_i y_i = 1.$$

Le vecteur $x = u \otimes y \in K$ vérifie alors $g(x) = g(u)$. L'unicité de 12. (c) impose $x = u$. Comme les u_i sont non nuls, $y_i = 1$ pour tout i .

Ainsi $A \cap F = \{\mathbf{1}\}$.

Question adaptée au programme actuel. La proposition de séparation admise a été rectifiée en exigeant que chacun des deux convexes contienne une boule ouverte de rayon strictement positif. Cette condition est vérifiée ici.

En effet, $F \in \mathcal{B}_n$ et $\mathbf{1} \in F$; la condition (iii) donne $[0, 1]^n \subset F$. La boule ouverte de centre $\mathbf{1}/2$ et de rayon $1/2$ est incluse dans ce cube : une distance strictement inférieure à $1/2$ implique que chaque coordonnée est strictement comprise entre 0 et 1.

L'ensemble A contient la boule ouverte de centre $2\mathbf{1}$ et de rayon $1/2$. Les coordonnées

d'un vecteur de cette boule sont toutes supérieures à $3/2$, donc leur produit est supérieur à 1.

Résultat admis dans cette version adaptée : pour deux convexes fermés contenant chacun une boule ouverte de rayon strictement positif, dont l'intersection est réduite à $\{x_0\}$, il existe $h \neq 0$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $\langle h, y \rangle \leq c \leq \langle h, x \rangle$ pour tous y dans le premier convexe et x dans le second.

On l'applique aux convexes fermés F et A . Comme 1 appartient aux deux, on obtient $\langle h, 1 \rangle \leq c \leq \langle h, 1 \rangle$, donc $c = \langle h, 1 \rangle$. Par conséquent,

$$\langle h, y \rangle \leq \langle h, 1 \rangle \leq \langle h, x \rangle \quad (x \in A, y \in F).$$

Il s'agit ici d'inégalités larges ; on utilise la proposition admise dans la partie III, distincte de la séparation stricte définie au début du problème.

16. (a)

Supposons $h_i \leq 0$ pour tout i . Comme $h \neq 0$, au moins un coefficient est strictement négatif, donc

$$S = \sum_i h_i < 0.$$

La suite est $v_k = kS$, d'où $v_k \rightarrow -\infty$. Or pour chaque entier $k \geq 1$, le vecteur $k1$ appartient à A : ses coordonnées sont positives et leur produit est $k^n \geq 1$.

La question 15 impose donc $v_k \geq \langle h, 1 \rangle = S$ pour tout $k \geq 1$, ce qui contredit la limite $-\infty$. Il existe ainsi un indice i_0 tel que $h_{i_0} > 0$.

16. (b)

Supposons $h_{i_1} \leq 0$. On a $i_1 \neq i_0$ puisque $h_{i_0} > 0$. Toutes les coordonnées de $w^{(k)}$ sont positives et leur produit vaut $(1/k) \times k = 1$, donc $w^{(k)} \in A$.

La suite de produits scalaires s'écrit

$$z_k = \frac{h_{i_0}}{k} + kh_{i_1} + \sum_{i \notin \{i_0, i_1\}} h_i.$$

Si $h_{i_1} < 0$, on a $z_k \rightarrow -\infty$, contrairement à $z_k \geq \langle h, \mathbf{1} \rangle$ donné par 15.

Si $h_{i_1} = 0$, alors

$$z_k \rightarrow \sum_{i \notin \{i_0, i_1\}} h_i = \sum_i h_i - h_{i_0} < \sum_i h_i = \langle h, \mathbf{1} \rangle.$$

Une suite minorée par $\langle h, \mathbf{1} \rangle$ ne peut converger vers une limite strictement inférieure à ce minorant. On obtient à nouveau une contradiction.

Les deux cas sont exclus ; toutes les coordonnées de h sont donc strictement positives.

17.

Fixons deux indices distincts i, j . On cherche à établir $h_i = h_j$ en faisant varier deux coordonnées positives dont le produit reste égal à 1.

Méthode 1 — Choix explicite d'un vecteur de A .

Posons $t = \sqrt{h_j/h_i} > 0$ et choisissons $w \in A$ avec $w_i = t$, $w_j = 1/t$ et toutes les autres coordonnées égales à 1. Le produit des coordonnées vaut 1.

On a

$$\langle h, w \rangle = 2\sqrt{h_i h_j} + \sum_{\ell \notin \{i, j\}} h_\ell.$$

Si $h_i \neq h_j$, alors $(\sqrt{h_i} - \sqrt{h_j})^2 > 0$, donc $2\sqrt{h_i h_j} < h_i + h_j$. On aurait $\langle h, w \rangle < \langle h, \mathbf{1} \rangle$, ce qui contredit 15. Ainsi $h_i = h_j$.

Méthode 2 — Dérivée le long d'une paramétrisation réelle.

Pour $t > 0$, le vecteur ayant les coordonnées t et $1/t$ aux positions i, j , et 1 ailleurs, appartient à A . Par 15, la fonction

$$r(t) = h_i t + \frac{h_j}{t} + \sum_{\ell \notin \{i, j\}} h_\ell$$

admet un minimum global en $t = 1$. Elle est dérivable sur l'ouvert $]0, +\infty[$; la condition nécessaire en ce point intérieur donne $r'(1) = 0$.

Comme $r'(t) = h_i - h_j/t^2$, on obtient $h_i - h_j = 0$. Cette méthode réduit la contrainte de produit à une variable réelle; elle n'utilise aucun théorème général sur des contraintes non linéaires.

Les indices étant quelconques, $h = a\mathbf{1}$ avec $a > 0$ par 16. En remplaçant dans 15 et en divisant par a , on obtient

$$\sum_i y_i \leq n \leq \sum_i x_i \quad (x \in A, y \in F).$$

Partie IV — La solution de Nash

18.

Propriété	Interprétation	Justification
P1	Optimalité	L'accord est réalisable et ne peut améliorer tous les gains sans en diminuer aucun.
P2	Invariance par changement d'échelle	Chaque gain et la solution sont multipliés par la même constante positive.
P3	Invariance par élimination d'options non pertinentes	Supprimer des accords sans supprimer la solution ne change pas celle-ci.
P4	Symétrie	Échanger les personnes échange les coordonnées de la solution.

Dans P1, un vecteur concurrent doit avoir tous ses gains au moins aussi élevés et au moins un gain strictement plus élevé. Cette propriété exprime précisément l'efficacité de Pareto.

19.

Pour tout $K \in \mathcal{B}_n$, la règle $\phi^*(K)$ est bien définie et a des coordonnées strictement positives par 12.

Les transformations intervenant dans P2 et P4 conservent la classe $\mathcal{B}_n$. Pour une multiplication par des coordonnées positives, les vérifications sont celles de 13. (a) : convexité, fermeture, bornitude, positivité et propriété (iii) se conservent. Une permutation de coordonnées conserve également chacune de ces propriétés ; elle est linéaire, conserve la norme et l'ordre coordonnée par coordonnée après la même permutation.

P1.

Posons $u = \phi^*(K) \in K$. Si $x \in K$, $x \geq u$ et $x \neq u$, alors tous les u_i sont strictement

positifs et tous les rapports x_i/u_i sont au moins 1, avec au moins un rapport strictement supérieur à 1.

Donc

$$g(x)/g(u) = \prod_i (x_i/u_i) > 1,$$

ce qui contredit la maximalité de u . La propriété P1 est vérifiée.

P2.

Soit a de coordonnées strictement positives. L'application $x \mapsto a \otimes x$ est une bijection de K sur $a \otimes K$. Pour tout $x \in K$,

$$g(a \otimes x) = \left(\prod_i a_i \right) g(x).$$

Le facteur est strictement positif et indépendant de x . Le maximum sur $a \otimes K$ est donc atteint en $a \otimes u$. Par unicité,

$$\phi^*(a \otimes K) = a \otimes \phi^*(K).$$

P3.

Supposons $K \subset K'$ et $u' = \phi^*(K') \in K$. Tout $x \in K$ appartient à K' , donc $g(x) \leq g(u')$. Le vecteur u' réalise ainsi le maximum sur K . Par l'unicité de 12. (c), $u' = \phi^*(K)$.

Donc $\phi^*(K') = \phi^*(K)$, comme demandé.

P4.

Notons T l'échange des coordonnées i, j . Cette transformation est sa propre inverse. La définition $K[i, j] = \{x \mid T(x) \in K\}$ donne donc $K[i, j] = T(K)$.

Le produit des coordonnées est invariant sous cet échange : $g(T(x)) = g(x)$. La bijection $T : K \rightarrow K[i, j]$ transporte donc l'unique maximum u vers $T(u)$. Ainsi

$$\phi^*(K[i, j]) = \phi^*(K)[i, j].$$

Les quatre propriétés sont établies.

20. (a)

On commence par vérifier que K_0 appartient au domaine de ϕ . Il est fermé comme intersection de demi-espaces fermés, et convexe car ses contraintes sont linéaires. Ses coordonnées sont comprises entre 0 et n , donc il est borné. Il contient $\mathbf{1}$, dont la somme des coordonnées vaut n . Enfin, si $\mathbf{0} \leq y \leq x \in K_0$, on a

$$\sum_i y_i \leq \sum_i x_i \leq n,$$

donc $y \in K_0$.

Ainsi $K_0 \in \mathcal{B}_n$. Il est invariant par tout échange de deux coordonnées. Par P4, $\phi(K_0)$ est également invariant sous chacun de ces échanges. Toutes ses coordonnées sont donc égales : $\phi(K_0) = a\mathbf{1}$.

Par P1, $a\mathbf{1} \in K_0$, donc $0 \leq a \leq 1$. Si $a < 1$, le vecteur $\mathbf{1} \in K_0$ serait distinct de $a\mathbf{1}$ et le dominerait coordonnée par coordonnée, contrairement à P1.

Ainsi $a = 1$ et $\phi(K_0) = \mathbf{1}$.

20. (b)

Par 13. (a), $F \in \mathcal{B}_n$ et $\mathbf{1} \in F$. Les vecteurs de F sont positifs ou nuls, et 17 donne

$$\sum_i y_i \leq n$$

pour tout $y \in F$. Donc $F \subset K_0$.

La question 20. (a) donne $\phi(K_0) = \mathbf{1} \in F$. En appliquant P3 à l'inclusion $F \subset K_0$, on obtient

$$\phi(F) = \phi(K_0) = \mathbf{1}.$$

Notons $u = \phi^*(K)$, dont toutes les coordonnées sont strictement positives. La définition de F donne $K = u \otimes F$. Par P2,

$$\phi(K) = \phi(u \otimes F) = u \otimes \phi(F) = u \otimes \mathbf{1} = u = \phi^*(K).$$

Cette égalité vaut pour tout $K \in \mathcal{B}_n$. La règle ϕ^* est donc l'unique règle satisfaisant P1, P2, P3 et P4. Elle attribue au problème K l'accord qui maximise le produit des gains ; c'est la solution de Nash décrite par le problème.

Relevé des adaptations

- Préambule : propriétés topologiques particulières nécessaires explicitées pour les ouverts définis par une inégalité stricte, les intersections finies de fermés, les boules fermées et les changements de coordonnées par permutation ou multiplication par des constantes non nulles.
- 1. (d) : code adapté en Python. La fonction demandée calcule la même distance euclidienne avec les coordonnées positives de $x - p(x)$.
- 3. (c) : le minimum de cette étape est pris sur K' , en remplacement de la mention prématurée de K dans le PDF. La question 3. (d) prouve ensuite qu'il est aussi global sur K .
- 8, définition de Ω : remplacement de l'appartenance d'un vecteur de $\mathbb{R}^{n-1}$ à $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ par l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i^2 < 1,$$

qui est la condition nécessaire à la paramétrisation.

- Préambule de la partie III et 15 : la proposition de séparation admise est rectifiée en ajoutant que chacun des deux convexes contient une boule ouverte de rayon strictement positif. Sans hypothèse supplémentaire, la proposition originale est

fausse : $\mathbb{R}^n$ et $\{0\}$ ont une intersection réduite à un point, mais aucun vecteur non nul ne majore son produit scalaire sur tout $\mathbb{R}^n$. Les nouvelles hypothèses sont établies pour F et A en 15 ; les conclusions ultérieures sont préservées.

- 1. (c) et 10 : les figures demandées dans le corrigé sont intégrées en SVG, à partir d'exemples explicitement choisis et de leurs coordonnées exactes. Le PDF ne contient pas de figure source à retranscrire.