



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1993

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Partie I

1. (a) Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

1. (b) En déduire que :

$$e^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} du.$$

2. (b) Établir l'encadrement :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} du \leq \frac{1}{n!}.$$

2. (c) En conclure que :

$$e^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Dans toute la suite, N désigne un entier naturel non nul.

Partie II

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N , notées $B_1, \dots, B_N$. On effectue N tirages indépendants avec remise, chaque boule étant équiprobable à chaque tirage. Pour $i \in \{1, \dots, N\}$, X_i vaut 1 si la boule B_i sort lors du i -ième tirage, et 0 sinon. On pose :

$$S_N = X_1 + \dots + X_N.$$

1. Déterminer l'espérance de X_i ; en déduire celle de S_N .
2. Pour tout entier naturel k , on note $p(N, k) = P(S_N = k)$.
2. (a) Calculer $p(N, k)$ pour $k > N$. Montrer que, pour $0 \leq k \leq N$:

$$p(N, k) = \binom{N}{k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-k} \frac{1}{N^k}.$$

Dans cette formule, un facteur de puissance 0 vaut 1, y compris lorsque sa base est 0.

2. (b) À k fixé, déterminer la limite de $p(N, k)$ lorsque $N \rightarrow +\infty$.

Partie III

Soit E_N un ensemble à N éléments. Une permutation σ de E_N est une bijection de E_N sur lui-même. Un élément a est un point fixe de σ si $\sigma(a) = a$.

Pour $0 \leq p \leq N$, on note $F(N, p)$ le nombre de permutations de E_N ayant exactement p points fixes. On convient que $F(0, 0) = 1$.

1. (a) Montrer que $F(N, N) = 1$ et $F(N, N - 1) = 0$.

1. (b) Montrer que :

$$\sum_{k=0}^N F(N, k) = N!.$$

2. On pose $\omega_N = F(N, 0)$. Ainsi, ω_N est le nombre de permutations de E_N sans aucun point fixe. On convient que $\omega_0 = 1$.

2. (a) Montrer que, pour $0 \leq k \leq N$:

$$F(N, k) = \binom{N}{k} \omega_{N-k}.$$

2. (b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \frac{\omega_{N-k}}{(N-k)!} = 1.$$

2. (c) Par récurrence, établir :

$$\frac{\omega_N}{N!} = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!}.$$

2. (d) Déterminer la limite de $\omega_N/N!$ lorsque $N \rightarrow +\infty$.

On suppose désormais $N \geq 2$.

Partie IV

On considère à nouveau une urne contenant N boules $B_1, \dots, B_N$. On effectue N tirages aléatoires sans remise, avec équiprobabilité des ordres possibles de sortie. Pour $i \in \{1, \dots, N\}$, Y_i vaut 1 si B_i sort lors du i -ième tirage, et 0 sinon.

1. (a) Déterminer l'espérance de Y_i et celle de $Y_i Y_j$, pour $1 \leq i < j \leq N$.

1. (b) Déterminer la covariance de Y_i et Y_j , pour $1 \leq i < j \leq N$.

1. (c) Les variables Y_i et Y_j sont-elles indépendantes ?

2. On pose $T_N = Y_1 + \dots + Y_N$. Déterminer son espérance et sa variance.

3. Pour tout entier naturel k , on note $q(N, k) = P(T_N = k)$.

3. (a) Calculer $q(N, k)$ pour $k > N$. Montrer que, pour $0 \leq k \leq N$:

$$q(N, k) = \frac{\omega_{N-k}}{k!(N-k)!}.$$

3. (b) À k fixé, déterminer la limite de $q(N, k)$ lorsque $N \rightarrow +\infty$. Comparer avec II. 2. (b).

Partie V

1. À l'aide de III. 2. (c), montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$\omega_n = (n-1)(\omega_{n-1} + \omega_{n-2}).$$

2. Pour $0 \leq k \leq N$, on pose $\bar{q}(N, k) = q(N, N - k)$.
2. (a) Calculer $\bar{q}(N, 0)$ et $\bar{q}(N, 1)$.
2. (b) Pour $2 \leq k \leq N$, exprimer $\bar{q}(N, k)$ en fonction de $\bar{q}(N, k - 1)$ et $\bar{q}(N, k - 2)$.
3. Écrire un algorithme Python prenant N comme donnée et construisant la liste des valeurs $\bar{q}(N, k)$, pour $k = 0, \dots, N$. Minimiser le nombre d'opérations.

Pour calculer exactement les probabilités, on peut utiliser `from fractions import Fraction`: `Fraction(a, b)` représente le nombre rationnel exact a/b , pour des entiers a et b avec b non nul. Les additions, soustractions, multiplications et divisions conservent des valeurs rationnelles exactes lorsqu'elles portent sur ces objets et des entiers. L'expression `[a] * m` crée une liste de longueur m , initialisée avec la valeur a dans chaque case; les indices d'une liste de longueur m vont de 0 à $m - 1$.