



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1993

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Les trois parties du problème sont indépendantes.

Dans tout le problème, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, où $n \geq 2$, rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. On note v_1 le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes dans $\mathcal{B}$ sont toutes égales à 1.

On rappelle que $\mathbb{R}^n$ est somme directe de deux sous-espaces vectoriels F et G , ce qu'on note $\mathbb{R}^n = F \oplus G$, si tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in G$. L'application $p : x \mapsto y$ est alors un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, appelé projecteur sur F de direction G . L'application identique de $\mathbb{R}^n$ est notée Id .

On se propose d'étudier l'ensemble S_n des matrices stochastiques d'ordre n , c'est-à-dire des matrices $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont réels positifs ou nuls et tels que, pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$m_{i1} + m_{i2} + \dots + m_{in} = 1.$$

Ces matrices jouent un rôle important, notamment en calcul des probabilités.

Partie I : un premier exemple

On considère $a, b \in]0, 1[$ tels que $a + b = 1$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice stochastique

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer à quelle condition un vecteur $v = (x, y, z)$ appartient au noyau de $f - \text{Id}$; expliciter une base de ce sous-espace vectoriel.
1. (b) Montrer que (e_2, e_3) est une base de l'image de $f - \text{Id}$.

1. (c) Établir que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Im}(f - \text{Id})$.
1. (d) Soit p le projecteur sur $\text{Ker}(f - \text{Id})$ de direction $\text{Im}(f - \text{Id})$. Déterminer $p(v_1)$, puis $p(e_3)$, $p(e_2)$ et $p(e_1)$. Expliciter la matrice P associée à p dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. On considère la base $\mathcal{B}' = (v_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
3. (a) Déterminer la matrice M' associée à f dans la base $\mathcal{B}'$.
3. (b) Pour tout entier naturel non nul k , calculer par récurrence M^k .
3. (c) Déterminer la matrice de passage C de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer son inverse.
3. (d) Dédire de ces résultats l'expression de M^k , ainsi que sa limite lorsque $k \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les limites des coefficients de M^k .
Comparer cette limite à la matrice P obtenue dans la question 1.

Partie II : un second exemple

Dans cette partie, on suppose que $n \geq 3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice stochastique

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire $m_{ii} = 0$ pour tout i et $m_{ij} = 1/(n-1)$ pour $i \neq j$.

1. (a) Déterminer une base du noyau de $f - \text{Id}$.
1. (b) Montrer que $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n)$ est une famille libre d'éléments de l'image de $f - \text{Id}$, puis établir que c'en est une base.
1. (c) Établir que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Im}(f - \text{Id})$.
1. (d) Soit p le projecteur sur $\text{Ker}(f - \text{Id})$ de direction $\text{Im}(f - \text{Id})$. Déterminer $p(v_1)$, puis $p(e_1), p(e_2), \dots, p(e_n)$. Expliciter la matrice P associée à p dans la base $\mathcal{B}$.
1. (e) Soit q le projecteur sur $\text{Im}(f - \text{Id})$ de direction $\text{Ker}(f - \text{Id})$. Établir que $p + q = \text{Id}$ et que $p \circ q = q \circ p = 0$. Expliciter la matrice Q associée à q dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?
3. Exprimer M comme combinaison linéaire de P et Q . En déduire l'expression de M^k , ainsi que sa limite lorsque $k \rightarrow +\infty$, en fonction de P et de Q . Exprimer de même l'inverse de M en fonction de P et de Q .

Partie III : étude du cas général

1. Soit V_1 la matrice colonne d'ordre n dont les coefficients sont tous égaux à 1.
1. (a) Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs ou nuls est stochastique si et seulement si $MV_1 = V_1$.
1. (b) En déduire que, pour tout couple $(A, B) \in S_n^2$, le produit AB appartient encore à S_n , de même que les puissances positives de A et de B .

2. Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et u un endomorphisme de E dont le noyau n'est pas réduit au vecteur nul. Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base de $\text{Ker } u$, avec $d = \dim(\text{Ker } u) \geq 1$, que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E .

Établir que $(u(e_{d+1}), \dots, u(e_n))$ est une base de $\text{Im } u$. Si $d = n$, cette famille est vide et constitue la base du sous-espace nul. En déduire que

$$\dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Ker } u) = n.$$

Dans la suite, on désigne par f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice $M = (m_{ij})$ dans la base $\mathcal{B}$ est stochastique. Pour tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on convient de noter

$$|x| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

On remarquera que, pour tout couple $(x, x') \in (\mathbb{R}^n)^2$, $|x + x'| \leq |x| + |x'|$.

3. (a) Établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|f(x)| \leq |x|$.
3. (b) En déduire que les valeurs absolues de toutes les valeurs propres réelles de f sont inférieures ou égales à 1. Montrer que 1 est valeur propre de f .
4. (a) Soit $y \in \text{Im}(f - \text{Id}) \cap \text{Ker}(f - \text{Id})$, écrit sous la forme $y = f(x) - x$. Pour tout entier naturel non nul k , exprimer $f^k(x)$ en fonction de k , x et y . Déduire de III.3.(a) que $k|y| \leq 2|x|$, puis prouver que $y = 0$.
4. (b) Déduire des questions précédentes que $\text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Im}(f - \text{Id}) = \mathbb{R}^n$.
4. (c) Montrer que, pour tout $x \in \text{Im}(f - \text{Id})$, $f(x) \in \text{Im}(f - \text{Id})$. Établir que tout sous-espace propre de f associé à une valeur propre autre que 1 est inclus dans $\text{Im}(f - \text{Id})$.

On suppose désormais que f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

5. (a) Montrer que la somme directe des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de f autres que 1 est égale à $\text{Im}(f - \text{Id})$.

5. (b) On complète une base $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ de $\text{Ker}(f - \text{Id})$ en une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs propres de f . On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres réelles associées à ces vecteurs propres. Elles sont rangées par valeurs absolues décroissantes :

$$1 = |\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Soit D la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}'$. Prouver que la suite (M^k) converge si et seulement si la suite (D^k) converge.

5. (c) En déduire que la suite (M^k) converge si et seulement si 1 est la seule valeur propre de M de valeur absolue 1.
5. (d) Dans ces conditions, montrer que la limite de (M^k) est la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ au projecteur sur $\text{Ker}(f - \text{Id})$ de direction $\text{Im}(f - \text{Id})$. Que permet de préciser le résultat établi dans la partie I?