



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1993

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

1. (a)

La fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est définie pour $x < 1$; le quotient est donc défini sur un voisinage de 0 privé de 0.

Méthode 1 — Taux d'accroissement.

La fonction $f(x) = \ln(1-x)$ est dérivable en 0, avec $f(0) = 0$ et $f'(x) = -1/(1-x)$. Par définition de la dérivée :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = -1.$$

Méthode 2 — Développement limité usuel.

Le développement limité du logarithme en 0 donne $\ln(1-x) = -x + o(x)$. En divisant par $x \neq 0$, $\ln(1-x)/x = -1 + o(1)$, d'où la même limite -1 .

La première méthode reconnaît une dérivée ; la seconde prépare l'utilisation du logarithme dans l'étude de puissances.

1. (b)

Pour $n \geq 2$, $1 - 1/n > 0$. On peut donc écrire :

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right).$$

Le terme dans l'exponentielle est $\ln(1 - 1/n)/(1/n)$. Comme $1/n \rightarrow 0$, la question précédente donne sa limite -1 . La continuité de l'exponentielle entraîne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}.$$

Le terme de rang 1, égal à 0, n'influence pas la limite. On ne lui applique pas le logarithme.

2. (a)

Méthode 1 — Taylor avec reste intégral.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f(u) = e^{-u}$ est de classe C^{n+1} sur $[0, 1]$, et $f^{(k)}(u) = (-1)^k e^{-u}$. La formule de Taylor à l'ordre n en 0, évaluée en 1, donne :

$$f(1) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u) du.$$

En remplaçant les dérivées, on obtient exactement :

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} du.$$

Méthode 2 — Récurrence et intégration par parties.

Posons $R_n = \int_0^1 (1-u)^n e^{-u} / n! du$ et

$$s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k / k!.$$

Pour $n = 0$, $R_0 = 1 - e^{-1}$, donc $e^{-1} = s_0 - R_0$: la formule est vraie.

Supposons $e^{-1} = s_n + (-1)^{n+1}R_n$. On intègre R_{n+1} par parties sur le segment $[0, 1]$, avec $a(u) = (1-u)^{n+1}/(n+1)!$ et une primitive $b(u) = -e^{-u}$ de e^{-u} :

$$R_{n+1} = \left[-\frac{(1-u)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-u} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} du = \frac{1}{(n+1)!} - R_n.$$

Donc $R_n = 1/(n+1)! - R_{n+1}$. En l'insérant dans l'hypothèse de récurrence :

$$e^{-1} = s_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^{n+2}R_{n+1} = s_{n+1} + (-1)^{n+2}R_{n+1}.$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \geq 0$. La première méthode applique directement la formule du cours ; la seconde en retrouve cette instance par une récurrence sur le reste.

2. (b)

Pour $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq (1-u)^n \leq 1$ et $0 < e^{-u} \leq 1$. L'intégrande est continu et compris entre 0 et $1/n!$. L'intervalle ayant une longueur 1 :

$$0 \leq R_n \leq \frac{1}{n!}.$$

On peut même préciser la majoration : en conservant le facteur $(1-u)^n$, on obtient $R_n \leq 1/(n+1)!$, mais la borne demandée suffit pour la suite.

2. (c)

D'après les deux questions précédentes :

$$\left| e^{-1} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right| = R_n \leq \frac{1}{n!}.$$

Pour $n \geq 1$, chacun des facteurs $2, \dots, n$ est au moins égal à 2, donc $n! \geq 2^{n-1}$. Ainsi $1/n! \rightarrow 0$. Le théorème d'encadrement donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}.$$

Partie II

Question adaptée au programme actuel : l'indépendance des tirages avec remise est explicitée dans le sujet. Elle correspond au modèle d'équiprobabilité des N^N suites de résultats.

1.

À chaque tirage, la probabilité d'obtenir la boule prescrite B_i vaut $1/N$. Ainsi X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/N$ et :

$$E(X_i) = \frac{1}{N}.$$

Ces variables sont bornées, donc intégrables. Par linéarité de l'espérance :

$$E(S_N) = \sum_{i=1}^N E(X_i) = N \times \frac{1}{N} = 1.$$

L'indépendance n'est pas nécessaire pour cette seule égalité d'espérances.

2. (a)

Comme chaque X_i vaut 0 ou 1, $S_N \in \{0, \dots, N\}$. Donc $p(N, k) = 0$ pour $k > N$.

Méthode 1 — Reconnaissance d'une loi binomiale.

Les variables X_i sont indépendantes : chacune dépend du i -ième tirage seulement, et les tirages sont indépendants. Elles ont toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $1/N$, même si la boule prescrite change avec l'indice. Donc :

$$S_N \sim \mathcal{B}\left(N, \frac{1}{N}\right).$$

Pour $0 \leq k \leq N$, la formule de la loi binomiale donne :

$$p(N, k) = \binom{N}{k} \left(\frac{1}{N}\right)^k \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-k}.$$

Méthode 2 — Dénombrement des succès et des échecs.

Supposons d'abord $N \geq 2$. Chaque suite ordonnée de N résultats est équiprobable, de probabilité $1/N^N$. Pour réaliser exactement k succès, on choisit les k positions où la boule sortie doit être la boule portant le numéro de cette position : il y a $\binom{N}{k}$ choix.

À chacune de ces positions, il y a une seule boule possible. À chacune des $N - k$ autres positions, il y a $N - 1$ possibilités, car la boule prescrite doit être évitée. On obtient donc $\binom{N}{k}(N - 1)^{N-k}$ suites favorables, d'où :

$$p(N, k) = \frac{\binom{N}{k}(N - 1)^{N-k}}{N^N} = \binom{N}{k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-k} \frac{1}{N^k}.$$

Pour $N = 1$, la boule B_1 sort nécessairement : $S_1 = 1$, donc $p(1, 0) = 0$ et $p(1, 1) = 1$. La formule conserve ces valeurs avec la convention du facteur de puissance 0 annoncée

dans le sujet. Cette convention est explicitée pour éviter l'ambiguïté de la notation dans ce cas limite.

La première méthode identifie une loi du cours ; la seconde explique le rôle des positions prescrites par un comptage direct.

2. (b)

Fixons $k \in \mathbb{N}$. Pour N suffisamment grand, $N \geq k$ et $N \geq 2$. On réécrit :

$$p(N, k) = \frac{\binom{N}{k}}{N^k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{-k}.$$

Si $k \geq 1$, le premier facteur vaut :

$$\frac{\binom{N}{k}}{N^k} = \frac{1}{k!} \prod_{r=0}^{k-1} \left(1 - \frac{r}{N}\right) \rightarrow \frac{1}{k!}.$$

Le produit est fini, car k est fixé. Pour $k = 0$, ce facteur vaut directement $1 = 1/0!$.

Le deuxième facteur tend vers e^{-1} par I. 1. (b), et le troisième tend vers 1. Par produit des limites :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} p(N, k) = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

Ces limites sont les probabilités ponctuelles de la loi de Poisson de paramètre 1.

Partie III

1. (a)

La seule permutation qui fixe tous les éléments est l'identité, donc $F(N, N) = 1$.

Supposons qu'une permutation fixe $N - 1$ éléments. Les images de ces éléments occupent déjà ces $N - 1$ places. Par bijectivité, le dernier élément doit avoir pour image la seule place restante, qui est lui-même. La permutation fixe alors tous les éléments.

Il n'existe donc aucune permutation ayant exactement $N - 1$ points fixes :

$F(N, N - 1) = 0$. Ce raisonnement couvre également $N = 1$.

1. (b)

Chaque permutation possède un unique nombre de points fixes, compris entre 0 et N . Les ensembles de permutations ayant respectivement $0, 1, \dots, N$ points fixes forment donc une partition de l'ensemble de toutes les permutations.

Le nombre total de permutations de N éléments vaut $N!$: on choisit successivement les images de chacun des éléments, avec N , puis $N - 1$, jusqu'à 1 possibilité. En sommant les cardinaux de la partition :

$$\sum_{k=0}^N F(N, k) = N!.$$

2. (a)

Pour construire une permutation ayant exactement k points fixes, on choisit d'abord leur ensemble A , de cardinal k , parmi les N éléments. Il y a $\binom{N}{k}$ choix.

Une permutation fixant A envoie nécessairement son complémentaire sur lui-même : par injectivité, aucun élément extérieur à A ne peut avoir son image dans A , dont chaque élément est déjà l'image de lui-même. Pour qu'il n'y ait pas d'autre point fixe, la restriction au complémentaire doit être une permutation sans point fixe, choisie de ω_{N-k} façons.

Ces deux choix déterminent entièrement la permutation, et réciproquement toute permutation ayant exactement k points fixes est obtenue une seule fois. Donc :

$$F(N, k) = \binom{N}{k} \omega_{N-k}.$$

Pour $k = N$, le complémentaire est vide et $\omega_0 = 1$; pour $k = N - 1$, $\omega_1 = 0$, ce qui retrouve III. 1. (a).

2. (b)

En substituant la formule précédente dans III. 1. (b) :

$$\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \omega_{N-k} = N!.$$

On divise par $N! > 0$ et on utilise $\binom{N}{k}/N! = 1/(k!(N-k)!)$. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \frac{\omega_{N-k}}{(N-k)!} = 1.$$

2. (c)

Méthode 1 — Récurrence imposée et identité de sommes finies.

Posons $a_m = \omega_m/m!$ et

$$b_m = \sum_{j=0}^m (-1)^j / j!$$

pour $m \geq 0$. On veut démontrer $a_m = b_m$.

Pour $m = 0$, $a_0 = \omega_0/0! = 1 = b_0$. Supposons que l'égalité soit vraie pour tous les rangs $0, \dots, N-1$, où $N \geq 1$. La question III. 2. (b) donne :

$$a_N + \sum_{k=1}^N \frac{a_{N-k}}{k!} = 1.$$

On établit une identité analogue pour les b_m . Toutes les sommes étant finies, on peut les regrouper suivant $r = k + j$:

$$\sum_{k=0}^N \frac{b_{N-k}}{k!} = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^{N-k} \frac{(-1)^j}{k!j!} = \sum_{r=0}^N \frac{1}{r!} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^j.$$

Pour $r \geq 1$, le binôme donne

$$\sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^j = (1-1)^r = 0.$$

Pour $r = 0$, la somme intérieure comporte un seul terme, égal à 1. Donc la double somme vaut 1, et :

$$b_N + \sum_{k=1}^N \frac{b_{N-k}}{k!} = 1.$$

L'hypothèse de récurrence donne $a_{N-k} = b_{N-k}$ pour $1 \leq k \leq N$. En soustrayant les deux dernières identités, on obtient $a_N = b_N$. La récurrence est achevée :

$$\frac{\omega_N}{N!} = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Méthode 2 — Développement d'un produit d'indicateurs.

On identifie E_N à $\{1, \dots, N\}$ et on choisit une permutation uniformément parmi les $N!$ permutations. Posons $I_i = \mathbf{1}_{[\sigma(i)=i]}$. Pour chaque permutation :

$$\mathbf{1}_{[\sigma \text{ n'a aucun point fixe}]} = \prod_{i=1}^N (1 - I_i).$$

En développant ce produit fini :

$$\prod_{i=1}^N (1 - I_i) = \sum_{A \subset \{1, \dots, N\}} (-1)^{\text{Card}(A)} \prod_{i \in A} I_i.$$

Pour un ensemble A de cardinal j , le produit d'indicateurs vaut 1 exactement lorsque tous les éléments de A sont fixés. Il reste $(N - j)!$ permutations possibles sur son complémentaire, donc l'espérance de ce produit vaut $(N - j)!/N!$. Il y a $\binom{N}{j}$ ensembles A de taille j .

La linéarité de l'espérance, appliquée à cette somme finie de variables bornées, donne :

$$\frac{\omega_N}{N!} = \sum_{j=0}^N (-1)^j \binom{N}{j} \frac{(N - j)!}{N!} = \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j}{j!}.$$

Cette seconde méthode démontre directement le comptage par exclusion des points fixes. La formule utilisée est établie par le développement du produit ; la récurrence précédente reste la méthode répondant à l'instruction de l'énoncé.

2. (d)

La question III. 2. (c) identifie $\omega_N/N!$ à la somme partielle étudiée en I. 2. (c). Donc :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\omega_N}{N!} = e^{-1}.$$

Ainsi, pour une permutation uniforme d'un grand ensemble, la probabilité de n'avoir aucun point fixe est proche de $e^{-1} \approx 0.367879$.

Partie IV

Le modèle sans remise rend les $N!$ ordres de sortie équiprobables. À chaque ordre $(B_{\sigma(1)}, \dots, B_{\sigma(N)})$ correspond une permutation σ de $\{1, \dots, N\}$. L'événement $Y_i = 1$ signifie $\sigma(i) = i$.

1. (a)

Méthode 1 — Dénombrement des permutations.

Si la boule B_i doit occuper la position i , on peut placer les $N - 1$ autres boules de $(N - 1)!$ façons. Donc :

$$E(Y_i) = P(Y_i = 1) = \frac{(N - 1)!}{N!} = \frac{1}{N}.$$

Le produit $Y_i Y_j$ est l'indicateur de la réalisation simultanée de $Y_i = 1$ et $Y_j = 1$. Pour $i \neq j$, les deux positions sont prescrites, et les autres boules se placent de $(N - 2)!$ façons. Comme $N \geq 2$:

$$E(Y_i Y_j) = \frac{(N - 2)!}{N!} = \frac{1}{N(N - 1)}.$$

Pour $N = 2$, on utilise $(N - 2)! = 0! = 1$, donc la formule reste valide.

Méthode 2 — Probabilités conditionnelles.

Par équiprobabilité des positions, la boule B_i occupe la position i avec probabilité $1/N$. Sachant qu'elle y est placée, les $N - 1$ autres boules sont uniformément réparties sur les $N - 1$ autres positions. Puisque $i \neq j$, la position j et la boule B_j sont encore disponibles ; la probabilité conditionnelle de $Y_j = 1$ vaut $1/(N - 1)$.

La formule des probabilités composées donne :

$$P(Y_i = 1, Y_j = 1) = \frac{1}{N} \frac{1}{N - 1}.$$

Les indicateurs ayant pour espérance leur probabilité de réalisation, on retrouve les mêmes résultats. Le comptage décrit tous les ordres possibles ; le conditionnement explique l'effet d'une position déjà fixée.

1. (b)

Les variables sont bornées, donc leurs moments d'ordre 2 et leur covariance existent. La formule de Huygens donne :

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j) = E(Y_i Y_j) - E(Y_i)E(Y_j) = \frac{1}{N(N - 1)} - \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N^2(N - 1)}.$$

Cette covariance est strictement positive pour $N \geq 2$.

1. (c)

Méthode 1 — Covariance non nulle.

Deux variables indépendantes ayant des moments d'ordre 2 ont une covariance nulle.

Or la covariance calculée en IV. 1. (b) est strictement positive. Donc Y_i et Y_j ne sont pas indépendantes.

Méthode 2 — Critère sur les événements.

On a :

$$P(Y_i = 1, Y_j = 1) = \frac{1}{N(N-1)} \neq \frac{1}{N^2} = P(Y_i = 1)P(Y_j = 1).$$

Les événements $[Y_i = 1]$ et $[Y_j = 1]$ ne sont pas indépendants, donc les variables ne le sont pas non plus. Le premier raisonnement fournit un critère à partir des moments ; le second vérifie directement la définition probabiliste.

2.

Les variables Y_i sont des Bernoulli de paramètre $1/N$, donc $V(Y_i) = (1/N)(1 - 1/N)$. Leurs moments sont finis et la somme T_N aussi. La linéarité donne :

$$E(T_N) = N \times \frac{1}{N} = 1.$$

Méthode 1 — Variances et covariances.

La formule de variance d'une somme, sans supposer l'indépendance, donne :

$$V(T_N) = \sum_{i=1}^N V(Y_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \text{Cov}(Y_i, Y_j).$$

Il y a $N(N-1)/2$ paires d'indices. En insérant les valeurs calculées :

$$V(T_N) = N \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right) + N(N-1) \frac{1}{N^2(N-1)} = \frac{N-1}{N} + \frac{1}{N} = 1.$$

Méthode 2 — Second moment factoriel.

Puisque $Y_i^2 = Y_i$, le développement de T_N^2 donne :

$$T_N(T_N - 1) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} Y_i Y_j.$$

Par linéarité et IV. 1. (a) :

$$E(T_N(T_N - 1)) = N(N-1) \frac{1}{N(N-1)} = 1.$$

Donc $E(T_N^2) = E(T_N(T_N - 1)) + E(T_N) = 2$, et la formule de Huygens donne $V(T_N) = 2 - 1^2 = 1$.

Le calcul par covariances utilise les résultats précédents ; le second moment factoriel est particulièrement pratique pour les sommes d'indicateurs.

3. (a)

La variable T_N est comprise entre 0 et N , donc $q(N, k) = 0$ pour $k > N$.

L'identification entre ordres de sortie et permutations montre que T_N est le nombre de points fixes d'une permutation uniforme. Il y a $F(N, k)$ permutations ayant exactement k points fixes, parmi $N!$ permutations équiprobables. Ainsi, pour $0 \leq k \leq N$:

$$q(N, k) = \frac{F(N, k)}{N!} = \frac{\binom{N}{k} \omega_{N-k}}{N!} = \frac{\omega_{N-k}}{k!(N-k)!}.$$

En particulier, $q(N, N) = 1/N!$ et $q(N, N - 1) = 0$, conformément à III. 1. (a).

3. (b)

Fixons $k \in \mathbb{N}$. Pour N suffisamment grand, $N \geq k$ et :

$$q(N, k) = \frac{1}{k!} \frac{\omega_{N-k}}{(N-k)!}.$$

Comme $N - k \rightarrow +\infty$, III. 2. (d) donne :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} q(N, k) = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

C'est la même limite que celle de $p(N, k)$ en II. 2. (b). Le nombre de succès avec remise et le nombre de positions fixes sans remise ont donc les mêmes probabilités ponctuelles limites, celles de la loi de Poisson de paramètre 1.

Les lois finies sont toutefois différentes : par exemple, $q(N, N - 1) = 0$, tandis que $p(N, N - 1) > 0$ pour $N \geq 2$. L'identité des limites n'implique pas l'identité des lois pour un N donné.

Partie V

1.

Méthode 1 — Relation de sommes partielles imposée.

D'après III. 2. (c), pour $n \geq 1$:

$$\frac{\omega_n}{n!} - \frac{\omega_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

En multipliant par $n!$:

$$\omega_n = n\omega_{n-1} + (-1)^n.$$

Au rang $n - 1$, pour $n \geq 2$, cette relation donne :

$$\omega_{n-1} = (n-1)\omega_{n-2} + (-1)^{n-1}.$$

On réécrit la première égalité :

$$\omega_n = (n-1)\omega_{n-1} + (\omega_{n-1} + (-1)^n).$$

La parenthèse vaut $(n-1)\omega_{n-2}$, puisque $(-1)^{n-1} + (-1)^n = 0$. Ainsi :

$$\omega_n = (n-1)(\omega_{n-1} + \omega_{n-2}).$$

Pour $n = 2$, cela donne $\omega_2 = \omega_1 + \omega_0 = 0 + 1 = 1$, comme attendu.

Méthode 2 — Décomposition combinatoire selon l'image d'un élément.

On considère les permutations sans point fixe de $\{1, \dots, n\}$. L'image $j = \sigma(1)$ est différente de 1, donc il y a $n - 1$ possibilités. Fixons j .

Premier cas : $\sigma(j) = 1$. Les éléments 1 et j s'échangent, et la restriction aux $n - 2$ autres éléments doit être une permutation sans point fixe. Il y a ω_{n-2} possibilités.

Second cas : $\sigma(j) \neq 1$. Soit $\ell = \sigma^{-1}(1)$. Alors $\ell \neq 1$ et $\ell \neq j$. On enlève l'élément 1 et on définit une permutation τ de $\{2, \dots, n\}$ par $\tau(\ell) = j$ et $\tau(a) = \sigma(a)$ pour $a \neq 1, \ell$.

Cette permutation n'a pas de point fixe : à la position ℓ , $j \neq \ell$; aux autres positions, les images sont conservées et étaient différentes de l'élément considéré. La construction est bijective. En effet, pour une permutation τ sans point fixe de $\{2, \dots, n\}$, on pose $\ell = \tau^{-1}(j)$; comme $\tau(j) \neq j$, $\ell \neq j$. On réinsère 1 en posant $\sigma(1) = j$, $\sigma(\ell) = 1$ et $\sigma(a) = \tau(a)$ pour les autres éléments. On retrouve exactement le second cas.

Il y a donc ω_{n-1} possibilités dans ce cas. En additionnant les deux cas puis en multipliant par les $n - 1$ choix de j , on retrouve la récurrence demandée.

La première méthode suit la relation de III. 2. (c) ; la seconde explique le comptage qui est à l'origine de cette récurrence.

2. (a)

D'après IV. 3. (a), pour $0 \leq k \leq N$:

$$\bar{q}(N, k) = q(N, N - k) = \frac{\omega_k}{(N - k)!k!}.$$

Comme $\omega_0 = 1$ et $\omega_1 = 0$:

$$\bar{q}(N, 0) = \frac{1}{N!}, \quad \bar{q}(N, 1) = 0.$$

Ces valeurs correspondent respectivement à N points fixes, et à l'impossibilité d'en avoir exactement $N - 1$.

2. (b)

Pour $2 \leq k \leq N$, V. 1 donne :

$$\bar{q}(N, k) = \frac{(k - 1)(\omega_{k-1} + \omega_{k-2})}{(N - k)!k!}.$$

On exprime les deux nombres de permutations à l'aide des probabilités précédentes :

$$\omega_{k-1} = \bar{q}(N, k-1)(N-k+1)!(k-1)!,$$

$$\omega_{k-2} = \bar{q}(N, k-2)(N-k+2)!(k-2)!.$$

Pour le premier terme, le rapport des factorielles donne :

$$\frac{(k-1)(N-k+1)!(k-1)!}{(N-k)!k!} = \frac{(k-1)(N-k+1)}{k}.$$

Pour le second :

$$\frac{(k-1)(N-k+2)!(k-2)!}{(N-k)!k!} = \frac{(N-k+2)(N-k+1)}{k}.$$

Tous les dénominateurs sont non nuls, car $k \geq 2$. En factorisant le coefficient commun :

$$\bar{q}(N, k) = \frac{N-k+1}{k} ((k-1)\bar{q}(N, k-1) + (N-k+2)\bar{q}(N, k-2)).$$

La relation reste valable pour $k = 2$ et $k = N$; les factorielles d'indice 0 valent 1.

3.

Question adaptée au programme actuel : l'algorithme est demandé en Python, avec la syntaxe permettant une arithmétique rationnelle exacte.

On calcule $N!$ une seule fois pour initialiser $\bar{q}(N, 0)$, puis on utilise la récurrence de V. 2.

(b). À chaque rang, les deux valeurs précédentes sont déjà disponibles. On mémorise aussi le coefficient entier $r = N - k + 1$, qui diminue de 1 à chaque itération.

Python

```
from fractions import Fraction

def probabilites_inversees(N):
    factorielle = 1
    for j in range(2, N + 1):
        factorielle = factorielle * j

    qbar = [Fraction(0, 1)] * (N + 1)
    qbar[0] = Fraction(1, factorielle)
    qbar[1] = Fraction(0, 1)

    r = N - 1
    for k in range(2, N + 1):
        qbar[k] = r * ((k - 1) * qbar[k - 1]
                      + (r + 1) * qbar[k - 2]) / k
        r = r - 1

    return qbar
```

L'entrée est un entier $N \geq 2$. Le tableau retourné est une liste de longueur $N + 1$, dont la case d'indice k contient exactement $\bar{q}(N, k)$. Les indices parcourus par la seconde boucle sont $2, \dots, N$, car la borne supérieure de range est exclusive.

À l'entrée de l'itération de rang k , $r = N - k + 1$ et les cases $0, \dots, k - 1$ ont leurs valeurs correctes. La formule de V. 2. (b) calcule donc correctement la case k . La diminution de r prépare le rang suivant. Les deux initialisations de V. 2. (a) établissent cet invariant au rang 2; la liste entière est correcte en sortie.

Le calcul de la factorielle utilise $N - 1$ multiplications. Chaque étape de la récurrence utilise un nombre constant d'opérations arithmétiques, avec le coefficient commun r factorisé. Le nombre total d'opérations arithmétiques est donc proportionnel à N , et la mémoire nécessaire à la liste est proportionnelle à N . Cette croissance linéaire est adaptée à une sortie qui contient elle-même $N + 1$ valeurs; les factorielles et les nombres de permutations ne sont pas recalculés à chaque case.

Les objets `Fraction` conservent les probabilités exactes et évitent que la très petite valeur initiale $1/N!$ soit arrondie à zéro. Les tailles des entiers utilisés augmentent avec N ; le coût informatique d'une opération sur ces entiers n'est donc pas une constante indépendante de N .

Le code a été exécuté et vérifié par des dénombrements exhaustifs pour $2 \leq N \leq 8$, puis par des formules exactes jusqu'à $N = 200$. Les probabilités sont positives ou nulles et leur somme vaut exactement 1.

Par exemple, pour $N = 4$, la liste retournée est :

$$\left[\frac{1}{24}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8} \right].$$

Elle est bien dans l'ordre $\bar{q}(4, 0), \dots, \bar{q}(4, 4)$, c'est-à-dire dans l'ordre inverse des valeurs de $q(4, k)$.

Relevé des adaptations

- Partie II, préambule : explicitation des tirages indépendants avec remise, conformément au modèle d'équiprobabilité des suites de tirages.
- II. 2. (a) : explicitation de la convention du facteur de puissance 0 pour couvrir $N = 1$; le corrigé traite directement ce cas certain.
- Partie IV, préambule : explicitation de l'équiprobabilité des ordres de sortie sans remise, utilisée pour identifier une permutation uniforme.
- V. 3 : rédaction de l'algorithme en Python ; ajout de la syntaxe de `Fraction` et de l'initialisation des listes pour permettre des calculs rationnels exacts.