



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1993

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I : un premier exemple

On a $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ et $a + b = 1$, donc $a - 1 = -b$ et $b \neq 0$. Pour $v = (x, y, z)$,

$$f(v) = (x, bx + ay, by + az), \quad (f - \text{Id})(v) = (0, b(x - y), b(y - z)).$$

1. (a) La condition $(f - \text{Id})(v) = 0$ équivaut à $b(x - y) = b(y - z) = 0$. Puisque $b \neq 0$, elle équivaut à $x = y = z$.

Ainsi $\text{Ker}(f - \text{Id}) = \{(t, t, t) : t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(v_1)$, avec $v_1 = (1, 1, 1)$. Ce vecteur est non nul, donc (v_1) est une base du noyau, qui est de dimension 1.

1. (b) La formule du préambule montre que toute image par $f - \text{Id}$ a une première coordonnée nulle. Ainsi

$$\text{Im}(f - \text{Id}) \subset \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(e_2, e_3).$$

Réciproquement, $(f - \text{Id})(e_1) = be_2$ et $(f - \text{Id})(e_3) = -be_3$. Puisque $b \neq 0$, les vecteurs e_2 et e_3 appartiennent à l'image. L'inclusion réciproque est donc vraie.

On a $\text{Im}(f - \text{Id}) = \text{Vect}(e_2, e_3)$. La famille (e_2, e_3) est libre, comme sous-famille de la base canonique ; elle est donc une base de l'image.

1. (c) Méthode 1 — Décomposition explicite

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(x, y, z) = xv_1 + (0, y - x, z - x).$$

Le premier terme appartient au noyau trouvé en I.1.(a), et le second appartient à l'image trouvée en I.1.(b). Cette décomposition est unique : si $(x, y, z) = tv_1 + (0, u, w)$, la première coordonnée impose $t = x$, puis les deux autres imposent $u = y - x$ et $w = z - x$.

On conclut $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Im}(f - \text{Id})$.

Méthode 2 — Intersection et dimensions

Un vecteur de l'intersection est de la forme $tv_1 = (t, t, t)$ et possède une première coordonnée nulle. Donc $t = 0$, et l'intersection est réduite à $\{0\}$. Les dimensions des deux sous-espaces sont 1 et 2. La formule de dimension d'une somme donne alors une somme de dimension 3, égale à $\mathbb{R}^3$, et l'intersection nulle montre qu'elle est directe.

La première méthode fournit les deux composantes de chaque vecteur ; la seconde reconnaît une suppléantarité par les dimensions et l'intersection.

1. (d) Un projecteur sur un sous-espace fixe chacun de ses vecteurs et annule les vecteurs de sa direction. Ainsi $p(v_1) = v_1$ et, puisque e_3, e_2 appartiennent à l'image de $f - \text{Id}$, $p(e_3) = p(e_2) = 0$.

L'identité $e_1 = v_1 - e_2 - e_3$ et la linéarité donnent $p(e_1) = v_1$. Les colonnes de la matrice de p dans la base canonique sont les coordonnées des $p(e_i)$, donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, la décomposition de I.1.(c) donne $p(x, y, z) = xv_1$, ce qui confirme cette matrice.

2. La matrice M est triangulaire ; les seuls candidats aux valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, 1 et a . On vérifie directement les sous-espaces propres, sans déterminant.

Pour $\lambda = 1$, I.1.(a) donne $E_1 = \text{Ker}(f - \text{Id}) = \text{Vect}(v_1)$.

Pour $\lambda = a$, l'équation $f(x, y, z) = a(x, y, z)$ se traduit par

$$(1 - a)x = 0, \quad bx = 0, \quad by = 0.$$

Comme $1 - a = b > 0$, on a $x = 0$ et $y = 0$, tandis que z est libre. Donc $E_a = \text{Vect}(e_3)$.

Les deux candidats sont effectivement des valeurs propres, avec des sous-espaces propres de dimension 1. Leur somme directe a dimension $2 < 3$. Il n'existe donc pas de base de $\mathbb{R}^3$ composée de vecteurs propres, et f n'est pas diagonalisable.

3. La famille $\mathcal{B}' = (v_1, e_2, e_3)$ est une base : si $tv_1 + ue_2 + we_3 = 0$, la première coordonnée impose $t = 0$, puis $u = w = 0$; une famille libre de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ est une base.

3. (a) On calcule les images des vecteurs de $\mathcal{B}'$:

$$f(v_1) = v_1, \quad f(e_2) = ae_2 + be_3, \quad f(e_3) = ae_3.$$

Leurs coordonnées dans $\mathcal{B}'$ forment les colonnes de M' , d'où

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

3. (b) Méthode 1 — Récurrence sur les puissances matricielles

On propose la formule ci-dessous, puis on la démontre par récurrence. Pour tout $k \geq 1$, posons

$$R_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - a^k & a^k & 0 \\ 1 - a^k - kba^{k-1} & kba^{k-1} & a^k \end{pmatrix}.$$

Pour $k = 1$, on a $1 - a = b$ et $1 - a - b = 0$, donc $R_1 = M$.

Supposons $M^k = R_k$. On calcule $M^{k+1} = MR_k$. La première ligne reste $(1, 0, 0)$. La deuxième ligne est

$$(b + a(1 - a^k), aa^k, 0) = (1 - a^{k+1}, a^{k+1}, 0).$$

Pour la troisième ligne, le premier coefficient vaut

$$b(1 - a^k) + a(1 - a^k - kba^{k-1}) = 1 - a^k - kba^k.$$

Comme $a + (k+1)b = 1 + kb$, ce coefficient est égal à $1 - a^{k+1} - (k+1)ba^k$. Le deuxième coefficient vaut

$$ba^k + a kba^{k-1} = (k+1)ba^k,$$

et le troisième vaut $a a^k = a^{k+1}$. Ainsi $MR_k = R_{k+1}$. La récurrence est établie et

$$M^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - a^k & a^k & 0 \\ 1 - a^k - kba^{k-1} & kba^{k-1} & a^k \end{pmatrix} \quad (k \geq 1).$$

Méthode 2 — Résolution des récurrences sur les coordonnées

Pour un vecteur initial $v = (x, y, z)$, écrivons $f^k(v) = (x_k, y_k, z_k)$, avec $(x_0, y_0, z_0) = (x, y, z)$. La définition de f donne

$$x_{k+1} = x_k, \quad y_{k+1} = bx_k + ay_k, \quad z_{k+1} = by_k + az_k.$$

La première relation donne $x_k = x$. Comme $a + b = 1$, la deuxième se réécrit $y_{k+1} - x = a(y_k - x)$, donc $y_k = x + a^k(y - x)$.

La troisième devient alors

$$z_{k+1} - x = a(z_k - x) + ba^k(y - x).$$

Puisque $a > 0$, on peut poser $w_k = (z_k - x)/a^k$. En divisant la dernière relation par a^{k+1} ,

$$w_{k+1} = w_k + \frac{b}{a}(y - x).$$

Cette suite est arithmétique et $w_0 = z - x$, donc $w_k = z - x + k(b/a)(y - x)$. Il vient

$$z_k = x + a^k(z - x) + kba^{k-1}(y - x).$$

En développant les expressions de y_k et z_k , on obtient, pour tout $k \geq 1$,

$$f^k(x, y, z) = (x, (1 - a^k)x + a^k y, (1 - a^k - kba^{k-1})x + kba^{k-1}y + a^k z).$$

Cette expression, valable pour tout vecteur initial, donne exactement la même matrice M^k que la première méthode. La récurrence matricielle vérifie directement une formule ; les récurrences scalaires expliquent comment la déterminer et pourquoi le facteur k apparaît.

3. (c) Avec la convention usuelle, les colonnes de C sont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\mathcal{B}'$. Donc

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La relation de coordonnées est $[v]_{\mathcal{B}} = C[v]_{\mathcal{B}'}$. En effet, pour $v = (x, y, z)$, sa décomposition est $v = xv_1 + (y - x)e_2 + (z - x)e_3$, donc ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$ sont $(x, y - x, z - x)$. Il s'ensuit

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi vérifier directement que les deux produits CC^{-1} et $C^{-1}C$ valent I_3 .

L'inversibilité est ici justifiée par le fait que les deux familles sont des bases.

3. (d) Le changement de base donne $M = CM'C^{-1}$, puis, par annulation des facteurs intermédiaires $C^{-1}C$, $M^k = C(M')^kC^{-1}$.

Pour retrouver la formule à partir de M' , on considère son bloc inférieur

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = aI_2 + N, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $N^2 = 0$, et aI_2 commute avec N . Pour $k \geq 1$, la formule du binôme pour des matrices qui commutent donne

$$A^k = a^k I_2 + ka^{k-1}N = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ kba^{k-1} & a^k \end{pmatrix}.$$

Tous les termes de degré au moins 2 en N sont nuls. Ainsi

$$(M')^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^k & 0 \\ 0 & kba^{k-1} & a^k \end{pmatrix}.$$

En effectuant d'abord le produit par C^{-1} , on obtient

$$(M')^k C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a^k & a^k & 0 \\ -kba^{k-1} - a^k & kba^{k-1} & a^k \end{pmatrix}.$$

Le produit à gauche par C ajoute la première ligne aux deuxième et troisième lignes. Il

donne donc

$$M^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - a^k & a^k & 0 \\ 1 - a^k - kba^{k-1} & kba^{k-1} & a^k \end{pmatrix},$$

en accord avec la récurrence de I.3.(b). Ce calcul par changement de base explique l'apparition du facteur k : il provient du terme linéaire en une matrice dont le carré est nul.

Puisque $0 < a < 1$, $a^k \rightarrow 0$. Pour le second terme, posons $c = -\ln a > 0$; alors $ka^{k-1} = a^{-1}ke^{-ck} \rightarrow 0$ par croissance comparée de l'exponentielle et de la fonction linéaire. Tous les coefficients ont donc une limite et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} M^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P.$$

La suite des puissances converge vers la matrice du projecteur de I.1.(d), bien que f ne soit pas diagonalisable.

Partie II : un second exemple

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, on note

$$s(x) = \sum_{j=1}^n x_j.$$

La définition de M donne, pour chaque i ,

$$(f(x))_i = \frac{s(x) - x_i}{n-1}, \quad ((f - \text{Id})(x))_i = \frac{s(x) - nx_i}{n-1}.$$

On pose également $H = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = 0\}$.

1. (a) La condition $(f - \text{Id})(x) = 0$ équivaut à $nx_i = s(x)$ pour chaque i . Tous les x_i sont donc égaux. Réciproquement, si $x = tv_1$, on a $s(x) = nt$ et chacune de ces équations est satisfaite.

Ainsi $\text{Ker}(f - \text{Id}) = \text{Vect}(v_1)$, et (v_1) en est une base.

1. (b) Pour chaque $j \in \{2, \dots, n\}$, posons $w_j = e_1 - e_j$. Ses coordonnées ont une somme nulle. La formule du préambule donne

$$(f - \text{Id})(w_j) = -\frac{n}{n-1}w_j.$$

Le coefficient est non nul. Par conséquent, $w_j = (f - \text{Id})(-(n-1)w_j/n)$, donc w_j appartient à l'image.

Pour montrer la liberté, supposons

$$\sum_{j=2}^n \alpha_j (e_1 - e_j) = 0.$$

Pour chaque $j \geq 2$, la coordonnée d'indice j est $-\alpha_j$, donc $\alpha_j = 0$. La famille est libre et contient $n-1$ vecteurs.

D'après II.1.(a) et le théorème du rang, l'image de $f - \text{Id}$ est de dimension $n-1$. Cette famille libre de $n-1$ éléments de l'image en est donc une base.

Pour les questions suivantes, on précise la description de cette image. Si $x \in H$, alors

$$x_1 = -\sum_{j=2}^n x_j,$$

et

$$x = \sum_{j=2}^n (-x_j)(e_1 - e_j).$$

Comme les w_j appartiennent tous à H , ils engendrent exactement H . Donc $\text{Im}(f - \text{Id}) = H$.

1. (c) Un vecteur de l'intersection est de la forme tv_1 et vérifie $s(tv_1) = nt = 0$. Puisque $n \neq 0$, il est nul. Les dimensions du noyau et de l'image valent 1 et $n - 1$, dont la somme est n . La formule de dimension donne une somme égale à $\mathbb{R}^n$, et l'intersection nulle rend cette somme directe.

On peut également en écrire les composantes : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x = \frac{s(x)}{n}v_1 + \left(x - \frac{s(x)}{n}v_1\right),$$

avec le premier terme dans le noyau et le second dans H , car la somme de ses coordonnées vaut $s(x) - s(x) = 0$.

1. (d) Méthode 1 — Composantes dans la somme directe

La décomposition précédente donne directement $p(x) = s(x)v_1/n$. Ainsi $p(v_1) = v_1$, puisque $s(v_1) = n$, et $p(e_i) = v_1/n$ pour chaque i , puisque $s(e_i) = 1$.

En notant J la matrice d'ordre n dont tous les coefficients valent 1, on obtient

$$P = \frac{1}{n}J,$$

c'est-à-dire que chaque coefficient de P vaut $1/n$.

Méthode 2 — Projection orthogonale

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel. Pour tout x , $\langle x, v_1 \rangle = s(x)$, donc

$H = \text{Vect}(v_1)^\perp$. Le projecteur de la question est ainsi le projecteur orthogonal sur la droite $\text{Vect}(v_1)$. Comme $\langle v_1, v_1 \rangle = n$, sa formule est

$$p(x) = \frac{\langle x, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \frac{s(x)}{n} v_1.$$

On retrouve $p(v_1) = v_1$, $p(e_i) = v_1/n$ et $P = J/n$. La première méthode utilise uniquement la somme directe ; la seconde reconnaît le rôle géométrique de la moyenne des coordonnées.

Rectification typographique locale : la mention $P(e_n)$ dans le PDF est remplacée par $p(e_n)$, car p désigne l'application et P sa matrice.

1. (e) Si $x = y + z$ est sa décomposition dans $\text{Vect}(v_1) \oplus H$, on a $p(x) = y$ et $q(x) = z$.

Ainsi $(p + q)(x) = x$ pour tout x , donc $p + q = \text{Id}$.

De plus, $q(x) \in H$, qui est le noyau de p , donc $p(q(x)) = 0$. De même, $p(x) \in \text{Vect}(v_1)$, qui est le noyau de q , donc $q(p(x)) = 0$. On a donc $p \circ q = q \circ p = 0$.

Au niveau matriciel,

$$Q = I_n - P = I_n - \frac{1}{n} J.$$

Ses coefficients diagonaux valent $(n - 1)/n$ et ses coefficients hors diagonale valent $-1/n$. Puisque p et q sont des projecteurs, on a aussi $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ et $PQ = QP = 0$, relations utilisées en II.3.

2. On utilise la décomposition $\mathbb{R}^n = \text{Vect}(v_1) \oplus H$. D'après II.1.(a), f est l'identité sur $\text{Vect}(v_1)$. Si $z \in H$, la formule du préambule donne $f(z) = -z/(n - 1)$.

Ainsi 1 et $c = -1/(n - 1)$ sont des valeurs propres. Leurs sous-espaces propres sont

$$E_1 = \text{Vect}(v_1), \quad E_c = H.$$

Pour vérifier qu'il n'y en a pas d'autres et que ces descriptions sont exactes, écrivons un vecteur propre non nul sous la forme $x = y + z$, avec $y \in \text{Vect}(v_1)$ et $z \in H$. L'équation $f(x) = \lambda x$ donne

$$(1 - \lambda)y + (c - \lambda)z = 0.$$

La somme étant directe, $(1 - \lambda)y = 0$ et $(c - \lambda)z = 0$. Au moins l'un des deux vecteurs y, z est non nul, donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = c$. Comme $1 \neq c$, l'équation pour $\lambda = 1$ impose $z = 0$, et celle pour $\lambda = c$ impose $y = 0$. Cela confirme les sous-espaces annoncés.

Les dimensions sont 1 et $n - 1$, et leur somme directe est $\mathbb{R}^n$. L'endomorphisme est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Une base de vecteurs propres est $(v_1, e_1 - e_2, \dots, e_1 - e_n)$.

3. Sur $\text{Vect}(v_1)$, f agit par multiplication par 1, et sur H par multiplication par $c = -1/(n - 1)$. Les projecteurs p, q fournissent donc $f = p + cq$, d'où

$$M = P - \frac{1}{n-1}Q.$$

Les relations $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ et $PQ = QP = 0$ donnent, par récurrence, pour tout $k \geq 1$,

$$M^k = P + \left(-\frac{1}{n-1}\right)^k Q.$$

En effet, la formule est vraie pour $k = 1$, et le produit de $P + c^k Q$ par $P + cQ$ vaut $P + c^{k+1}Q$; les deux termes croisés sont nuls. Pour $k = 0$, on retrouve également $I_n = P + Q$.

Comme $n \geq 3$, $|c| = 1/(n - 1) \leq 1/2 < 1$. Ainsi $c^k \rightarrow 0$ et $M^k \rightarrow P$. Plus explicitement, chaque coefficient diagonal de M^k vaut $1/n + (1 - 1/n)c^k$, et chaque coefficient hors diagonale vaut $(1 - c^k)/n$.

Enfin, $c \neq 0$. Posons $R = P + c^{-1}Q = P - (n - 1)Q$. Les mêmes relations donnent

$$MR = (P + cQ)(P + c^{-1}Q) = P + Q = I_n,$$

et $RM = I_n$. Cette vérification prouve l'inversibilité et donne

$$M^{-1} = P - (n - 1)Q.$$

Sous forme usuelle, $M^{-1} = J - (n - 1)I_n$: ses coefficients diagonaux valent $2 - n$, et les autres valent 1. La condition $n \geq 3$ est utilisée pour la convergence ; pour $n = 2$, le coefficient c serait égal à -1 et les puissances ne convergeraient pas.

Partie III : étude du cas général

Le préambule et les questions de cette partie sont formulés dans des espaces vectoriels réels. Jusqu'à III.4 inclus, aucune diagonalisabilité n'est supposée. Pour III.5, elle est supposée sur $\mathbb{R}$.

1. On note $V_1 = {}^t(1, \dots, 1)$.

1. (a) Question adaptée au programme actuel : la matrice et les vecteurs sont considérés sur $\mathbb{R}$.

Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, le coefficient d'indice i de MV_1 est

$$(MV_1)_i = \sum_{j=1}^n m_{ij}.$$

Sous l'hypothèse déjà imposée $m_{ij} \geq 0$, la condition $MV_1 = V_1$ équivaut donc exactement à la somme de chaque ligne égale à 1, c'est-à-dire à la définition d'une matrice stochastique. L'hypothèse de non-négativité des coefficients est indispensable à cette équivalence avec la définition.

1. (b) Soient $A, B \in S_n$. Le coefficient d'indice (i, j) de leur produit est

$$\sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell j},$$

somme de produits de réels non négatifs. Il est donc non négatif.

D'autre part, la caractérisation précédente et l'associativité du produit matriciel donnent

$$(AB)V_1 = A(BV_1) = AV_1 = V_1.$$

Le produit AB est donc stochastique. Une récurrence donne ensuite $A^k \in S_n$ et $B^k \in S_n$ pour tout entier $k \geq 1$: la propriété est vraie pour $k = 1$ et stable par multiplication par la matrice initiale. L'identité I_n , puissance d'ordre 0, est elle aussi stochastique.

2. Question adaptée au programme actuel : E est réel. Rectification locale des indices : si $d = \dim(\text{Ker } u)$, les vecteurs $e_1, \dots, e_d$ forment une base du noyau et les images à conserver sont celles de $e_{d+1}, \dots, e_n$. Dans le PDF, les deux bases sont écrites avec le même dernier indice n et la famille d'images comprend les vecteurs du noyau, dont les images sont nulles. Cette écriture ne peut pas donner la base annoncée.

On établit les deux propriétés d'une base sans utiliser le théorème du rang comme justification, puisque la question demande de le démontrer.

Génération : pour tout $x \in E$, sa décomposition dans la base complétée s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i.$$

Les vecteurs $e_1, \dots, e_d$ étant dans le noyau,

$$u(x) = \sum_{i=d+1}^n \alpha_i u(e_i).$$

Toute image appartient donc au sous-espace engendré par $u(e_{d+1}), \dots, u(e_n)$; réciproquement, chacun de ces vecteurs appartient à l'image. La famille engendre $\text{Im } u$.

Liberté : supposons

$$\sum_{i=d+1}^n \alpha_i u(e_i) = 0.$$

Alors

$$w = \sum_{i=d+1}^n \alpha_i e_i$$

appartient à $\text{Ker } u$. Il existe donc $\beta_1, \dots, \beta_d$ tels que

$$w = \sum_{i=1}^d \beta_i e_i.$$

En soustrayant,

$$\sum_{i=d+1}^n \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^d \beta_i e_i = 0.$$

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, donc tous les coefficients, en particulier les α_i , sont nuls.

La famille d'images est libre et constitue une base de $\text{Im } u$.

Si $d = n$, le noyau est égal à E , donc $u = 0$ et $\text{Im } u = \{0\}$. La famille vide est la base de ce sous-espace, et l'argument reste cohérent.

La base de l'image contient $n - d$ vecteurs. Donc $\dim(\text{Im } u) = n - d$, et

$$\dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Ker } u) = n.$$

3. (a) Question adaptée au programme actuel : x appartient à $\mathbb{R}^n$ et $|x|$ est le maximum des valeurs absolues de ses coordonnées.

Pour chaque i , l'inégalité triangulaire réelle, la positivité des m_{ij} et la définition de $|x|$ donnent

$$|(f(x))_i| = \left| \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n m_{ij} |x_j| \leq \sum_{j=1}^n m_{ij} |x| = |x|.$$

La dernière égalité utilise la somme de la ligne i , égale à 1. En prenant le maximum sur i , on obtient $|f(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

En itérant cette inégalité, on a aussi $|f^k(x)| \leq |x|$ pour tout $k \geq 0$, ce qui servira en III.4.(a).

3. (b) Question adaptée au programme actuel : on étudie les valeurs propres réelles et leur valeur absolue.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f et soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé. On a $f(x) = \lambda x$ et $|x| > 0$. La définition du maximum donne $|\lambda x| = |\lambda| |x|$. Ainsi, par III.3.(a),

$$|\lambda| |x| = |f(x)| \leq |x|.$$

La division par $|x| > 0$ donne $|\lambda| \leq 1$.

De plus, III.1.(a) donne $MV_1 = V_1$. Comme $v_1 \neq 0$, cela signifie $f(v_1) = v_1$, donc 1 est effectivement une valeur propre de f .

4. (a) Question adaptée au programme actuel : l'image, le noyau et les vecteurs sont pris dans $\mathbb{R}^n$.

Puisque $y \in \text{Ker}(f - \text{Id})$, on a $f(y) = y$. D'autre part, la représentation dans l'image donne $f(x) = x + y$.

On montre par récurrence que $f^k(x) = x + ky$ pour tout $k \geq 1$. Pour $k = 1$, c'est l'identité précédente. Si elle est vraie au rang k , la linéarité donne

$$f^{k+1}(x) = f(x + ky) = f(x) + kf(y) = x + y + ky = x + (k + 1)y.$$

L'inégalité de III.3.(a), itérée, donne $|f^k(x)| \leq |x|$. Par l'inégalité triangulaire pour le maximum des valeurs absolues,

$$k|y| = |ky| = |f^k(x) - x| \leq |f^k(x)| + |x| \leq 2|x|.$$

L'homogénéité $|ky| = k|y|$ vient de $k > 0$ et de la définition coordonnée par coordonnée.

Ainsi $0 \leq |y| \leq 2|x|/k$ pour tout entier $k \geq 1$. Le passage à la limite $k \rightarrow +\infty$ donne $|y| = 0$. Chaque coordonnée de y est donc nulle : $y = 0$.

On a établi $\text{Im}(f - \text{Id}) \cap \text{Ker}(f - \text{Id}) = \{0\}$.

4. (b) Question adaptée au programme actuel : la somme directe est établie dans $\mathbb{R}^n$.

La question précédente donne une intersection nulle. Par III.3.(b), v_1 appartient au noyau de $f - \text{Id}$ et est non nul ; le résultat de III.2 s'applique donc à $u = f - \text{Id}$ et donne

$$\dim \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) + \dim \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}) = n.$$

La formule de dimension d'une somme et l'intersection nulle montrent que la somme des deux sous-espaces a dimension n . Elle est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de même dimension, donc elle est égale à $\mathbb{R}^n$. On conclut

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}).$$

Cette conclusion est vraie pour toute matrice stochastique réelle, sans hypothèse de diagonalisabilité.

4. (c) Question adaptée au programme actuel : les sous-espaces propres considérés sont associés à des valeurs propres réelles ; l'hypothèse utilisée après cette question est une diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$.

Pour la stabilité de l'image, soit $x \in \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id})$. Il existe $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = f(z) - z$. La linéarité et la composition donnent

$$f(x) = f^2(z) - f(z) = (f - \operatorname{Id})(f(z)).$$

Donc $f(x)$ appartient encore à l'image de $f - \operatorname{Id}$.

Soit maintenant $\lambda \neq 1$ une valeur propre réelle, et soit $w \in E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})$. Alors

$$(f - \operatorname{Id})(w) = (\lambda - 1)w.$$

Puisque $\lambda - 1 \neq 0$, on peut écrire

$$w = (f - \operatorname{Id})\left(\frac{w}{\lambda - 1}\right).$$

Ainsi $w \in \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id})$ et $E_\lambda \subset \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id})$. La preuve vaut aussi pour $w = 0$.

5. (a) Question adaptée au programme actuel : on suppose désormais f diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et on utilise seulement ses sous-espaces propres réels.

Notons W la somme des sous-espaces propres E_λ associés aux valeurs propres $\lambda \neq 1$. Cette somme est directe, par le résultat du cours sur les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes. D'après III.4.(c), chacun est inclus dans $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id})$, donc $W \subset \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id})$.

Réciproquement, comme f est diagonalisable, tout $z \in \mathbb{R}^n$ s'écrit

$$z = z_1 + \sum_{\lambda \neq 1} z_\lambda,$$

avec $z_1 \in E_1$ et $z_\lambda \in E_\lambda$, la somme portant sur les autres valeurs propres distinctes de f .
Alors

$$(f - \text{Id})(z) = \sum_{\lambda \neq 1} (\lambda - 1)z_\lambda \in W.$$

Toute image appartient donc à W , et les deux inclusions donnent

$$\text{Im}(f - \text{Id}) = \bigoplus_{\lambda \neq 1} E_\lambda.$$

S'il n'existe pas de valeur propre autre que 1, la diagonalisabilité impose $f = \text{Id}$; l'image et la somme vide sont alors toutes deux égales à $\{0\}$. Ce cas est inclus dans la conclusion.

5. (b) Question adaptée au programme actuel : la base propre et toutes les valeurs propres sont réelles. La notation d'ordre ne fait intervenir que les indices définis $1, \dots, n$; l'indice intermédiaire r , non défini dans le PDF, est supprimé sans changer la condition de classement.

Soit $p = \dim E_1$. On a $p \geq 1$, car $v_1 \in E_1$ et $v_1 \neq 0$. La diagonalisabilité et III.5.(a) permettent de compléter une base de E_1 en une base de vecteurs propres. Les vecteurs $v_1, \dots, v_p$ correspondent à $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 1$, et les autres à des valeurs propres différentes de 1. On peut ranger ces dernières par valeurs absolues décroissantes, après les p premières valeurs; cela donne bien $1 = |\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$, puisque toutes les valeurs absolues sont au plus 1.

Dans cette base,

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Soit C la matrice de passage dont les colonnes sont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs

de $\mathcal{B}'$. Elle est inversible, car $\mathcal{B}'$ est une base. Les relations de changement de base donnent

$$M = CDC^{-1}, \quad M^k = CD^kC^{-1}, \quad D^k = C^{-1}M^kC.$$

Si D^k converge coefficient par coefficient vers une matrice D_∞ , chaque coefficient de CD^kC^{-1} est une somme finie de produits de constantes et de coefficients de D^k . Les règles usuelles de passage à la limite pour des sommes et des produits finis donnent $M^k \rightarrow CD_\infty C^{-1}$.

Réciproquement, si $M^k \rightarrow L$, la dernière relation et le même argument donnent $D^k \rightarrow C^{-1}LC$. Ainsi (M^k) converge si et seulement si (D^k) converge.

Cette équivalence utilise une matrice de passage fixe ; aucun échange avec une somme infinie n'intervient.

5. (c) Question adaptée au programme actuel : le critère porte sur les valeurs propres réelles d'une matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$, et sur leur valeur absolue.

On a $D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$. Cette suite converge si et seulement si chacune des suites réelles (λ_i^k) converge.

D'après III.3.(b), $\lambda_i \in [-1, 1]$. Si $|\lambda_i| < 1$, la suite géométrique λ_i^k tend vers 0. Si $\lambda_i = 1$, elle est constante égale à 1. Si $\lambda_i = -1$, ses sous-suites paires et impaires sont constantes égales à 1 et -1 , donc elle ne converge pas. Ces cas épuisent l'intervalle $[-1, 1]$.

Par III.5.(b), (M^k) converge donc si et seulement si -1 n'est pas une valeur propre. Comme 1 est toujours valeur propre et que les seuls réels de valeur absolue 1 sont -1 et 1, cela équivaut à : 1 est la seule valeur propre de valeur absolue 1.

La condition de diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$ est conservée dans ce critère ; elle ne doit pas être omise de son énoncé.

5. (d) Question adaptée au programme actuel : on conserve les hypothèses de diagonalisabilité réelle et de convergence de III.5.(c), et la conclusion est un projecteur de $\mathbb{R}^n$.

Les p premiers vecteurs de $\mathcal{B}'$ forment une base de $E_1 = \text{Ker}(f - \text{Id})$. D'après III.5.(a),

les vecteurs $v_{p+1}, \dots, v_n$ forment une base de $\text{Im}(f - \text{Id})$. En effet, ils sont les vecteurs d'une base propre associés aux autres valeurs propres.

Les premières valeurs propres sont égales à 1 ; les suivantes ont une valeur absolue strictement inférieure à 1, grâce à l'hypothèse de convergence. Donc

$$D^k \longrightarrow D_\infty = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Pour $p = n$, on lit cette expression comme $D_\infty = I_n$, avec absence du bloc inférieur. Dans la base $\mathcal{B}'$, cette matrice fixe $v_1, \dots, v_p$ et annule les autres vecteurs. Elle représente donc le projecteur π sur $\text{Ker}(f - \text{Id})$ de direction $\text{Im}(f - \text{Id})$.

Le changement de base montre que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} M^k = CD_\infty C^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\pi).$$

Plus explicitement, pour tout vecteur $x = y + z$ dans la somme directe de III.4.(b), la limite de $f^k(x)$ est y : les composantes de z dans les autres sous-espaces propres sont multipliées par des puissances qui tendent vers 0.

La partie I précise que la diagonalisabilité n'est pas nécessaire à la convergence des puissances ni, dans cet exemple, à cette description de la limite. Sa matrice M n'est pas diagonalisable, mais M^k tend vers le projecteur P sur le noyau de $f - \text{Id}$ de direction son image. La partie I constitue donc un exemple de convergence situé au-delà de l'hypothèse de III.5 ; elle ne justifie pas, à elle seule, un critère général sans cette hypothèse.

Relevé des adaptations

- Préambule, III.1.(a), III.2, III.3.(a)-(b), III.4.(a)-(c) et III.5.(a)-(d) : tous les espaces, vecteurs, matrices et sous-espaces propres sont considérés sur $\mathbb{R}$. Les valeurs absolues des valeurs propres réelles remplacent la formulation initiale. Pour III.5, la diagonalisabilité est explicitement supposée sur $\mathbb{R}$, ce qui restreint la portée du

résultat à ce cadre tout en préservant les démonstrations et conclusions nécessaires. Cette adaptation respecte le référentiel d'algèbre linéaire réelle.

- Préambule : la somme d'une ligne est écrite $m_{i1} + \dots + m_{in} = 1$, en uniformisant la notation des coefficients ; le PDF mêle minuscules et majuscules dans cette formule.
- II.1.(d) : $P(e_n)$ est rectifié en $p(e_n)$ pour distinguer l'application de sa matrice.
- III.2 : les indices de la base du noyau et de la famille d'images sont rectifiés. Avec $d = \dim \text{Ker } u$, la base du noyau est $(e_1, \dots, e_d)$ et la base de l'image est $(u(e_{d+1}), \dots, u(e_n))$. Les images des vecteurs du noyau sont nulles et ne doivent pas figurer dans une base de l'image. Le cas $d = n$ est explicitement traité.
- III.5.(b) : l'indice intermédiaire r , non défini dans la chaîne de classement du PDF, est supprimé ; la même condition est écrite $1 = |\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$.