



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1991

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

HEC - ESCP - emlyon 1991 - Mathématiques I

Énoncé - Mathématiques approfondies ECG

Sujet d'origine : concours 1991, option générale. La structure, la numérotation et les questions sont conservées. La formule (4) est rectifiée : sa somme porte jusqu'à $+\infty$, et non jusqu'à n . Dans la partie II, les expressions comportant t^a sont considérées pour $t > 0$; lorsque $a < 0$, les intégrales en 0 sont impropres. L'algorithme demandé en II.3.c est à écrire en Python.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les résultats numériques nécessaires aux questions II.3.a et II.3.d sont fournis à la fin du sujet pour permettre leur traitement sans calculatrice.

Préliminaire

Soit a un nombre réel strictement supérieur à -1 . Pour tout nombre réel strictement positif x , établir la convergence de l'intégrale

$$\int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt,$$

puis celle de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt.$$

La partie I étudie la fonction f_a définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt.$$

La partie II étudie une méthode de calcul de valeurs approchées de la fonction φ définie pour $a > -1$ par

$$\varphi(a) = f_a(0) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt.$$

Partie I - Étude de la fonction f_a

1. Cas particulier $a = 0$

- a) Montrer que la fonction f_0 est en fait définie sur $\mathbb{R}$.
- b) Interpréter la fonction $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f_0$ en termes de probabilités. En déduire la valeur de $f_0(0)$, ainsi que les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Propriétés générales de f_a

- a) Montrer que f_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Calculer ses dérivées première et seconde.
- b) Déterminer le sens de variation de f_a sur $]0, +\infty[$.
- c) Étudier la limite de f_a en $+\infty$.

3. Étude du cas $a > 0$

- a) Montrer que f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Calculer $f'_a(0)$, la dérivée étant prise à droite en 0.
- b) Étudier les variations de f'_a .
- c) Donner l'allure de la courbe représentative de f_a .

4. Étude du cas $-1 < a < 0$

- a) Montrer que f_a est continue sur $[0, +\infty[$. Cette fonction est-elle dérivable en 0 ?
- b) Montrer que f_a est convexe.
- c) Donner l'allure de sa courbe représentative.

5. Étude de f_a au voisinage de $+\infty$, pour $a > -1$

- a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $x > 0$,

$$f_a(x) = x^{a-1}e^{-x^2/2} + (a-1) \int_x^{+\infty} t^{a-2}e^{-t^2/2} dt,$$

cette dernière intégrale étant convergente.

- b) En déduire le signe de $f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2}$ selon les valeurs de a .
- c) Établir que, pour $x > 0$ et $a > -1$,

$$\left| f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2} \right| \leq \frac{|a-1|}{x^2} f_a(x).$$

On pourra utiliser la décroissance de $t \mapsto 1/t^2$ sur $[x, +\infty[$.

- d) En déduire que

$$f_a(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{a-1}e^{-x^2/2}.$$

Application. Établir la convergence de $\int_0^{+\infty} f_a(x) dx$, puis, à l'aide d'une intégration par parties, justifier l'égalité

$$f_{a+1}(0) = \int_0^{+\infty} f_a(x) dx.$$

e) Dédurre également de la question c) que, si $-1 < a \leq 1$ et $x > 0$,

$$|f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2}| \leq 2x^{a-3}e^{-x^2/2}. \quad (1)$$

Partie II - Approximation de $\varphi(a)$

Pour $a > -1$, on pose

$$\varphi(a) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt.$$

Pour $x > 0$, on écrit

$$\varphi(a) = g_a(x) + f_a(x), \quad g_a(x) = \int_0^x t^a e^{-t^2/2} dt.$$

1. Relation fonctionnelle vérifiée par φ

a) Établir l'égalité

$$\varphi(a+2) = (a+1)\varphi(a). \quad (2)$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\varphi(a+2n)$ en fonction de $\varphi(a)$. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$. En déduire $\varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Développement en série de $g_a(x)$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, on pose

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{2k+a}}{2^k k!}.$$

a) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction $u \mapsto e^{-u}$ sur $[0, t^2/2]$ à l'ordre n . En déduire le signe de $t^a e^{-t^2/2} - S_n(t)$ suivant la parité de n . Conclure que, pour $t > 0$ et $p, q \in \mathbb{N}$,

$$S_{2p+1}(t) \leq t^a e^{-t^2/2} \leq S_{2q}(t).$$

b) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ non nul et $t > 0$,

$$\left| t^a e^{-t^2/2} - S_n(t) \right| \leq \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}.$$

On distinguera deux cas suivant la parité de n .

c) En conclure que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$,

$$\left| g_a(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k! (2k+a+1)} \right| \leq \frac{x^{2n+a+1}}{2^n n! (2n+a+1)}. \quad (3)$$

Justifier l'écriture

$$g_a(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k! (2k+a+1)}. \quad (4)$$

3. Méthode d'approximation de $\varphi(a)$

On suppose désormais $-1 < a \leq 1$. La relation (2) permet de ramener le calcul pour tout $a > -1$ à ce cas.

On écrit $\varphi(a) = g_a(x) + f_a(x)$. On choisit x assez grand pour maîtriser la contribution de $f_a(x)$ grâce à (1), puis on approche $g_a(x)$ par

$$s_n(x) = x^{a+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^k k! (2k + a + 1)}.$$

a) Déterminer le plus petit entier naturel strictement positif p tel que, pour tout $a \in]-1, 1]$,

$$2p^{a-3} e^{-p^2/2} \leq 10^{-5}.$$

b) En utilisant (1), montrer que, pour $x = 5$ et tout $a \in]-1, 1]$,

$$|f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2}| \leq 10^{-5}.$$

c) On prend désormais $x = 5$. Pour $a \in]-1, 1]$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_k = \frac{5^{2k}}{2^k k! (2k + a + 1)}.$$

Exprimer u_{k+1} en fonction de k et de u_k . Écrire en Python un algorithme calculant u_n pour des valeurs données de n et de a .

d) Grâce à (3), déterminer un entier naturel n tel que, pour tout $a \in]-1, 1]$,

$$|g_a(5) - s_n(5)| \leq 10^{-5}.$$

e) La méthode proposée permet-elle, avec les choix effectués pour x et n , d'obtenir des valeurs approchées de $\varphi(a)$ à 2×10^{-5} près lorsque $a \in]-1, 1]$? Préciser une expression de la valeur approchée.

Données numériques ajoutées pour l'adaptation

Les valeurs suivantes peuvent être utilisées sans démonstration :

$$\frac{2e^{-8}}{16} \simeq 4,1933 \times 10^{-5}, \quad \frac{2e^{-25/2}}{25} \simeq 2,9813 \times 10^{-7}.$$

En posant $B_n = \frac{25^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!},$

$$B_{40} \simeq 2,8111 \times 10^{-5}, \quad B_{41} \simeq 8,3665 \times 10^{-6}.$$