



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1991

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

HEC - ESCP - emlyon 1991 - Mathématiques I

Corrigé détaillé - Mathématiques approfondies ECG

Les notations et la numérotation suivent l'énoncé. On suppose $a > -1$, sauf mention contraire. Toutes les intégrations par parties portant sur des intégrales impropres sont d'abord effectuées sur un segment, puis justifiées par passage à la limite. Les dérivées en 0, lorsqu'elles existent, sont prises à droite.

La coquille de la formule (4) du PDF est rectifiée : il s'agit d'une somme jusqu'à $+\infty$. Pour $a < 0$, on n'évalue jamais t^a en $t = 0$; on travaille sur $t > 0$ et avec des intégrales impropres.

Préliminaire - Convergence des intégrales

Convergence à l'infini

Pour tout réel b ,

$$t^{b+2}e^{-t^2/2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

En effet, le logarithme de cette expression vaut $(b+2)\ln t - t^2/2$, qui tend vers $-\infty$ par croissance comparée. Ainsi,

$$t^b e^{-t^2/2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

La fonction intégrée est positive et continue sur $[x, +\infty[$ pour tout $x > 0$. Comme

$\int_x^{+\infty} t^{-2} dt$ converge, le critère de comparaison donne

$$\int_x^{+\infty} t^b e^{-t^2/2} dt \text{ converge pour tout } b \in \mathbb{R} \text{ et tout } x > 0.$$

Ce résultat, valable même pour $b \leq -1$, sera utile en I.5.a.

Convergence au voisinage de zéro

Lorsque $t \rightarrow 0^+$, $e^{-t^2/2} \rightarrow 1$, donc

$$t^a e^{-t^2/2} \sim t^a.$$

Or $\int_0^1 t^a dt$ converge si et seulement si $a > -1$, et vaut alors $1/(a+1)$. Par comparaison d'intégrales de fonctions positives,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt \text{ converge pour } a > -1.}$$

On peut donc définir f_a sur $[0, +\infty[$ et $\varphi(a) = f_a(0)$. Ces intégrales sont strictement positives.

Partie I - Étude de f_a

1. Cas particulier $a = 0$

a) Définition sur $\mathbb{R}$

Pour $x < 0$, on décompose

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \int_x^0 e^{-t^2/2} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt.$$

La première intégrale est celle d'une fonction continue sur un segment et la seconde converge d'après le préliminaire. Ainsi,

f_0 est définie sur tout $\mathbb{R}$.

b) Interprétation probabiliste et limites

Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, et Φ sa fonction de répartition. Sa densité est

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

Par conséquent, pour tout réel x ,

$$\frac{f_0(x)}{\sqrt{2\pi}} = P(Z \geq x) = 1 - \Phi(x).$$

Comme Z possède une densité, remplacer $\geq$ par $>$ ne change pas cette probabilité. Par symétrie, $P(Z \geq 0) = 1/2$. On obtient

$$f_0(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Enfin, les limites de la fonction de répartition donnent

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = \sqrt{2\pi}.$$

2. Propriétés générales de f_a

a) Régularité et dérivées

Pour $x > 0$, on écrit

$$f_a(x) = f_a(1) - \int_1^x t^a e^{-t^2/2} dt.$$

La fonction $x \mapsto x^a = e^{a \ln x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, de même que $x \mapsto e^{-x^2/2}$. Le théorème fondamental de l'analyse donne donc

$$f'_a(x) = -x^a e^{-x^2/2}, \quad x > 0.$$

Cette dérivée est de classe $\mathcal{C}^\infty$; f_a l'est donc aussi sur cet intervalle. En dérivant le produit,

$$\begin{aligned} f''_a(x) &= -ax^{a-1}e^{-x^2/2} + x^{a+1}e^{-x^2/2} \\ &= x^{a-1}e^{-x^2/2}(x^2 - a). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f''_a(x) = x^{a-1}e^{-x^2/2}(x^2 - a).$$

b) Sens de variation

Pour $x > 0$, $x^a e^{-x^2/2} > 0$, donc $f'_a(x) < 0$.

$$f_a \text{ est strictement décroissante sur }]0, +\infty[.$$

Elle est en fait strictement décroissante sur $[0, +\infty[$: si $0 \leq x < y$, alors

$$f_a(x) - f_a(y) = \int_x^y t^a e^{-t^2/2} dt > 0.$$

c) Limite en $+\infty$

Puisque l'intégrale définissant $\varphi(a)$ converge,

$$\int_0^x t^a e^{-t^2/2} dt \longrightarrow \varphi(a).$$

Or $f_a(x) = \varphi(a) - \int_0^x t^a e^{-t^2/2} dt$. Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = 0.}$$

3. Cas $a > 0$

a) Régularité en zéro

Pour $x > 0$,

$$f_a(x) - f_a(0) = - \int_0^x t^a e^{-t^2/2} dt.$$

En utilisant $0 < e^{-t^2/2} \leq 1$, on trouve

$$0 \leq f_a(0) - f_a(x) \leq \int_0^x t^a dt = \frac{x^{a+1}}{a+1}.$$

Ainsi f_a est continue en 0, et

$$\left| \frac{f_a(x) - f_a(0)}{x} \right| \leq \frac{x^a}{a+1} \rightarrow 0.$$

D'où $f'_a(0) = 0$. De plus, $f'_a(x) = -x^a e^{-x^2/2} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. La dérivée se prolonge donc continûment en 0 :

$$f_a \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[), \quad f'_a(0) = 0.$$

b) Variations de f'_a

Pour $x > 0$, le signe de $f''_a(x)$ est celui de $x^2 - a$.

Intervalle	Signe de f''_a	Variation de f'_a
$]0, \sqrt{a}[$	—	Strictement décroissante
$x = \sqrt{a}$	0	Minimum
$]\sqrt{a}, +\infty[$	+	Strictement croissante

Aux extrémités, $f'_a(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'_a(x) = 0$. Au minimum,

$$f'_a(\sqrt{a}) = -a^{a/2} e^{-a/2}.$$

c) Allure de la courbe

La courbe part du point $(0, \varphi(a))$, avec une demi-tangente horizontale d'équation $y = \varphi(a)$. Elle est strictement décroissante et reste au-dessus de l'axe des abscisses.

Elle est concave sur $[0, \sqrt{a}]$, puis convexe sur $[\sqrt{a}, +\infty[$. Le changement de signe de f''_a donne un point d'inflexion en

$$(\sqrt{a}, f_a(\sqrt{a})).$$

Enfin, l'axe des abscisses est une asymptote horizontale en $+\infty$, approchée par au-dessus.

4. Cas $-1 < a < 0$

a) Continuité et absence de dérivée finie en zéro

La même majoration que précédemment donne

$$0 \leq f_a(0) - f_a(x) \leq \frac{x^{a+1}}{a+1} \rightarrow 0,$$

car $a+1 > 0$. La fonction est donc continue en 0, et déjà continue sur $]0, +\infty[$.

Pour étudier le taux d'accroissement, on utilise, pour $0 < t \leq x$,

$$e^{-x^2/2} \leq e^{-t^2/2} \leq 1.$$

Après multiplication par $t^a > 0$ et intégration,

$$e^{-x^2/2} \frac{x^{a+1}}{a+1} \leq \int_0^x t^a e^{-t^2/2} dt \leq \frac{x^{a+1}}{a+1}.$$

Les deux bornes sont équivalentes, donc

$$f_a(x) - f_a(0) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{x^{a+1}}{a+1}.$$

Ainsi,

$$\frac{f_a(x) - f_a(0)}{x} \sim -\frac{x^a}{a+1} \rightarrow -\infty.$$

On conclut

f_a est continue sur $[0, +\infty[$ mais n'est pas dérivable en 0.

Sa courbe admet en $(0, \varphi(a))$ une demi-tangente verticale d'équation $x = 0$.

b) Convexité

Pour $x > 0$, on a $x^2 - a > 0$, puisque $a < 0$. Ainsi $f_a''(x) > 0$.

La fonction est donc strictement convexe sur $]0, +\infty[$. Sa continuité en 0 permet de prolonger les inégalités de convexité à l'extrémité par passage à la limite. D'où

f_a est convexe sur $[0, +\infty[$.

c) Allure de la courbe

La courbe part de $(0, \varphi(a))$ avec une demi-tangente verticale. Elle est strictement décroissante, convexe, positive, et tend vers 0. Elle ne présente aucun point d'inflexion ; l'axe des abscisses est son asymptote horizontale en $+\infty$.

5. Comportement en $+\infty$

a) Intégration par parties

Fixons $x > 0$ et $R > x$. Écrivons

$$t^a e^{-t^2/2} = t^{a-1} (te^{-t^2/2}).$$

Les fonctions utilisées sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, R]$. En prenant $u(t) = t^{a-1}$ et $v(t) = -e^{-t^2/2}$,

$$\int_x^R t^a e^{-t^2/2} dt = \left[-t^{a-1} e^{-t^2/2} \right]_x^R + (a-1) \int_x^R t^{a-2} e^{-t^2/2} dt.$$

Par croissance comparée, $R^{a-1} e^{-R^2/2} \rightarrow 0$. La dernière intégrale converge en $+\infty$ d'après le préliminaire appliqué à $b = a - 2$; sa borne inférieure étant strictement positive, il n'y a aucune difficulté en 0.

En faisant tendre R vers $+\infty$,

$$f_a(x) = x^{a-1} e^{-x^2/2} + (a-1) \int_x^{+\infty} t^{a-2} e^{-t^2/2} dt.$$

b) Signe de la différence

L'intégrale figurant dans la différence est strictement positive. Ainsi,

$$\begin{cases} f_a(x) < x^{a-1} e^{-x^2/2}, & -1 < a < 1, \\ f_1(x) = e^{-x^2/2}, & a = 1, \\ f_a(x) > x^{a-1} e^{-x^2/2}, & a > 1. \end{cases}$$

c) Majoration de l'erreur

Pour $t \geq x > 0$,

$$t^{a-2} e^{-t^2/2} = \frac{1}{t^2} t^a e^{-t^2/2} \leq \frac{1}{x^2} t^a e^{-t^2/2}.$$

En intégrant cette inégalité, puis en utilisant I.5.a,

$$\left| f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2} \right| \leq \frac{|a-1|}{x^2} f_a(x).$$

d) Équivalent et application

La fonction f_a étant strictement positive, on divise l'inégalité précédente par $f_a(x)$:

$$\left| 1 - \frac{x^{a-1}e^{-x^2/2}}{f_a(x)} \right| \leq \frac{|a-1|}{x^2} \rightarrow 0.$$

Il en résulte $x^{a-1}e^{-x^2/2}/f_a(x) \rightarrow 1$, puis, en prenant l'inverse,

$$f_a(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{a-1}e^{-x^2/2}.$$

Convergence de l'intégrale de f_a . La fonction est continue sur $[0, 1]$: la majoration utilisée en I.3.a et I.4.a vaut pour tout $a > -1$. Son intégrale sur ce segment existe. À l'infini, l'équivalent précédent et le préliminaire, appliqué à l'exposant $a - 1$, donnent la convergence de l'intégrale de f_a , qui est positive.

Calcul par intégration par parties. Pour $0 < \varepsilon < R$, la fonction f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, R]$. Donc

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^R f_a(x) dx &= [x f_a(x)]_{\varepsilon}^R - \int_{\varepsilon}^R x f'_a(x) dx \\ &= R f_a(R) - \varepsilon f_a(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^R x^{a+1} e^{-x^2/2} dx. \end{aligned}$$

La continuité en 0 donne $\varepsilon f_a(\varepsilon) \rightarrow 0$. L'équivalent donne

$$R f_a(R) \sim R^a e^{-R^2/2} \rightarrow 0.$$

Enfin, l'intégrale de $x^{a+1}e^{-x^2/2}$ converge puisque $a+1 > -1$. En faisant tendre ε vers 0^+ et R vers $+\infty$,

$$\int_0^{+\infty} f_a(x) dx = \int_0^{+\infty} x^{a+1} e^{-x^2/2} dx = f_{a+1}(0).$$

Le passage par $[\varepsilon, R]$ est nécessaire pour couvrir le cas $-1 < a < 0$, où f_a n'est pas dérivable en 0.

e) Majoration pour $-1 < a \leq 1$

Dans ce cas, I.5.b donne $f_a(x) \leq x^{a-1}e^{-x^2/2}$, et $|a-1| = 1-a \leq 2$. Ainsi,

$$|f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2}| \leq \frac{1-a}{x^2} f_a(x) \leq 2x^{a-3}e^{-x^2/2}.$$

D'où la formule (1) :

$$|f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2}| \leq 2x^{a-3}e^{-x^2/2}.$$

Partie II - Approximation de $\varphi(a)$

1. Relation fonctionnelle

a) Relation entre $\varphi(a+2)$ et $\varphi(a)$

Pour $0 < \varepsilon < R$, on intègre par parties avec $u(t) = t^{a+1}$ et $v(t) = -e^{-t^2/2}$:

$$\int_{\varepsilon}^R t^{a+2} e^{-t^2/2} dt = \left[-t^{a+1} e^{-t^2/2} \right]_{\varepsilon}^R + (a+1) \int_{\varepsilon}^R t^a e^{-t^2/2} dt.$$

À l'infini, le terme de bord tend vers 0 par croissance comparée. En 0, il tend aussi vers 0 car $a + 1 > 0$. Les deux intégrales convergent par le préliminaire. Ainsi,

$$\boxed{\varphi(a + 2) = (a + 1)\varphi(a).} \quad (2)$$

b) Itération et valeurs entières

En itérant (2), ou par récurrence sur n ,

$$\boxed{\varphi(a + 2n) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} (a + 2j + 1) \right) \varphi(a).}$$

Pour $n = 0$, le produit vide vaut 1, ce qui rend la formule valable dès $n = 0$.

La partie I donne

$$\boxed{\varphi(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

De plus,

$$\varphi(1) = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2/2} dt = \left[-e^{-t^2/2} \right]_0^{+\infty} = 1.$$

Ainsi, pour $m \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(2m) = (1 \times 3 \times \cdots \times (2m - 1)) \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

En séparant facteurs pairs et impairs de $(2m)!$,

$$1 \times 3 \times \cdots \times (2m-1) = \frac{(2m)!}{2^m m!}.$$

Pour les indices impairs, $\varphi(2m+1) = (2 \times 4 \times \cdots \times 2m)\varphi(1) = 2^m m!$. Finalement,

$$\varphi(2m) = \frac{(2m)!}{2^m m!} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \varphi(2m+1) = 2^m m!.$$

Ces formules comprennent bien $m = 0$.

2. Développement de $g_a(x)$

a) Formule de Taylor et signe du reste

Posons $z = t^2/2$, avec $t > 0$. La fonction $h(u) = e^{-u}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $h^{(k)}(u) = (-1)^k e^{-u}$. Taylor avec reste intégral, entre 0 et z , donne

$$e^{-z} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k z^k}{k!} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^z (z-u)^n e^{-u} du.$$

En multipliant par $t^a > 0$,

$$t^a e^{-t^2/2} - S_n(t) = \frac{(-1)^{n+1} t^a}{n!} \int_0^{t^2/2} \left(\frac{t^2}{2} - u \right)^n e^{-u} du.$$

L'intégrale est strictement positive lorsque $t > 0$. Par conséquent, le reste est négatif pour n pair et positif pour n impair. D'où

$$S_{2p+1}(t) \leq t^a e^{-t^2/2} \leq S_{2q}(t) \quad (p, q \in \mathbb{N}, t > 0).$$

Vérification élémentaire de la formule, par intégrations par parties. Pour un $z \geq 0$ fixé, posons

$$I_n(z) = \frac{1}{n!} \int_0^z (z-u)^n e^{-u} du.$$

On a $I_0(z) = 1 - e^{-z}$. Pour $n \geq 1$, une intégration par parties donne

$$I_n(z) = \frac{z^n}{n!} - I_{n-1}(z).$$

En remplaçant successivement $I_{n-1}, I_{n-2}, \dots$, on retrouve exactement la formule de Taylor ci-dessus. On peut ainsi établir l'identité sans utiliser une théorie des séries de fonctions.

b) Majoration du reste suivant la parité

Posons $H(t) = t^a e^{-t^2/2}$. Pour $n \geq 1$,

$$S_n(t) - S_{n-1}(t) = (-1)^n \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}.$$

Si n est pair, les encadrements de II.2.a donnent

$$S_{n-1}(t) \leq H(t) \leq S_n(t).$$

Donc

$$|H(t) - S_n(t)| = S_n(t) - H(t) \leq S_n(t) - S_{n-1}(t) = \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}.$$

Si n est impair, on a au contraire

$$S_n(t) \leq H(t) \leq S_{n-1}(t).$$

Alors

$$|H(t) - S_n(t)| = H(t) - S_n(t) \leq S_{n-1}(t) - S_n(t) = \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}.$$

Dans les deux cas,

$$\boxed{|t^a e^{-t^2/2} - S_n(t)| \leq \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}.$$

Le cas $n = 0$, nécessaire à la question suivante, se traite directement :

$$|t^a e^{-t^2/2} - t^a| = t^a(1 - e^{-t^2/2}) \leq t^a.$$

c) Intégration de la majoration et convergence des sommes

Pour chaque $k \geq 0$, $2k + a > -1$, donc $t \mapsto t^{2k+a}$ est intégrable au voisinage de 0. Par linéarité pour une somme finie,

$$\int_0^x S_n(t) dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k! (2k + a + 1)}.$$

Lorsque $a < 0$, ces intégrales s'obtiennent d'abord sur $[\varepsilon, x]$, puis en faisant tendre ε vers 0^+ . Les intégrales des valeurs absolues convergent, ce qui justifie aussi l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
 \left| g_a(x) - \int_0^x S_n(t) dt \right| &\leq \int_0^x |t^a e^{-t^2/2} - S_n(t)| dt \\
 &\leq \frac{1}{2^n n!} \int_0^x t^{2n+a} dt \\
 &= \frac{x^{2n+a+1}}{2^n n! (2n+a+1)}.
 \end{aligned}$$

On obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| g_a(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k! (2k+a+1)} \right| \leq \frac{x^{2n+a+1}}{2^n n! (2n+a+1)}. \quad (3)$$

Pour $a > -1$ et $x > 0$ fixés, notons r_n le membre de droite. Il est positif et

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{x^2}{2(n+1)} \frac{2n+a+1}{2n+a+3} \rightarrow 0.$$

En particulier, à partir d'un certain rang N , $r_{n+1} \leq r_n/2$. Par récurrence, $r_{N+j} \leq r_N/2^j$, donc $r_n \rightarrow 0$. L'inégalité (3) prouve que les sommes partielles tendent vers $g_a(x)$:

$$g_a(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k! (2k+a+1)}. \quad (4)$$

Il n'y a ici aucun échange non justifié d'une somme infinie et d'une intégrale : on intègre uniquement des sommes finies, puis on contrôle leur erreur.

3. Méthode d'approximation

Pourquoi peut-on se ramener à $-1 < a \leq 1$? Pour tout $a > -1$, il existe un entier $m \geq 0$ tel que $b = a - 2m \in]-1, 1]$. La relation II.1.b donne

$$\varphi(a) = \left(\prod_{j=0}^{m-1} (b + 2j + 1) \right) \varphi(b).$$

Cela ramène le calcul à cet intervalle. En revanche, si le produit vaut C , une erreur absolue δ sur $\varphi(b)$ devient une erreur absolue $C\delta$ sur $\varphi(a)$: la précision ne se transporte pas inchangée.

a) Choix du plus petit entier p

L'expression n'étant pas définie pour $p = 0$, on cherche parmi les entiers strictement positifs.

Pour $p \geq 1$, la fonction $a \mapsto p^{a-3}$ est croissante, ou constante si $p = 1$. Son maximum sur $] -1, 1]$ est atteint en $a = 1$ et vaut p^{-2} . La condition demandée est donc équivalente à

$$\frac{2}{p^2} e^{-p^2/2} \leq 10^{-5}.$$

La fonction $H(x) = 2x^{-2}e^{-x^2/2}$ est strictement décroissante pour $x > 0$, car

$$\frac{H'(x)}{H(x)} = -\frac{2}{x} - x < 0.$$

Les données numériques donnent

$$H(4) \simeq 4,1933 \times 10^{-5} > 10^{-5}, \quad H(5) \simeq 2,9813 \times 10^{-7} < 10^{-5}.$$

Par décroissance, aucun entier $p \leq 4$ ne convient et $p = 5$ convient. Ainsi,

$$\boxed{p_{\min} = 5.}$$

b) Approximation de $f_a(5)$

Pour $-1 < a \leq 1$, l'inégalité (1) et $5^{a-3} \leq 5^{-2}$ donnent

$$|f_a(5) - 5^{a-1}e^{-25/2}| \leq 2 \cdot 5^{a-3}e^{-25/2} \leq \frac{2}{25}e^{-25/2} < 10^{-5}.$$

D'où

$$\boxed{|f_a(5) - 5^{a-1}e^{-25/2}| \leq 10^{-5}.$$

L'inégalité porte sur l'erreur commise en remplaçant $f_a(5)$ par $5^{a-1}e^{-25/2}$, et non directement sur $f_a(5)$.

c) Relation de récurrence et algorithme

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{u_{k+1}}{u_k} &= \frac{5^{2k+2}}{2^{k+1}(k+1)!(2k+a+3)} \frac{2^k k! (2k+a+1)}{5^{2k}} \\ &= \frac{25(2k+a+1)}{2(k+1)(2k+a+3)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{u_0 = \frac{1}{a+1}, \quad u_{k+1} = \frac{25(2k+a+1)}{2(k+1)(2k+a+3)} u_k.}$$

Voici un algorithme Python. Il est destiné à des entrées $n \in \mathbb{N}$ et $-1 < a \leq 1$.

Python

```
def calcul_u(n, a):
    if not isinstance(n, int) or n < 0:
        raise ValueError("n doit être un entier naturel")
    if not (-1 < a <= 1):
        raise ValueError("a doit appartenir à ]-1, 1]")

    u = 1 / (a + 1)

    for k in range(n):
        u = u * 25 * (2 * k + a + 1)
        u = u / (2 * (k + 1) * (2 * k + a + 3))

    return u
```

Au début de l'itération d'indice k , la variable u contient u_k . La mise à jour lui donne la valeur u_{k+1} . Après n itérations, on obtient donc u_n . Si $n = 0$, la boucle n'est pas exécutée et on renvoie bien u_0 .

d) Choix de n

Pour $x = 5$, l'inégalité (3) donne

$$|g_a(5) - s_n(5)| \leq \frac{5^{2n+a+1}}{2^n n! (2n + a + 1)}.$$

Pour $n \geq 1$ fixé, examinons la dépendance en a de la borne. La dérivée de son logarithme par rapport à a est

$$\ln 5 - \frac{1}{2n + a + 1} > \ln 5 - \frac{1}{2n} > 0.$$

La borne est donc croissante en a sur $] -1, 1]$, et son maximum est atteint en $a = 1$. Il vaut

$$B_n = \frac{5^{2n+2}}{2^n n! (2n + 2)} = \frac{25^{n+1}}{2^{n+1} (n + 1)!}.$$

Ainsi, pour tout $a \in]-1, 1]$,

$$|g_a(5) - s_n(5)| \leq B_n.$$

Les valeurs fournies donnent $B_{41} \simeq 8,3665 \times 10^{-6} < 10^{-5}$. On peut donc choisir

$$n = 41.$$

Ce choix utilise une somme de 42 termes, d'indices 0 à 41.

Vérification du seuil fourni par cette majoration. On a

$$B_0 = \frac{25}{2}, \quad \frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{25}{2(n+2)}.$$

La suite croît jusqu'à B_{11} , puis décroît strictement. Comme $B_0 > 10^{-5}$ et $B_{40} \simeq 2,8111 \times 10^{-5} > 10^{-5}$, aucun entier $1 \leq n \leq 40$ ne satisfait $B_n \leq 10^{-5}$. Pour $n = 0$, la borne de (3) n'est pas uniformément petite non plus, par exemple en $a = 1$ elle vaut $25/2$.

Ainsi 41 est le premier rang donnant la garantie uniforme par cette borne. Cela ne prétend pas que 41 est le plus petit rang possible pour l'erreur réelle, qui peut être inférieure à sa majoration.

Un algorithme de recherche du rang peut également s'écrire :

Python

```
def rang_pour_borne(epsilon=1e-5):
    if epsilon <= 0:
        raise ValueError("epsilon doit être strictement positif")
    n = 0
    borne = 25 / 2
    while borne > epsilon:
```

```
borne = borne * 25 / (2 * (n + 2))
n += 1
return n, borne
```

Pour $\epsilon=10^{-5}$, il renvoie $n = 41$ et une borne voisine de $8,3665 \times 10^{-6}$.

e) Valeur approchée et contrôle de l'erreur

On approche $g_a(5)$ par $s_{41}(5)$ et $f_a(5)$ par $5^{a-1}e^{-25/2}$. Posons

$$A(a) = s_{41}(5) + 5^{a-1}e^{-25/2}.$$

Comme $\varphi(a) = g_a(5) + f_a(5)$, l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} |\varphi(a) - A(a)| &\leq |g_a(5) - s_{41}(5)| + |f_a(5) - 5^{a-1}e^{-25/2}| \\ &\leq 10^{-5} + 10^{-5} = 2 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

La réponse est donc **oui**, avec la valeur approchée explicite

$$A(a) = 5^{a+1} \sum_{k=0}^{41} (-1)^k \frac{5^{2k}}{2^k k! (2k + a + 1)} + 5^{a-1}e^{-25/2}, \quad |\varphi(a) - A(a)| \leq 2 \times 10^{-5}.$$

Avec les bornes réellement obtenues, on a même, uniformément sur $] -1, 1]$,

$$|\varphi(a) - A(a)| \leq B_{41} + \frac{2}{25}e^{-25/2} < 8,665 \times 10^{-6}.$$

Peut-on omettre le terme de queue? Oui, mais il faut une justification supplémentaire :

I.5.b donne directement

$$0 < f_a(5) \leq 5^{a-1}e^{-25/2} \leq e^{-25/2} \simeq 3,7267 \times 10^{-6}.$$

Par conséquent,

$$|\varphi(a) - s_{41}(5)| \leq B_{41} + e^{-25/2} < 1,210 \times 10^{-5} < 2 \times 10^{-5}.$$

La somme seule convient donc également. L'approximation $A(a)$ est celle qui combine directement les deux approximations demandées par le sujet.

Complément - Calcul effectif de la valeur approchée

Le code suivant construit les termes par récurrence et utilise `fsum` pour améliorer la sommation des termes de signes alternés.

Python

```
from math import exp, fsum

def approximation_phi(a, n=41):
    if not (-1 < a <= 1):
        raise ValueError("a doit appartenir à ]-1, 1]")
    if not isinstance(n, int) or n < 0:
        raise ValueError("n doit être un entier naturel")

    u = 1 / (a + 1)
    termes = [u]
    signe = 1

    for k in range(n):
        u = u * 25 * (2 * k + a + 1)
        u = u / (2 * (k + 1) * (2 * k + a + 3))
        signe = -signe
```

```
termes.append(signes * u)

somme = 5 ** (a + 1) * fsum(termes)

queue_approchee = 5 ** (a - 1) * exp(-25 / 2)

return somme + queue_approchee
```

La garantie mathématique démontrée concerne les opérations exactes. Des calculs en nombres flottants ajoutent des erreurs d'arrondi ; `fsum` améliore la sommation mais ne certifie pas, à lui seul, une erreur absolue de 2×10^{-5} pour des valeurs arbitrairement proches de $a = -1$, où $\varphi(a)$ devient très grande. Une implémentation destinée à certifier la précision dans ce cas doit adapter la précision numérique et contrôler ces erreurs.

Résultats essentiels

Objet	Résultat
Dérivée	$f'_a(x) = -x^a e^{-x^2/2}$ pour $x > 0$
Dérivée seconde	$f''_a(x) = x^{a-1} e^{-x^2/2} (x^2 - a)$
Cas $a > 0$	Demi-tangente horizontale en 0 ; inflexion en $\sqrt{a}$
Cas $-1 < a < 0$	Demi-tangente verticale en 0 ; convexité
Équivalent	$f_a(x) \sim x^{a-1} e^{-x^2/2}$ en $+\infty$
Relation fonctionnelle	$\varphi(a+2) = (a+1)\varphi(a)$
Valeurs initiales	$\varphi(0) = \sqrt{\pi/2}$ et $\varphi(1) = 1$
Coupure de l'intégrale	$x = 5$
Rang suffisant uniforme	$n = 41$, soit 42 termes
Approximation	$s_{41}(5) + 5^{a-1} e^{-25/2}$
Erreur démontrée	Au plus 2×10^{-5} pour $-1 < a \leq 1$

Points de vigilance

- Justifier séparément la convergence en 0 et en $+\infty$.
- Ne pas appliquer directement une intégration par parties sur $[0, R]$ lorsque la régularité en 0 n'est pas acquise.
- Distinguer le signe de la dérivée, qui donne les variations, et celui de la dérivée seconde, qui donne la convexité.
- Pour II.2.b, encadrer la fonction entre deux sommes consécutives ; la monotonie des termes alternés n'est pas nécessaire.
- Pour II.2.c, intégrer des sommes finies puis contrôler le reste.
- Pour II.3.d, majorer uniformément en a avant de choisir n .
- Pour II.3.e, préciser la valeur approchée et additionner les deux erreurs.