



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1989

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

L'objet du problème est l'étude d'une promenade aléatoire (parties III et IV). Dans les parties I et II, on établit des résultats liminaires qui seront utilisés dans la partie III.

PARTIE I

Soient y_1, y_2, y_3, y_4 des nombres réels. On considère le système d'équations :

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur y_1, y_2, y_3, y_4 pour que ce système admette au moins une solution.
2. On suppose que cette condition est satisfaite. Soit a un nombre réel. Exprimer en fonction de a, y_2, y_3, y_4 l'unique solution (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant la relation :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a.$$

PARTIE II

On considère une suite réelle $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant à la relation de récurrence :

$$(1) \quad p_{n+4} = \frac{1}{4}(p_{n+3} + p_{n+2} + p_{n+1} + p_n).$$

On lui associe les deux suites (m_n) et (M_n) définies par :

$$m_n = \min(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}), \quad M_n = \max(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}).$$

m_n et M_n sont donc le plus petit et le plus grand des nombres réels $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}$.

1. Dans cette question, on établit la convergence des suites (m_n) et (M_n) .

(a) Montrer que m_n est inférieur ou égal aux nombres $p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}, p_{n+4}$. En déduire que la suite (m_n) est croissante. Établir de même que la suite (M_n) est décroissante.

(b) Prouver que, pour tout entier naturel n :

$$m_0 \leq m_n \leq p_n \leq M_n \leq M_0.$$

(c) Prouver que les suites (m_n) et (M_n) sont convergentes et que leurs limites respectives, notées m et M , vérifient $m \leq M$.

2. Dans cette question, on établit la convergence de la suite (p_n) .

(a) Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$p_{n+4} \leq \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m_n,$$

$$p_{n+4} \leq \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m.$$

En appliquant la dernière inégalité à $p_{n+5}, p_{n+6}, p_{n+7}$, montrer que :

$$M_{n+4} \leq \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m.$$

(b) En déduire que $M \leq m$, puis que $M = m$.

(c) Établir la convergence de la suite (p_n) .

3. Dans cette question, on étudie numériquement la suite (p_n) vérifiant la relation de récurrence (1) et les conditions initiales :

$$p_0 = 1, \quad p_1 = \frac{1}{4}, \quad p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}, \quad p_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64}.$$

(a) Rédiger une fonction Python permettant de calculer, pour tout entier naturel N , les termes $p_0, p_1, \dots, p_N$ de la suite (p_n) . Expliquer en français les étapes de l'algorithme.

On pourra employer des listes, leur méthode `append` (qui ajoute un élément à la fin), la fonction `sum` (qui additionne les éléments) et des tranches `p[i:j]` (éléments d'indices i à $j-1$). Pour un calcul exact, `Fraction(a, b)`, importée du module `fractions`, représente le rationnel a/b et permet les opérations arithmétiques exactes. `float(x)` en donne une approximation décimale.

(b) Utiliser cet algorithme pour donner des valeurs décimales approchées de $p_0, p_1, \dots, p_{10}$, avec dix chiffres après la virgule, et encadrer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Justifier l'encadrement, en tenant compte des arrondis.

PARTIE III

Dans la suite du problème, on étudie la promenade aléatoire d'un jeton sur les quatre cases C_1, C_2, C_3, C_4 suivantes :

C_1	C_2	C_3	C_4
-------	-------	-------	-------

Au cours des instants successifs $0, 1, 2, \dots, n, \dots$, on y déplace un jeton de la manière suivante :

1. À l'instant 0, le jeton est placé sur C_1 .
2. Si, à l'instant n , le jeton est placé sur C_1 , on le place à l'instant $n + 1$ sur l'une des cases C_1, C_2, C_3, C_4 , le choix d'une de ces cases s'effectuant de manière équiprobable et indépendamment des positions du jeton aux instants antérieurs.
3. Si, à l'instant n , le jeton est placé sur C_i , où $2 \leq i \leq 4$, on le place à l'instant $n + 1$ sur la case C_{i-1} .

Pour tout entier naturel n et pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on note désormais $Z(n, i)$ la variable aléatoire prenant pour valeur 1 si le jeton est sur la case C_i à l'instant n , et 0 dans le cas contraire ; $q(n, i)$ la probabilité pour que le jeton soit sur la case C_i à l'instant n .

On pose :

$$Q_n = \begin{pmatrix} q(n, 1) \\ q(n, 2) \\ q(n, 3) \\ q(n, 4) \end{pmatrix}.$$

1. Dans cette question, on étudie les suites $(q(n, i))$, où $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
 - (a) Expliciter la matrice A d'ordre 4 telle que, pour tout entier naturel n , $Q_{n+1} = AQ_n$.
 - (b) En déduire les relations suivantes, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} q(n+1, 4) = \frac{1}{4}q(n, 1), \\ q(n+2, 3) = \frac{1}{4}[q(n, 1) + q(n+1, 1)], \\ q(n+3, 2) = \frac{1}{4}[q(n, 1) + q(n+1, 1) + q(n+2, 1)], \\ q(n+4, 1) = \frac{1}{4}[q(n, 1) + q(n+1, 1) + q(n+2, 1) + q(n+3, 1)]. \end{cases}$$

- (c) Calculer $q(0, 1), q(1, 1), q(2, 1), q(3, 1)$. Comparer la suite $(q(n, 1))$ à la suite définie dans la question II.3. En déduire que les quatre suites $(q(n, i))$ sont convergentes ; exprimer leurs limites en fonction de la limite L de la suite $(q(n, 1))$.
- (d) Calculer $q(n, 1) + q(n, 2) + q(n, 3) + q(n, 4)$. En déduire les limites des quatre suites $(q(n, i))$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

2. Pour tout entier naturel n et pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on pose :

$$Y(n, i) = Z(0, i) + Z(1, i) + \dots + Z(n, i).$$

$Y(n, i)$ est donc la variable aléatoire indiquant le nombre de passages du jeton sur la case C_i , au cours des instants $0, 1, \dots, n$. On détermine dans cette question le nombre moyen des passages du jeton sur l'une des cases au cours de ces instants, autrement dit les espérances des variables aléatoires $Y(n, i)$.

(a) Déterminer la somme $Y(n, 1) + Y(n, 2) + Y(n, 3) + Y(n, 4)$.

(b) Pour tout entier naturel n , on pose :

$$E_n = \begin{pmatrix} E[Y(n, 1)] \\ E[Y(n, 2)] \\ E[Y(n, 3)] \\ E[Y(n, 4)] \end{pmatrix}.$$

Exprimer l'espérance $E[Z(n, i)]$ en fonction de $q(n, i)$. En déduire que

$$E_n = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_n.$$

(c) Déduire des résultats précédents que :

$$(A - I_4)E_n = Q_{n+1} - Q_0,$$

où I_4 est la matrice identité d'ordre 4, et que :

$$E[Y(n, 1)] + E[Y(n, 2)] + E[Y(n, 3)] + E[Y(n, 4)] = n + 1.$$

Déduire des résultats de la partie I l'expression de $E[Y(n, i)]$, pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, en fonction de n et de $q(n + 1, j)$, pour $j \in \{2, 3, 4\}$.

(d) Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, expliciter des nombres réels f_i et g_i tels que :

$$E[Y(n, i)] = f_i n + g_i + \varepsilon_i(n), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_i(n) = 0.$$

PARTIE IV

On étudie dans cette partie les deux variables aléatoires suivantes : U , indiquant le premier instant $n \geq 1$ où le jeton se trouve sur la case C_2 ; V , indiquant le premier instant $n \geq 1$ où le jeton se trouve sur la case C_3 .

Si la case concernée n'est jamais atteinte, on attribue la valeur 0 à la variable correspondante. Les calculs des lois permettront de vérifier que ces événements ont une probabilité nulle.

1. (a) Calculer les probabilités $P(U = 1)$ et $P(U = 2)$, puis $P(U = n)$ pour $n \geq 3$.

(b) Vérifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(U = n) = 1.$$

(c) Calculer l'espérance de U .

2. Pour tout entier naturel n et pour $i \in \{1, 2, 4\}$, on note $\pi(n, i)$ la probabilité pour que le jeton soit placé à l'instant n sur la case C_i sans jamais avoir été placé au cours des instants $0, 1, \dots, n$ sur la case C_3 .

(a) Calculer $\pi(0, 1)$ et $\pi(1, 1)$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\pi(n, 1) = \frac{1}{4}[\pi(n-1, 1) + \pi(n-2, 1)].$$

En déduire la valeur de $\pi(n, 1)$ en fonction de n .

(b) Calculer $\pi(n, 2)$ et $\pi(n, 4)$.

(c) Calculer la probabilité $P(V = n)$, pour $n \geq 1$, et l'espérance de V .