



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1989

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PARTIE I

1. On élimine successivement x_4, x_3, x_2 à partir des trois dernières équations. Celles-ci s'écrivent :

$$x_4 = \frac{1}{4}x_1 - y_4, \quad x_3 = \frac{1}{2}x_1 - y_3 - y_4, \quad x_2 = \frac{3}{4}x_1 - y_2 - y_3 - y_4.$$

La première équation devient alors :

$$-\frac{3}{4}x_1 + x_2 = -y_2 - y_3 - y_4 = y_1.$$

La condition nécessaire est donc $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$. Elle peut aussi se lire en additionnant les quatre équations : chaque coefficient de chaque inconnue s'annule dans cette somme.

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, on choisit un réel quelconque t , on pose $x_1 = t$ et on définit x_2, x_3, x_4 par les expressions précédentes. Les trois dernières équations sont satisfaites par construction et la première l'est grâce à la condition. Ainsi :

$$\text{Le système admet une solution} \iff y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0.$$

Lorsque cette condition est vérifiée, toutes les solutions sont données par les trois expressions précédentes avec $x_1 = t \in \mathbb{R}$.

2. On utilise la description complète des solutions obtenue en I.1. La somme de leurs coordonnées vaut :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{5}{2}x_1 - y_2 - 2y_3 - 3y_4.$$

Le coefficient $5/2$ étant non nul, l'équation imposant cette somme à a possède une unique solution :

$$x_1 = \frac{2}{5}(a + y_2 + 2y_3 + 3y_4).$$

En reportant dans les expressions de I.1, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{5}a + \frac{2}{5}y_2 + \frac{4}{5}y_3 + \frac{6}{5}y_4, \\ x_2 = \frac{3}{10}a - \frac{7}{10}y_2 - \frac{2}{5}y_3 - \frac{1}{10}y_4, \\ x_3 = \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}y_2 - \frac{3}{5}y_3 - \frac{2}{5}y_4, \\ x_4 = \frac{1}{10}a + \frac{1}{10}y_2 + \frac{1}{5}y_3 - \frac{7}{10}y_4. \end{cases}$$

Ces coordonnées satisfont le système et ont pour somme a , ce qui établit l'existence et l'unicité demandées. Le paramètre a , fixé dans la question, intervient nécessairement dans la réponse.

PARTIE II

1. (a) La récurrence exprime p_{n+4} comme la moyenne de quatre nombres appartenant tous à $[m_n, M_n]$. Par addition de leurs encadrements et division par $4 > 0$:

$$m_n \leq p_{n+4} \leq M_n.$$

Les trois nombres $p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}$ appartiennent aussi à cet intervalle par définition. Les quatre nombres dont m_{n+1} est le minimum sont donc tous supérieurs ou égaux à m_n . Ainsi $m_{n+1} \geq m_n$.

De même, les quatre nombres dont M_{n+1} est le maximum sont tous inférieurs ou égaux à M_n . Ainsi $M_{n+1} \leq M_n$. La suite (m_n) est croissante et la suite (M_n) décroissante.

(b) La monotonie établie en II.1(a) donne $m_0 \leq m_n$ et $M_n \leq M_0$. Comme p_n fait partie des quatre termes utilisés dans les définitions de m_n et M_n , on a $m_n \leq p_n \leq M_n$. En réunissant ces inégalités, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$m_0 \leq m_n \leq p_n \leq M_n \leq M_0.$$

(c) La suite (m_n) est croissante et majorée par le réel M_0 ; elle converge donc vers un réel m . La suite (M_n) est décroissante et minorée par le réel m_0 ; elle converge donc vers un réel M . On applique ici le théorème de convergence des suites monotones avec des bornes finies.

Puisque $m_n \leq M_n$ pour tout n , le passage à la limite conserve l'inégalité et donne $m \leq M$. On dispose également de $m_n \leq m$ et $M \leq M_n$ pour tout n .

2. (a) Parmi les quatre termes $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}$, l'un est égal à m_n et chacun des trois autres est inférieur ou égal à M_n . Il en résulte :

$$p_{n+4} = \frac{1}{4}(p_n + p_{n+1} + p_{n+2} + p_{n+3}) \leq \frac{1}{4}m_n + \frac{3}{4}M_n.$$

Comme $m_n \leq m$, on en déduit $p_{n+4} \leq \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m$.

Pour $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, cette dernière inégalité appliquée à l'indice $n + j$ donne :

$$p_{n+4+j} \leq \frac{3}{4}M_{n+j} + \frac{1}{4}m \leq \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m,$$

la seconde inégalité utilisant la décroissance de (M_n) . En prenant le maximum de ces quatre termes, on obtient :

$$M_{n+4} \leq \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m.$$

(b) Les suites (M_n) et (M_{n+4}) ont la même limite M . Le passage à la limite dans la dernière inégalité de II.2(a) donne :

$$M \leq \frac{3}{4}M + \frac{1}{4}m,$$

donc $M \leq m$. Or II.1(c) donne l'inégalité inverse. Par conséquent $M = m$.

(c) On note $\ell = m = M$. Pour tout n , II.1(b) donne $m_n \leq p_n \leq M_n$. Les deux suites encadrantes convergent vers le même réel ℓ . Le théorème d'encadrement permet donc de conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \ell.$$

Cette conclusion vaut pour toute suite réelle satisfaisant la récurrence, sans restriction sur ses quatre valeurs initiales.

3. (a) Code adapté en Python. La consigne demandant un algorithme en français est conservée sous la forme d'une explication accompagnant une fonction exécutable.

Les valeurs initiales se simplifient en $1, 1/4, 5/16, 25/64$. On les place dans une liste, puis on ajoute successivement la moyenne des quatre derniers termes. Si $N < 3$, on renvoie seulement les $N + 1$ premières valeurs. Le module `fractions`, expliqué dans le sujet, évite les erreurs d'arrondi pendant ces calculs.

Python

```
from fractions import Fraction

def termes(N):
    if not isinstance(N, int) or N < 0:
        raise ValueError("N doit être un entier naturel")
    p = [Fraction(1, 1), Fraction(1, 4),
         Fraction(5, 16), Fraction(25, 64)]
```

```
for k in range(4, N + 1):
    p.append(sum(p[k - 4:k]) / 4)
return p[:N + 1]
```

Au début de l'itération d'indice k , la liste contient exactement $p_0, \dots, p_{k-1}$. La tranche $p[k - 4:k]$ contient $p_{k-4}, p_{k-3}, p_{k-2}, p_{k-1}$; leur moyenne est p_k par la récurrence. L'invariant est donc conservé après l'ajout. La boucle s'arrête à $k = N$ et la sortie est bien la liste $[p_0, \dots, p_N]$.

Ce code a été exécuté, notamment pour $N = 0, 1, 2, 3, 10, 100$. Les cas $N < 3$ renvoient le bon nombre de termes; toutes les récurrences ont été contrôlées par des égalités rationnelles exactes.

(b) Méthode 1 — Encadrement par les quatre derniers termes calculés

On exécute la fonction de II.3(a) et on convertit les fractions en nombres décimaux pour l'affichage :

Python

```
p = termes(10)
for n, valeur in enumerate(p):
    print(n, f"{float(valeur):.10f}")
borne_inferieure = min(p[7:11])
borne_superieure = max(p[7:11])
print(borne_inferieure, borne_superieure)
```

`enumerate(p)` fournit chaque indice et son terme; le format `.10f` affiche dix chiffres après la virgule. Le programme a été exécuté et donne :

n	Approximation de p_n
0	1,0000000000
1	0,2500000000
2	0,3125000000
3	0,3906250000

n	Approximation de p_n
4	0,4882812500
5	0,3603515625
6	0,3879394531
7	0,4067993164
8	0,4108428955
9	0,3914833069
10	0,3992662430

Les valeurs exactes de la fenêtre d'indices 7 à 10 donnent :

$$m_7 = p_9 = \frac{102625}{262144}, \quad M_7 = p_8 = \frac{26925}{65536}.$$

Comme $m_7 \leq m = \ell = M \leq M_7$, on a l'encadrement rigoureux :

$$\frac{102625}{262144} \leq \ell \leq \frac{26925}{65536}.$$

Un encadrement décimal arrondi vers l'extérieur est :

$$0,3914833068 \leq \ell \leq 0,4108428956.$$

Les bornes affichées dans le tableau sont des arrondis au plus proche ; elles ne suffisent pas, seules, à garantir le sens des inégalités. Les bornes extérieures ci-dessus ont été vérifiées par comparaison exacte de fractions.

Méthode 2 — Un invariant donnant la limite exacte

Cette approche complète l'encadrement numérique par une identification algébrique. Pour une suite satisfaisant la récurrence, posons :

$$H_n = p_n + 2p_{n+1} + 3p_{n+2} + 4p_{n+3}.$$

La récurrence donne $4p_{n+4} = p_n + p_{n+1} + p_{n+2} + p_{n+3}$, donc :

$$H_{n+1} = p_{n+1} + 2p_{n+2} + 3p_{n+3} + 4p_{n+4} = p_n + 2p_{n+1} + 3p_{n+2} + 4p_{n+3} = H_n.$$

Ainsi $H_n = H_0$ pour tout n . La convergence déjà prouvée en II.2(c) autorise le passage à la limite dans cette somme finie : $H_n \rightarrow 10\ell$. Pour les conditions initiales considérées :

$$H_0 = 1 + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{5}{16} + 4 \times \frac{25}{64} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{15}{16} + \frac{25}{16} = 4.$$

Par conséquent $\ell = 2/5$. Cette valeur appartient bien à l'encadrement précédent. La première méthode se réutilise sans rechercher d'invariant ; la seconde permet ici d'obtenir une valeur exacte.

PARTIE III

- (a) On applique la formule des probabilités totales au système complet des quatre positions possibles à l'instant n . Depuis C_1 , chacune des destinations a une probabilité $1/4$. Depuis C_2, C_3, C_4 , les destinations sont respectivement C_1, C_2, C_3 avec probabilité 1. Les règles du problème assurent que ces probabilités de transition ne dépendent pas de l'histoire antérieure.

$$\begin{cases} q(n+1, 1) = \frac{1}{4}q(n, 1) + q(n, 2), \\ q(n+1, 2) = \frac{1}{4}q(n, 1) + q(n, 3), \\ q(n+1, 3) = \frac{1}{4}q(n, 1) + q(n, 4), \\ q(n+1, 4) = \frac{1}{4}q(n, 1). \end{cases}$$

Ces relations restent valables lorsqu'une position à l'instant n a une probabilité nulle : sa contribution à la probabilité totale est alors nulle. La matrice, avec les destinations en lignes et les positions de départ en colonnes, est donc :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{n+1} = AQ_n.$$

On remarque pour la suite que $A - I_4$ est exactement la matrice de la partie I.

(b) On remonte successivement les relations de III.1(a). La dernière donne directement $q(n+1, 4) = q(n, 1)/4$. Puis :

$$q(n+2, 3) = \frac{1}{4}q(n+1, 1) + q(n+1, 4) = \frac{1}{4}[q(n, 1) + q(n+1, 1)].$$

Ensuite :

$$q(n+3, 2) = \frac{1}{4}q(n+2, 1) + q(n+2, 3) = \frac{1}{4}[q(n, 1) + q(n+1, 1) + q(n+2, 1)].$$

Enfin :

$$\begin{aligned} q(n+4, 1) &= \frac{1}{4}q(n+3, 1) + q(n+3, 2) \\ &= \frac{1}{4}[q(n, 1) + q(n+1, 1) + q(n+2, 1) + q(n+3, 1)]. \end{aligned}$$

Les quatre identités demandées sont donc établies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Le jeton part de C_1 , donc $Q_0 = {}^t(1, 0, 0, 0)$. En appliquant trois fois A , on obtient :

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 5/16 \\ 5/16 \\ 5/16 \\ 1/16 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 25/64 \\ 25/64 \\ 9/64 \\ 5/64 \end{pmatrix}.$$

En particulier :

$$q(0, 1) = 1, \quad q(1, 1) = \frac{1}{4}, \quad q(2, 1) = \frac{5}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}, \quad q(3, 1) = \frac{25}{64} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64}.$$

La suite $(q(n, 1))$ possède les mêmes quatre valeurs initiales et la même récurrence que la suite de II.3. Une récurrence sur les indices établit donc leur égalité terme à terme. Elle converge par la partie II; notons sa limite L .

Les identités de III.1(b), qui ne font intervenir que des sommes finies, donnent alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q(n, 4) = \frac{L}{4}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q(n, 3) = \frac{L}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q(n, 2) = \frac{3L}{4}.$$

Le décalage fini des indices ne modifie pas les limites. Les quatre suites sont donc convergentes, avec limites $L, 3L/4, L/2, L/4$ dans l'ordre des cases.

(d) Méthode 1 — Normalisation des probabilités

À chaque instant, le jeton occupe exactement une des quatre cases. Les événements correspondants sont disjoints et leur réunion est l'univers. Ainsi, pour tout n :

$$q(n, 1) + q(n, 2) + q(n, 3) + q(n, 4) = 1.$$

En passant à la limite dans cette somme finie et en utilisant III.1(c), on obtient :

$$L + \frac{3L}{4} + \frac{L}{2} + \frac{L}{4} = 1, \quad \frac{5}{2}L = 1.$$

Donc $L = 2/5$ et le vecteur limite est :

$$Q_{\infty} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/10 \\ 1/5 \\ 1/10 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 — Résolution du système vérifié par la limite

La convergence ayant déjà été prouvée, le passage à la limite dans $Q_{n+1} = AQ_n$ donne $AQ_{\infty} = Q_{\infty}$, puisque chaque coordonnée du produit est une somme finie. Les coordonnées du vecteur limite ont aussi pour somme 1 par normalisation.

On applique I.2 à $(A - I_4)Q_{\infty} = 0$ avec $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ et $a = 1$. La solution unique est ${}^t(2/5, 3/10, 1/5, 1/10)$, ce qui redonne les quatre limites. Cette seconde méthode identifie la limite à partir du système linéaire une fois la convergence acquise ; elle ne remplace pas la preuve de convergence.

2. (a) Pour chaque instant k , exactement une des variables $Z(k, 1), \dots, Z(k, 4)$ vaut 1, les autres valant 0. Pour chaque réalisation :

$$\sum_{i=1}^4 Y(n, i) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^4 Z(k, i) = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1.$$

La somme demandée est donc la variable constante égale à $n + 1$; on compte bien l'instant initial 0.

- (b) La variable $Z(n, i)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $q(n, i)$, éventuellement 0 ou 1. Elle est bornée et son espérance existe, avec :

$$E[Z(n, i)] = 1 \times q(n, i) + 0 \times (1 - q(n, i)) = q(n, i).$$

La variable $Y(n, i)$ est comprise entre 0 et $n + 1$, donc admet aussi une espérance. La linéarité pour une somme finie, qui ne requiert aucune indépendance entre les indicatrices, donne :

$$E[Y(n, i)] = \sum_{k=0}^n q(k, i).$$

En réunissant les quatre coordonnées, on obtient

$$E_n = \sum_{k=0}^n Q_k.$$

- (c) On multiplie l'égalité de III.2(b) par $A - I_4$ et on utilise $AQ_k = Q_{k+1}$:

$$(A - I_4)E_n = \sum_{k=0}^n (AQ_k - Q_k) = \sum_{k=0}^n (Q_{k+1} - Q_k) = Q_{n+1} - Q_0.$$

La dernière somme est télescopique et finie. En prenant l'espérance dans l'identité de III.2(a), on obtient aussi :

$$\sum_{i=1}^4 E[Y(n, i)] = n + 1.$$

Posons $b_j = q(n + 1, j)$ pour $j \in \{2, 3, 4\}$. Puisque $Q_0 = {}^t(1, 0, 0, 0)$, le second membre du système est :

$$Q_{n+1} - Q_0 = \begin{pmatrix} q(n + 1, 1) - 1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

Ses coordonnées ont pour somme 0, par III.1(d) ; la condition de I.1 est bien satisfaite. La matrice $A - I_4$ est celle de la partie I. On peut donc appliquer I.2 avec $a = n + 1$, $y_2 = b_2, y_3 = b_3, y_4 = b_4$, sans tenter d'inverser cette matrice. Cela donne :

$$\begin{cases} E[Y(n, 1)] = \frac{2}{5}(n + 1) + \frac{2}{5}b_2 + \frac{4}{5}b_3 + \frac{6}{5}b_4, \\ E[Y(n, 2)] = \frac{3}{10}(n + 1) - \frac{7}{10}b_2 - \frac{2}{5}b_3 - \frac{1}{10}b_4, \\ E[Y(n, 3)] = \frac{1}{5}(n + 1) + \frac{1}{5}b_2 - \frac{3}{5}b_3 - \frac{2}{5}b_4, \\ E[Y(n, 4)] = \frac{1}{10}(n + 1) + \frac{1}{10}b_2 + \frac{1}{5}b_3 - \frac{7}{10}b_4. \end{cases}$$

Ce sont les expressions exactes demandées, valables pour tout $n \geq 0$.

(d) On sépare dans les expressions précédentes le coefficient de n , la constante limite et un reste tendant vers 0. D'après III.1(d), $b_2 \rightarrow 3/10, b_3 \rightarrow 1/5$ et $b_4 \rightarrow 1/10$. Posons :

$$\delta_2(n) = q(n+1, 2) - \frac{3}{10}, \quad \delta_3(n) = q(n+1, 3) - \frac{1}{5}, \quad \delta_4(n) = q(n+1, 4) - \frac{1}{10}.$$

Ces trois quantités tendent vers 0. Pour la première coordonnée, la constante est :

$$g_1 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{10} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{6}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}.$$

Pour les trois autres :

$$g_2 = \frac{3}{10} - \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} - \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} - \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = 0,$$

$$g_3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{10} - \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10},$$

$$g_4 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} - \frac{7}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10}.$$

Les coefficients recherchés sont donc :

i	f_i	g_i
1	$2/5$	$4/5$
2	$3/10$	0
3	$1/5$	$1/10$
4	$1/10$	$1/10$

Les restes peuvent être explicités comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_1(n) = \frac{2}{5}\delta_2(n) + \frac{4}{5}\delta_3(n) + \frac{6}{5}\delta_4(n), \\ \varepsilon_2(n) = -\frac{7}{10}\delta_2(n) - \frac{2}{5}\delta_3(n) - \frac{1}{10}\delta_4(n), \\ \varepsilon_3(n) = \frac{1}{5}\delta_2(n) - \frac{3}{5}\delta_3(n) - \frac{2}{5}\delta_4(n), \\ \varepsilon_4(n) = \frac{1}{10}\delta_2(n) + \frac{1}{5}\delta_3(n) - \frac{7}{10}\delta_4(n). \end{cases}$$

Chaque reste est une combinaison linéaire finie de suites tendant vers 0, donc tend vers 0. On a bien, pour chaque case, $E[Y(n, i)] = f_i n + g_i + \varepsilon_i(n)$. La somme des f_i est 1, celle des g_i est 1, et celle des restes est 0, en accord avec III.2(a).

PARTIE IV

La valeur 0 ajoutée dans la définition de U et V rend ces variables définies même sur les trajectoires qui n'atteindraient pas leur case cible. On démontrera que ces trajectoires ont une probabilité nulle. On ne suppose donc pas d'avance que les premiers passages ont lieu presque sûrement.

1. (a) Avant sa première sortie de C_1 , le jeton reste sur C_1 . Dès qu'il en sort, il choisit C_j , où $j \in \{2, 3, 4\}$, puis descend de manière déterministe jusqu'à C_2 . Si la sortie a lieu à l'instant $s \geq 1$, le premier passage sur C_2 a lieu à l'instant $s + j - 2$.

La trajectoire correspondante commence par $s - 1$ choix de C_1 , puis un choix de C_j . Son événement a pour probabilité $(1/4)^{s-1}(1/4) = 4^{-s}$: la règle d'indépendance des choix depuis C_1 justifie ce produit.

Pour $U = 1$, il faut choisir C_2 dès le premier déplacement, donc $P(U = 1) = 1/4$.

Pour $U = 2$, les deux possibilités disjointes sont rester une fois sur C_1 puis choisir C_2 , ou choisir immédiatement C_3 puis descendre sur C_2 . Ainsi :

$$P(U = 2) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}.$$

Pour $n \geq 3$, les trois possibilités disjointes correspondent à une sortie vers C_2 à l'instant

n , vers C_3 à l'instant $n - 1$, ou vers C_4 à l'instant $n - 2$. Par conséquent :

$$P(U = n) = 4^{-n} + 4^{-(n-1)} + 4^{-(n-2)} = \frac{21}{4^n}, \quad n \geq 3.$$

(b) La série géométrique de raison $1/4$ converge car $|1/4| < 1$. En utilisant IV.1(a) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(U = n) = \frac{1}{4} + \frac{5}{16} + 21 \sum_{n=3}^{+\infty} 4^{-n} = \frac{1}{4} + \frac{5}{16} + 21 \frac{4^{-3}}{1 - 1/4} = \frac{1}{4} + \frac{5}{16} + \frac{7}{16} = 1.$$

Par additivité sur les événements disjoints $\{U = n\}$, la probabilité d'atteindre C_2 à un instant fini vaut 1. L'événement auquel la convention attribue la valeur 0 a donc une probabilité nulle ; la loi de U est entièrement décrite par IV.1(a).

(c) Méthode 1 — Calcul direct par la loi

Les termes $nP(U = n)$ sont non négatifs. Leur série converge, car à partir de $n = 3$ elle est 21 fois la série géométrique dérivée

$$\sum n4^{-n},$$

dont la somme est finie. L'espérance de U existe donc.

La formule autorisée

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nr^n = r/(1 - r)^2,$$

pour $|r| < 1$, donne ici :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n} = \frac{1/4}{(1 - 1/4)^2} = \frac{4}{9}.$$

On retire les deux premiers termes pour calculer :

$$E[U] = \frac{1}{4} + 2 \times \frac{5}{16} + 21 \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{4} - \frac{2}{16} \right) = \frac{7}{8} + 21 \times \frac{5}{72} = \frac{7}{8} + \frac{35}{24} = \frac{7}{3}.$$

Méthode 2 — Attente avant la première sortie

Notons T le premier instant de sortie de C_1 . La probabilité de rester sur C_1 pendant les t premiers déplacements est 4^{-t} , qui tend vers 0 ; T est donc fini presque sûrement. Pour tout $t \geq 1$:

$$P(T = t) = \left(\frac{1}{4} \right)^{t-1} \frac{3}{4}.$$

Ainsi T suit une loi géométrique de paramètre $3/4$ sur les entiers strictement positifs et $E[T] = 4/3$. Notons J la case choisie à cette sortie, codée par 2, 3, 4. Pour $j \in \{2, 3, 4\}$:

$$P(T = t, J = j) = 4^{-t} = \left[\left(\frac{1}{4} \right)^{t-1} \frac{3}{4} \right] \frac{1}{3}.$$

En sommant sur t , on obtient $P(J = j) = 1/3$; la factorisation prouve aussi l'indépendance de T et J . On a $U = T + J - 2$ presque sûrement. Comme T est intégrable et J bornée, la linéarité de l'espérance est applicable, même sans utiliser leur indépendance :

$$E[U] = \frac{4}{3} + \frac{2+3+4}{3} - 2 = \frac{7}{3}.$$

Le calcul par la loi est directement lié aux questions précédentes ; la décomposition en attente et descente explique la valeur de cette espérance.

2. (a) Posons $a_n = \pi(n, 1)$. Le jeton commence sur C_1 , sans passage sur C_3 , donc $a_0 = 1$.

Pour être sur C_1 à l'instant 1, il doit choisir C_1 au premier déplacement : $a_1 = 1/4$.

Pour $n \geq 2$, être sur C_1 à l'instant n sans avoir visité C_3 est possible en venant de C_1 à l'instant $n - 1$, avec un nouveau choix de C_1 , ou en venant de C_2 à cet instant, avec une descente certaine. D'autre part, pour être sur C_2 à l'instant $n - 1$ sans passage préalable sur C_3 , il faut venir de C_1 à l'instant $n - 2$ et choisir C_2 : une arrivée depuis C_3 serait exclue. Ces événements donnent :

$$a_n = \frac{1}{4}a_{n-1} + \pi(n-1, 2) = \frac{1}{4}(a_{n-1} + a_{n-2}), \quad n \geq 2.$$

On résout cette récurrence linéaire réelle d'ordre deux. Son équation caractéristique, qui concerne une suite et non une matrice, est $4r^2 - r - 1 = 0$. Ses deux racines réelles distinctes sont :

$$r_+ = \frac{1 + \sqrt{17}}{8}, \quad r_- = \frac{1 - \sqrt{17}}{8}.$$

Les solutions ont la forme $a_n = \alpha r_+^n + \beta r_-^n$. Les conditions initiales imposent $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha r_+ + \beta r_- = 1/4$. Comme $r_+ - r_- = \sqrt{17}/4 \neq 0$:

$$\alpha = \frac{1/4 - r_-}{r_+ - r_-} = \frac{\sqrt{17} + 1}{2\sqrt{17}}, \quad \beta = \frac{\sqrt{17} - 1}{2\sqrt{17}}.$$

On conclut que, pour tout $n \geq 0$:

$$\pi(n, 1) = a_n = \frac{\sqrt{17} + 1}{2\sqrt{17}} \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{8} \right)^n + \frac{\sqrt{17} - 1}{2\sqrt{17}} \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{8} \right)^n.$$

Les deux puissances vérifient la récurrence et les deux conditions initiales. L'unicité d'une suite déterminée par ces données confirme la formule. Bien que le second terme alterne en signe, a_n est non négatif puisqu'il représente une probabilité.

(b) À l'instant 0, le jeton n'est ni sur C_2 ni sur C_4 , donc $\pi(0, 2) = \pi(0, 4) = 0$.

Pour $n \geq 1$, une arrivée sur C_2 sans avoir visité C_3 ne peut provenir que d'un choix de C_2 depuis C_1 à l'instant $n - 1$. Les arrivées depuis C_3 sont exclues. Une arrivée sur C_4 ne peut provenir que d'un choix de C_4 depuis C_1 . Dans les deux cas, la probabilité du choix est $1/4$. Ainsi :

$$\pi(n, 2) = \pi(n, 4) = \frac{1}{4}a_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

En remplaçant a_{n-1} par sa formule, on obtient l'expression explicite :

$$\pi(n, 2) = \pi(n, 4) = \frac{\sqrt{17} + 1}{8\sqrt{17}}r_+^{n-1} + \frac{\sqrt{17} - 1}{8\sqrt{17}}r_-^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Ces deux probabilités sont égales, mais les suites de positions du jeton ne sont pas pour autant indépendantes.

(c) Pour un premier passage sur C_3 à l'instant $n \geq 1$, le jeton doit éviter C_3 jusqu'à l'instant $n - 1$, puis venir soit de C_1 avec un choix de C_3 , soit de C_4 avec une descente certaine. Ces deux possibilités disjointes donnent :

$$P(V = n) = \frac{1}{4}a_{n-1} + \pi(n - 1, 4).$$

Pour $n = 1$, cette expression vaut $1/4 = a_1$, car $\pi(0, 4) = 0$. Pour $n \geq 2$, IV.2(b) et la récurrence de IV.2(a) donnent :

$$P(V = n) = \frac{1}{4}(a_{n-1} + a_{n-2}) = a_n.$$

La loi est donc, pour tout $n \geq 1$:

$$P(V = n) = \frac{\sqrt{17} + 1}{2\sqrt{17}} r_+^n + \frac{\sqrt{17} - 1}{2\sqrt{17}} r_-^n.$$

On vérifie à présent la normalisation et l'existence de l'espérance, avant de calculer celle-ci. Comme $4 < \sqrt{17} < 5$, on a $0 < r_+ < 3/4$ et $|r_-| < 1/2$. Les coefficients α, β sont positifs et de somme 1, donc :

$$0 \leq a_n \leq \alpha r_+^n + \beta |r_-|^n.$$

Par comparaison avec des séries géométriques et leurs premières séries dérivées, les séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n$$

convergent. Tous les changements d'indices ci-dessous concernent donc des séries absolument convergentes ; on peut aussi les effectuer sur les sommes finies et passer à la limite, les termes de bord tendant vers 0 grâce aux majorations précédentes.

Notons

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

En sommant la récurrence à partir de $n = 2$:

$$S - a_0 - a_1 = \frac{1}{4} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} \right) = \frac{1}{4} [(S - 1) + S].$$

Avec $a_0 = 1$ et $a_1 = 1/4$, cela donne $S - 5/4 = S/2 - 1/4$, donc $S = 2$. Par conséquent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(V = n) = S - a_0 = 1.$$

Le jeton atteint donc C_3 presque sûrement, et la valeur conventionnelle 0 a une probabilité nulle. La convergence de

$$\sum na_n$$

démontre l'existence de $E[V]$.

Méthode 1 — Somme pondérée de la récurrence

Posons

$$T = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n = E[V].$$

En multipliant la récurrence par n et en sommant pour $n \geq 2$, on obtient :

$$T - a_1 = \frac{1}{4} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)a_k + \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)a_k \right] = \frac{1}{4} [(T + S - 1) + (T + 2S)].$$

Donc $T - 1/4 = T/2 + 3S/4 - 1/4$, puis $T = 3S/2 = 3$. Ainsi $E[V] = 3$.

Méthode 2 — Décomposition selon le premier déplacement

L'espérance a déjà été démontrée finie ; on peut donc utiliser la formule de l'espérance totale. Si le premier choix est C_1 , une unité de temps s'est écoulée et le problème redémarre depuis C_1 . Si le premier choix est C_2 , le jeton revient sur C_1 à l'instant 2, sans avoir visité C_3 . Les choix futurs depuis C_1 obéissent à la même règle et sont indépendants des choix passés. Dans ces deux cas, les espérances conditionnelles du temps total sont respectivement $1 + T$ et $2 + T$.

Si le premier choix est C_3 , le temps de passage est 1. Si le premier choix est C_4 , le jeton descend sur C_3 à l'instant 2, donc le temps de passage est 2. Les quatre choix sont équiprobables ; par conséquent :

$$T = \frac{1}{4}[(1 + T) + (2 + T) + 1 + 2] = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}T.$$

On en déduit de nouveau $T = 3$. La somme pondérée exploite directement la loi ; le raisonnement par premier déplacement met en évidence le retour possible à la situation initiale. La preuve préalable de l'intégrabilité évite de manipuler une espérance qui pourrait être infinie.

Relevé des adaptations

- I.2 : ajout explicite de a parmi les paramètres de la réponse ; ce réel fixé dans l'énoncé intervient nécessairement dans la solution.
- II.3(a) : code adapté en Python ; la rédaction en français accompagne la fonction. Les opérations sur listes et le module `fractions` sont expliqués dans le sujet afin de permettre un calcul exact.
- II.3(b) : remplacement de la précision dépendant d'une calculatrice par dix chiffres après la virgule ; l'encadrement demandé doit tenir compte des arrondis.

- III, préambule : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les dimensions relatives mesurées et les quatre cases identifiées.
- III.2(c) : ajout explicite du paramètre n parmi les variables de la réponse, la somme des espérances étant $n + 1$.
- IV, préambule : convention de valeur 0 sur les trajectoires sans premier passage, pour définir partout les variables ; les calculs prouvent que ces événements sont négligeables.

Aucun résultat mathématique n'a été admis pour remplacer une démonstration. Aucun passage ne reste à vérifier.