



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1988

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Le but du problème est l'étude des réalisations de trois « face » consécutifs dans une suite de parties de pile ou face, ce qui fait l'objet de la partie III. À cet effet, on s'intéresse tout d'abord, dans la partie I, aux puissances de deux matrices, puis, dans la partie II, au comportement asymptotique d'une suite.

Partie I

On considère les deux matrices suivantes :

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note I_4 la matrice identité d'ordre quatre et 0 la matrice nulle.

1. Calculer M^2 , M^3 et M^4 . En déduire la relation :

$$4M^4 - 2M^3 - M^2 - M = 0. \quad (1)$$

2. Calculer N^2 , N^3 et N^4 . En déduire la relation :

$$8N^4 - 12N^3 + 2N^2 + N + I_4 = 0. \quad (2)$$

Partie II

On étudie dans cette partie la suite $(q_n)_{n \geq 1}$ telle que $q_1 = q_2 = 0$, $q_3 = \frac{1}{8}$ et vérifiant, pour $n \geq 1$, la relation :

$$8q_{n+3} = 4q_{n+2} + 2q_{n+1} + q_n. \quad (3)$$

À cet effet, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 8x^3 - 4x^2 - 2x - 1.$$

1. a) Étudier et représenter graphiquement la fonction g .
1. b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une racine réelle r et une seule.
2. a) Donner l'équation $y = t(x)$ de la tangente en $x = 1$ à la courbe représentative de g .
Calculer la racine ρ de l'équation $t(x) = 0$.
2. b) Calculer $g(\rho)$ et $g(\rho - 0,01)$. Donner un encadrement de r d'amplitude 0,01.
3. a) Montrer qu'il existe un réel a et un seul, que l'on exprimera en fonction de r , tel que, pour tout réel x :

$$g(x) = (x - r) \left(8x^2 + ax + \frac{1}{r} \right).$$

3. b) On pose $Q(x) = 8x^2 + ax + \frac{1}{r}$ et $\sigma = \frac{1}{\sqrt{8r}}$. Montrer que Q n'a aucune racine réelle et que $0 < \sigma < r < 1$.

Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que :

$$\cos \theta = -\frac{a}{16\sigma}.$$

On pourra utiliser les encadrements $0,9 < r < 1$ et $0 < a < 4$.

4. Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant, pour tout entier naturel non nul n :

$$8u_{n+3} = 4u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n.$$

On définit les suites réelles $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 1}$ par :

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 0, \quad w_1 = 0, \quad w_2 = 1,$$

et, pour tout $n \geq 1$, par les relations :

$$8v_{n+2} + av_{n+1} + \frac{1}{r}v_n = 0, \quad 8w_{n+2} + aw_{n+1} + \frac{1}{r}w_n = 0.$$

4. a) Montrer que les suites $(r^n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 1}$ appartiennent à E .
4. b) Montrer que le système réel suivant admet une solution et une seule (α, β, γ) :

$$\begin{cases} \alpha r + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0, \\ \alpha r^2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = 0, \\ \alpha r^3 + \beta v_3 + \gamma w_3 = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\alpha = \frac{1}{8r^3 + ar^2 + 1}, \quad \beta = -\alpha r, \quad \gamma = -\alpha r^2.$$

4. c) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n :

$$q_n = \alpha r^n + \beta v_n + \gamma w_n.$$

Montrer, par récurrence, que :

$$v_n = -\frac{\sigma^{n-1} \sin((n-2)\theta)}{\sin \theta}, \quad w_n = \frac{\sigma^{n-2} \sin((n-1)\theta)}{\sin \theta}.$$

En déduire une constante $C \geq 0$, indépendante de n , telle que :

$$|q_n - \alpha r^n| \leq C \sigma^n.$$

On rappelle l'identité, déduite des formules d'addition :

$$\sin((m+2)\theta) = 2 \cos \theta \sin((m+1)\theta) - \sin(m\theta) \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

4. d) Établir que $q_n \sim \alpha r^n$ lorsque n tend vers l'infini. Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q_{n+1}}{q_n}.$$

5. a) À l'aide de la relation (3), donner un programme Python permettant de calculer q_k pour $1 \leq k \leq n$. Obtenir des valeurs approchées de q_k pour $1 \leq k \leq 15$, avec six décimales, puis du quotient q_{k+1}/q_k pour $3 \leq k \leq 15$, avec quatre décimales. Pour le dernier quotient, calculer également q_{16} .

5. b) En procédant comme dans la question 2, donner un encadrement de r d'amplitude 0,0001, puis une valeur approchée de α .

Partie III

A. On effectue une suite infinie de pile ou face avec une pièce équilibrée ; les jets sont indépendants. Pour tout entier naturel non nul n , on considère la variable aléatoire Y_n prenant pour valeur :

- 0 si le n -ième jet a amené « pile » ;
- 1 si le n -ième jet a amené « face », celui-ci étant le premier, ou le quatrième, ou le septième, ou plus généralement le $(3k + 1)$ -ième « face » obtenu depuis le précédent « pile », ou depuis le début du jeu si « pile » n'est pas encore sorti ;
- 2 si le n -ième jet a amené « face », celui-ci étant le deuxième, ou le cinquième, ou le huitième, ou plus généralement le $(3k + 2)$ -ième « face » obtenu depuis le précédent « pile », ou depuis le début du jeu si « pile » n'est pas encore sorti ;
- 3 si le n -ième jet a amené « face », celui-ci étant le troisième, ou le sixième, ou le neuvième, ou plus généralement le $(3k + 3)$ -ième « face » obtenu depuis le précédent « pile », ou depuis le début du jeu si « pile » n'est pas encore sorti.

Dans ces définitions, $k \in \mathbb{N}$. On dit qu'une série de trois « face » consécutifs s'achève à l'issue du n -ième jet si et seulement si l'événement $[Y_n = 3]$ est réalisé.

Exemple. On note F le résultat « face » et P le résultat « pile ».

Numéro du jet	1	2	3	4	5	6	7
Résultat	P	F	F	P	P	P	F
Valeur de Y_n	0	1	2	0	0	0	1

Tableau — suite 2/2

Numéro du jet	8	9	10	11	12	13	14
Résultat	F	F	F	F	F	P	F
Valeur de Y_n	2	3	1	2	3	0	1

Trois « face » consécutifs ont ainsi été obtenus aux neuvième, douzième, ... jets, au sens de la convention précédente.

- Exprimer, pour $i = 0, i = 1, i = 2$ et $i = 3$, les probabilités $P(Y_{n+1} = i)$ en fonction des probabilités $P(Y_n = j)$ pour $j = 0, j = 1, j = 2$ et $j = 3$.
- On pose :

$$a_n = P(Y_n = 0), \quad b_n = P(Y_n = 1), \quad c_n = P(Y_n = 2), \quad d_n = P(Y_n = 3).$$

Pour tout entier naturel non nul n , on définit la matrice-colonne :

$$V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}.$$

- Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$V_{n+1} = MV_n,$$

où la matrice M est définie dans la partie I.

2. b) En multipliant à droite la relation (1) par V_{n-1} , où $n \geq 2$, établir une relation entre V_{n+3} , V_{n+2} , V_{n+1} et V_n , puis entre d_{n+3} , d_{n+2} , d_{n+1} et d_n .
2. c) Calculer d_1 , d_2 , d_3 et d_4 .
2. d) À l'aide de la relation définissant (d_n) , donner un programme Python permettant de calculer d_k pour $1 \leq k \leq n$. Obtenir des valeurs approchées de d_k pour $1 \leq k \leq 15$, avec six décimales. Que constate-t-on ?
2. e) Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$d_{3k+1} = d_{3k+2}.$$

- B.** On s'intéresse maintenant à la variable X indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, on a obtenu trois fois de suite le résultat « face ». On pose $X = +\infty$ si cela ne se produit jamais. Pour tout entier naturel non nul n , on considère la variable aléatoire Z_n :
- prenant pour valeur 3 si trois « face » consécutifs sont obtenus à l'issue du n -ième jet ou ont déjà été obtenus à l'issue d'un jet antérieur ;
 - prenant sinon pour valeur 0 si le n -ième jet a amené « pile » ;
 - prenant sinon pour valeur 1 si le n -ième jet a amené « face », ce « face » étant le premier obtenu depuis le précédent « pile », ou depuis le début du jeu si « pile » n'est pas encore sorti ;
 - prenant sinon pour valeur 2 si le n -ième jet a amené « face », ce « face » étant le second obtenu depuis le précédent « pile », ou depuis le début du jeu si « pile » n'est pas encore sorti.

L'événement $[X \leq n]$ est donc réalisé si et seulement si l'événement $[Z_n = 3]$ est réalisé.

Exemple. En reprenant la suite donnée dans la partie III.A, on a $X = 9$, $Z_1 = 0$, $Z_2 = 1$, $Z_3 = 2$, $Z_4 = 0$, $Z_5 = 0$, $Z_6 = 0$, $Z_7 = 1$, $Z_8 = 2$ et, pour $n \geq 9$, $Z_n = 3$.

1. Exprimer, pour $i = 0$, $i = 1$, $i = 2$ et $i = 3$, les probabilités $P(Z_{n+1} = i)$ en fonction des probabilités $P(Z_n = j)$ pour $j = 0$, $j = 1$, $j = 2$ et $j = 3$.

2. On pose :

$$a'_n = P(Z_n = 0), \quad b'_n = P(Z_n = 1), \quad c'_n = P(Z_n = 2), \quad d'_n = P(Z_n = 3).$$

Pour tout entier naturel non nul n , on définit la matrice-colonne :

$$W_n = \begin{pmatrix} a'_n \\ b'_n \\ c'_n \\ d'_n \end{pmatrix}.$$

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$W_{n+1} = NW_n,$$

où la matrice N est définie dans la partie I.

2. b) En multipliant à droite la relation (2) par W_n , établir une relation entre W_{n+4} , W_{n+3} , W_{n+2} , W_{n+1} et W_n , puis entre d'_{n+4} , d'_{n+3} , d'_{n+2} , d'_{n+1} et d'_n .

2. c) Calculer $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ et $P(X = 4)$. Montrer que, pour $n \geq 2$:

$$P(X = n) = d'_n - d'_{n-1}.$$

2. d) Comparer $P(X = n)$ à la suite (q_n) étudiée dans la partie II. En déduire un équivalent de $P(X = n)$ et la limite de la suite :

$$\frac{P(X = n + 1)}{P(X = n)}.$$

2. e) Montrer que X est fini presque sûrement et que son espérance existe. Exprimer $E(X)$ en fonction de α , β , γ , r et a , à partir de l'expression de q_n établie en II.4.c.

Montrer que :

$$\frac{r}{(r-1)^2} = 104r^2 + 44r + 14.$$

Pour exploiter cette identité dans le calcul de l'espérance, calculer les sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nv_n$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nw_n$$

à l'aide de leurs récurrences et vérifier qu'elles valent respectivement $44 - 14ar$ et $104 - 112r$.

En déduire que $E(X) = 14$.

Retrouver $E(X) = 14$ en utilisant directement la relation (3).

2. f) Exprimer, à l'aide d'un raisonnement probabiliste direct, $P(X = n + 3)$ en fonction de $P(X = n)$, $P(X = n + 1)$ et $P(X = n + 2)$, pour $n \geq 1$. On pourra examiner les premiers jets.