



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1988

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

1. Puissances de M et relation (1).

Posons $A = 2M$. Un produit matriciel se calcule en multipliant chaque ligne de la première matrice par chaque colonne de la seconde. Par exemple,

$(A^2)_{2,3} = 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times 1 = 2$. Les produits successifs donnent :

$$M^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M^3 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M^4 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 5 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour vérifier la relation demandée, on écrit toutes les matrices avec le même facteur $1/4$:

$$4M^4 - 2M^3 - M^2 - M = \frac{1}{4}(A^4 - A^3 - A^2 - 2A).$$

Les matrices précédentes permettent de calculer :

$$A^4 - A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A^2 + 2A.$$

Ainsi $4M^4 - 2M^3 - M^2 - M = 0$. La relation est obtenue par des produits explicites.

2. Puissances de N et relation (2).

Posons $B = 2N$. On obtient successivement :

$$N^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$N^3 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

$$N^4 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 16 \end{pmatrix}.$$

La combinaison à vérifier s'écrit :

$$8N^4 - 12N^3 + 2N^2 + N + I_4 = \frac{1}{2}(B^4 - 3B^3 + B^2 + B + 2I_4).$$

Or :

$$B^4 - 3B^3 = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -8 \end{pmatrix},$$

$$B^2 + B + 2I_4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices sont opposées, d'où $8N^4 - 12N^3 + 2N^2 + N + I_4 = 0$.

Partie II

1. a) Étude et représentation de g .

La fonction g est polynomiale, donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On a :

$$g'(x) = 24x^2 - 8x - 2 = 24 \left(x + \frac{1}{6} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right).$$

La dérivée est strictement positive sur $] -\infty, -1/6[$ et $]1/2, +\infty[$, et strictement négative sur $] -1/6, 1/2[$. De plus :

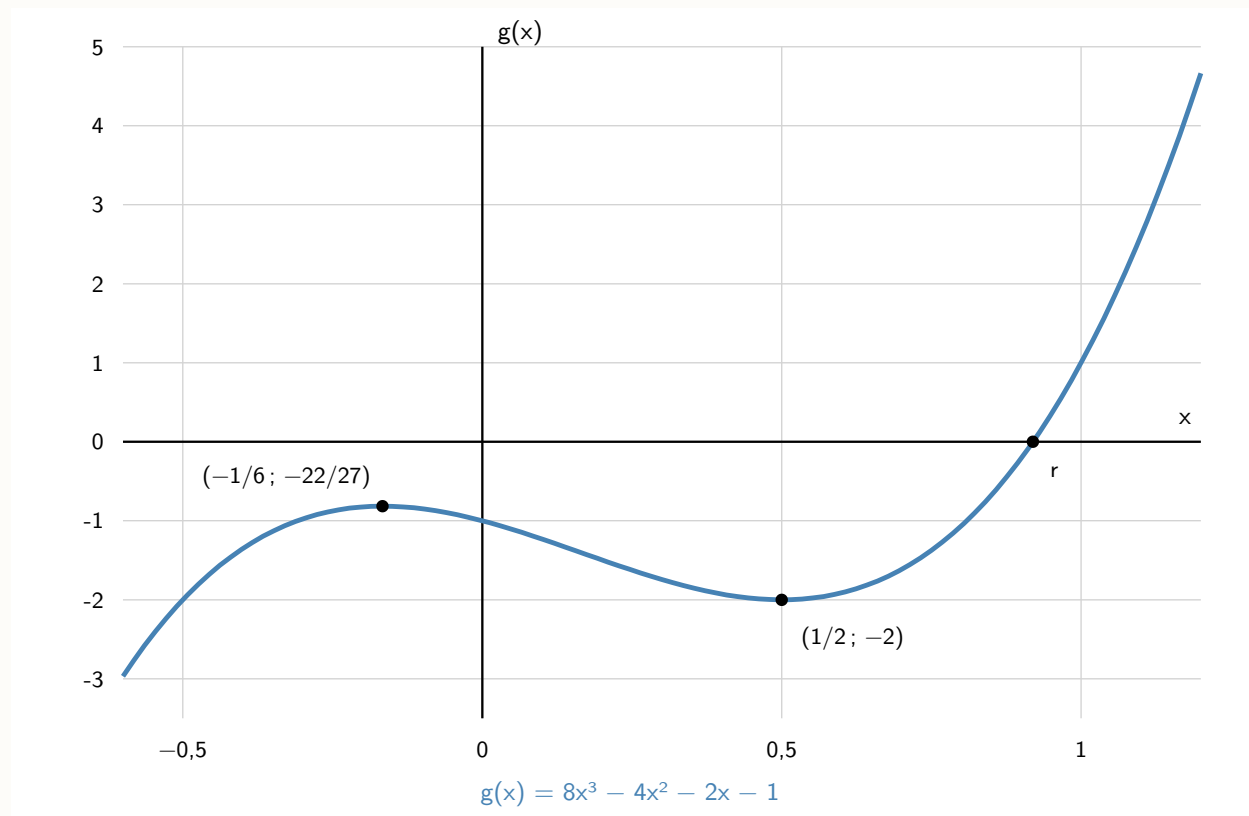
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty,$$

$$g\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{22}{27}, \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = -2.$$

Intervalle	Sens de variation	Valeurs aux extrémités
$] -\infty, -1/6[$	Croissant	$-\infty$ puis $-22/27$
$[-1/6, 1/2]$	Décroissant	$-22/27$ puis -2
$[1/2, +\infty[$	Croissant	-2 puis $+\infty$

Pour préciser la forme de la courbe, $g''(x) = 48x - 8$. Elle est donc concave pour $x < 1/6$, convexe pour $x > 1/6$, avec un point d'inflexion de coordonnées $(1/6, -38/27)$. Enfin $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$.

Le tracé suivant représente la formule exacte de g sur une fenêtre du plan ; il ne représente pas ses branches jusqu'à l'infini.



1. b) Existence et unicité de r .

Sur $] -\infty, 1/2]$, le maximum global est $g(-1/6) = -22/27 < 0$: aucun zéro ne se trouve sur cet intervalle. Sur $[1/2, +\infty[$, la fonction est continue et strictement croissante, part de -2 et tend vers $+\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance donnent un unique zéro réel $r > 1/2$.

Comme $g(0,9) = -0,208 < 0$ et $g(1) = 1 > 0$, on dispose en outre de l'encadrement utile :

$$0,9 < r < 1.$$

2. a) Tangente en 1.

Comme $g(1) = 1$ et $g'(1) = 14$, l'équation de la tangente est :

$$t(x) = g(1) + g'(1)(x - 1) = 14x - 13.$$

Elle s'annule en $\rho = 13/14 \simeq 0,9285714286$.

2. b) Encadrement d'amplitude 0,01.

On calcule exactement :

$$g(\rho) = g\left(\frac{13}{14}\right) = \frac{34}{343} \simeq 0,0991253644 > 0.$$

Comme $\rho - 0,01 = 643/700$, le second calcul donne :

$$g(\rho - 0,01) = -\frac{501943}{42875000} \simeq -0,0117071254 < 0.$$

Les deux bornes appartiennent à $]1/2, +\infty[$, où g est strictement croissante. Par conséquent :

$$\frac{643}{700} < r < \frac{13}{14}.$$

La différence des bornes vaut exactement $1/100$.

3. a) Factorisation réelle et coefficient a .

Développons l'expression proposée :

$$(x - r) \left(8x^2 + ax + \frac{1}{r} \right) = 8x^3 + (a - 8r)x^2 + \left(\frac{1}{r} - ar \right) x - 1.$$

L'identification du coefficient de x^2 impose $a - 8r = -4$, soit $a = 8r - 4$. Cette valeur est donc la seule possible.

Il reste à vérifier le coefficient de x . Comme $g(r) = 0$ et $r > 0$:

$$8r^3 - 4r^2 - 2r - 1 = 0 \implies 8r^2 - 4r = 2 + \frac{1}{r}.$$

Avec $a = 8r - 4$, on en déduit $ar = 2 + 1/r$, donc $1/r - ar = -2$. Tous les coefficients coïncident et :

$$g(x) = (x - r) \left(8x^2 + (8r - 4)x + \frac{1}{r} \right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

3. b) Facteur quadratique et paramètres réels.

Question adaptée au programme actuel.

L'encadrement $0,9 < r < 1$ donne $3,2 < a < 4$. Le discriminant du polynôme réel du second degré Q est :

$$\Delta = a^2 - \frac{32}{r} < 16 - 32 = -16 < 0.$$

Le coefficient dominant vaut $8 > 0$. Ainsi Q n'a aucune racine réelle et $Q(x) > 0$ pour tout réel x .

Par définition, $\sigma > 0$. Comme $8r^3 = 4r^2 + 2r + 1 > 1$, on a :

$$\sigma^2 = \frac{1}{8r} < r^2.$$

Puisque r et σ sont positifs, il en résulte $0 < \sigma < r < 1$.

Enfin :

$$\left(\frac{a}{16\sigma} \right)^2 = \frac{a^2 r}{32} < 1.$$

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante de 1 à -1 sur $[0, \pi]$. Il existe donc un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\cos \theta = -a/(16\sigma)$. En particulier $\sin \theta > 0$, ce qui justifiera les divisions par $\sin \theta$.

4. a) Trois suites réelles appartenant à E .

Question adaptée au programme actuel.

Pour la suite géométrique, l'égalité $g(r) = 0$, multipliée par r^n , donne directement :

$$8r^{n+3} = 4r^{n+2} + 2r^{n+1} + r^n \quad (n \geq 1).$$

Considérons maintenant une suite u vérifiant $8u_{n+2} + au_{n+1} + u_n/r = 0$ pour tout $n \geq 1$. Soustrayons r fois la relation d'indice n de celle d'indice $n+1$:

$$8u_{n+3} + (a - 8r)u_{n+2} + \left(\frac{1}{r} - ar\right)u_{n+1} - u_n = 0.$$

La question 3.a donne $a - 8r = -4$ et $1/r - ar = -2$. Ainsi

$8u_{n+3} - 4u_{n+2} - 2u_{n+1} - u_n = 0$. Cet argument s'applique à v et à w , qui appartiennent donc à E .

Par linéarité de la relation, toute combinaison linéaire réelle de ces trois suites appartient également à E .

4. b) Résolution et unicité du système.

Question adaptée au programme actuel.

Les deux premières équations, grâce aux valeurs initiales de v et w , imposent :

$$\beta = -\alpha r, \quad \gamma = -\alpha r^2.$$

Les récurrences d'ordre deux à l'indice 1 donnent :

$$v_3 = -\frac{1}{8r}, \quad w_3 = -\frac{a}{8}.$$

La troisième équation devient donc :

$$\alpha r^3 + \frac{\alpha}{8} + \frac{\alpha a r^2}{8} = \frac{1}{8}.$$

D'où :

$$\alpha(8r^3 + ar^2 + 1) = 1.$$

Comme $r > 0$ et $a > 0$, le facteur $8r^3 + ar^2 + 1$ est strictement positif. La seule solution possible est :

$$\alpha = \frac{1}{8r^3 + ar^2 + 1}, \quad \beta = -\alpha r, \quad \gamma = -\alpha r^2.$$

Ces trois valeurs satisfont les trois équations, ce qui prouve à la fois l'existence et l'unicité, sans utiliser de formule de résolution extérieure au référentiel.

On peut simplifier le dénominateur à l'aide de $g(r) = 0$:

$$8r^3 + ar^2 + 1 = 16r^3 - 4r^2 + 1 = 4r^2 + 4r + 3.$$

Ainsi $\alpha = 1/(4r^2 + 4r + 3) > 0$.

4. c) Expression de q_n et majoration du reste.

Question adaptée au programme actuel.

La suite $s_n = \alpha r^n + \beta v_n + \gamma w_n$ appartient à E , par 4.a. Le système résolu en 4.b assure $s_1 = q_1$, $s_2 = q_2$ et $s_3 = q_3$. La récurrence (3) détermine chaque terme suivant à partir des trois précédents. Une récurrence sur l'indice donne donc :

$$q_n = \alpha r^n + \beta v_n + \gamma w_n \quad (n \geq 1).$$

Pour obtenir des bornes sur v et w , réécrivons leur relation sous la forme :

$$u_{n+2} = 2\sigma \cos \theta u_{n+1} - \sigma^2 u_n.$$

Cela utilise $2\sigma \cos \theta = -a/8$ et $\sigma^2 = 1/(8r)$. Pour toute constante réelle K et tout entier j , l'identité trigonométrique rappelée dans le sujet donne :

$$K\sigma^{n+2} \sin((n+2-j)\theta) = 2\sigma \cos \theta K\sigma^{n+1} \sin((n+1-j)\theta) - \sigma^2 K\sigma^n \sin((n-j)\theta).$$

Les deux expressions proposées satisfont ainsi la même récurrence que v et w . À l'indice 1, elles valent respectivement $-\sin(-\theta)/\sin \theta = 1$ et 0. À l'indice 2, elles valent respectivement 0 et $\sin \theta/\sin \theta = 1$. L'unicité élémentaire d'une suite définie par ses deux premiers termes et sa récurrence prouve, par récurrence :

$$v_n = -\frac{\sigma^{n-1} \sin((n-2)\theta)}{\sin \theta}, \quad w_n = \frac{\sigma^{n-2} \sin((n-1)\theta)}{\sin \theta} \quad (n \geq 1).$$

Pour mémoire, l'identité utilisée se démontre en additionnant les formules :

$$\sin(A + \theta) = \sin A \cos \theta + \cos A \sin \theta,$$

$$\sin(A - \theta) = \sin A \cos \theta - \cos A \sin \theta,$$

puis en prenant $A = (m + 1)\theta$.

Puisque $|\sin x| \leq 1$ et $\sin \theta > 0$, l'inégalité triangulaire entraîne :

$$|q_n - \alpha r^n| \leq \frac{|\beta|\sigma^{n-1} + |\gamma|\sigma^{n-2}}{\sin \theta} = C\sigma^n,$$

avec la constante explicite :

$$C = \frac{|\beta|}{\sigma \sin \theta} + \frac{|\gamma|}{\sigma^2 \sin \theta}.$$

Cette constante est finie, positive et indépendante de n .

4. d) Équivalent et quotient de deux termes successifs.

Comme $\alpha > 0$ et $r > 0$, on peut diviser la majoration précédente par αr^n :

$$\left| \frac{q_n}{\alpha r^n} - 1 \right| \leq \frac{C}{\alpha} \left(\frac{\sigma}{r} \right)^n.$$

Le rapport σ/r appartient à $]0, 1[$. Le membre de droite tend donc vers zéro, ce qui donne :

$$q_n \sim \alpha r^n.$$

Les quotients demandés sont bien définis à partir de $n = 3$: $q_3 > 0$, $q_4 = q_5 = 1/16 > 0$, puis la récurrence à coefficients positifs donne $q_n > 0$ pour tout $n \geq 3$.

Posons $\varepsilon_n = q_n/(\alpha r^n) - 1$. Alors $\varepsilon_n \rightarrow 0$ et :

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = r \frac{1 + \varepsilon_{n+1}}{1 + \varepsilon_n} \longrightarrow r.$$

La limite vaut donc $r \simeq 0,9196433776$.

5. a) Calcul de la suite et des quotients en Python.

Code adapté en Python. Les quotients d'indices 1 et 2 ne sont pas définis puisque $q_1 = q_2 = 0$.

Le tableau Python comporte un indice 0 laissé inutilisé ; les indices mathématiques correspondent ainsi directement aux indices Python. L'initialisation couvre les trois premiers termes et la boucle calcule chaque nouveau terme au moyen de (3).

Python

```
import numpy as np

def suite_q(n):
    q = np.zeros(n + 1)
    if n >= 3:
        q[3] = 1 / 8
    for k in range(1, n - 2):
        q[k + 3] = (4 * q[k + 2] + 2 * q[k + 1] + q[k]) / 8
    return q

q = suite_q(16)
for k in range(1, 16):
    print(k, round(q[k], 6))
for k in range(3, 16):
    print(k, round(q[k + 1] / q[k], 4))
```

La fonction est utilisée pour un entier $n \geq 1$. La borne exclusive $n - 2$ de range fait terminer la boucle à $k = n - 3$, donc au calcul de q_n . Pour les quotients jusqu'à l'indice 15, il faut conserver q_{16} .

Le code a été exécuté. `round(x, p)` renvoie la valeur arrondie à p décimales, mais l'affichage Python peut omettre les zéros finaux ; le tableau ci-dessous les rétablit.

k	q_k	q_{k+1}/q_k
1	0,000000	Non défini
2	0,000000	Non défini
3	0,125000	0,5000
4	0,062500	1,0000
5	0,062500	1,0000
6	0,062500	0,8750
7	0,054688	0,9286
8	0,050781	0,9231
9	0,046875	0,9167
10	0,042969	0,9205
11	0,039551	0,9198
12	0,036377	0,9195
13	0,033447	0,9197
14	0,030762	0,9196
15	0,028290	0,9196

Le terme supplémentaire vaut $q_{16} = 1705/65536 \simeq 0,0260162354$. Les quotients se rapprochent de r , conformément à la preuve de 4.d.

5. b) Encadrement plus précis et approximation de α .

Méthode 1 — Évaluation du polynôme et changement de signe.

Comme en 2.b, on calcule g aux deux extrémités de l'intervalle candidat :

$$g(0,9196) = -0,000474547712 < 0,$$

$$g(0,9197) = 0,000619546984 > 0.$$

La stricte croissance de g sur cet intervalle donne :

$$0,9196 < r < 0,9197.$$

L'amplitude vaut exactement 0,0001. La formule de 4.b permet ensuite d'approcher α sans résoudre un nouveau système :

$$\alpha = \frac{1}{4r^2 + 4r + 3} \simeq 0,0993882724.$$

Cette dernière valeur utilise une approximation de r plus précise que les quatre décimales de l'encadrement. Pour la contrôler, on peut effectuer une dichotomie comme ci-dessous.

Méthode 2 — Dichotomie sur un intervalle où g est croissante.

On part de $[0,9, 1]$, dont les valeurs de g sont de signes opposés. À chaque étape, on conserve le demi-intervalle où le changement de signe persiste. Continuité et unicité du zéro garantissent que le nouvel intervalle contient toujours r .

Python

```
def g(x):  
    return 8 * x**3 - 4 * x**2 - 2 * x - 1  
  
bas = 0.9  
haut = 1.0  
for k in range(45):  
    milieu = (bas + haut) / 2  
    if g(milieu) < 0:  
        bas = milieu  
    else:  
        haut = milieu  
  
r_approche = (bas + haut) / 2  
alpha_approche = 1 / (4 * r_approche**2 + 4 * r_approche + 3)  
print(r_approche, alpha_approche)
```

Ce code a été exécuté et donne $r \simeq 0,9196433776$, puis $\alpha \simeq 0,0993882724$. Il n'effectue que des calculs approchés ; la preuve de l'encadrement décimal repose sur les deux évaluations exactes de la méthode 1. La première méthode convient lorsqu'on dispose déjà de bornes candidates ; la seconde permet de les obtenir systématiquement.

Partie III

A. Comptage des blocs successifs de trois « face ».

La variable Y_n compte la longueur de la suite terminale de « face » suivant la convention cyclique 1, 2, 3, 1, 2, 3, Par exemple, après quatre « face » consécutifs, elle vaut 1 : elle ne vaut pas 3 à chaque jet d'une longue suite de « face ».

1. Relations entre les probabilités des états.

L'état Y_n dépend uniquement des n premiers jets ; le jet suivant est indépendant de ces jets et donc de cet état. Les transitions sont :

État au jet n	Jet suivant P	Jet suivant F
0	0	1
1	0	2
2	0	3
3	0	1

Chaque résultat du jet suivant a une probabilité $1/2$. La formule des probabilités totales, appliquée aux quatre événements $[Y_n = j]$, donne :

$$P(Y_{n+1} = 0) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 P(Y_n = j) = \frac{1}{2},$$

$$P(Y_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}(P(Y_n = 0) + P(Y_n = 3)),$$

$$P(Y_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}P(Y_n = 1),$$

$$P(Y_{n+1} = 3) = \frac{1}{2}P(Y_n = 2).$$

On peut aussi lire chaque égalité comme la probabilité d'une union disjointe d'événements. Cette lecture reste valable aux premiers indices, lorsque certains états ont une probabilité nulle et qu'il serait inutile de définir une probabilité conditionnelle à ces états.

2. a) Écriture matricielle.

Les égalités précédentes s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}.$$

La matrice est exactement M , donc $V_{n+1} = MV_n$ pour tout $n \geq 1$.

2. b) Récurrence vectorielle et récurrence de d_n .

Pour $n \geq 2$, les applications successives de 2.a donnent $M^j V_{n-1} = V_{n-1+j}$, pour $j = 1, 2, 3, 4$. Multiplions (1) à droite par V_{n-1} :

$$4V_{n+3} - 2V_{n+2} - V_{n+1} - V_n = 0.$$

En prenant la quatrième coordonnée, on obtient :

$$4d_{n+3} = 2d_{n+2} + d_{n+1} + d_n \quad (n \geq 2).$$

Le début de validité $n = 2$ est essentiel : aucune relation pour $n = 1$ n'a été démontrée de cette manière.

2. c) Valeurs initiales.

Il est impossible de compléter un bloc de trois « face » aux jets 1 et 2, donc $d_1 = d_2 = 0$.

Au jet 3, l'événement $[Y_3 = 3]$ est exactement FFF ; l'indépendance donne $d_3 = (1/2)^3 = 1/8$.

Au jet 4, l'événement $[Y_4 = 3]$ est exactement PFFF. La suite FFFF donne $Y_4 = 1$, selon la convention de l'énoncé. Par conséquent :

$$d_4 = (1/2)^4 = 1/16.$$

Les quatre valeurs initiales sont 0, 0, 1/8 et 1/16.

2. d) Calcul de d_n en Python et observations.

Code adapté en Python.

La récurrence débute à $n = 2$. Il faut donc initialiser séparément d_4 , en plus des trois premiers termes.

Python

```
import numpy as np

def suite_d(n):
    d = np.zeros(n + 1)
    if n >= 3:
        d[3] = 1 / 8
    if n >= 4:
        d[4] = 1 / 16
    for k in range(2, n - 2):
        d[k + 3] = (2 * d[k + 2] + d[k + 1] + d[k]) / 4
    return d

d = suite_d(15)
for k in range(1, 16):
    print(k, round(d[k], 6))
```

Le code a été exécuté. Il donne les valeurs suivantes, écrites avec six décimales.

k	d_k
1	0,000000

k	d_k
2	0,000000
3	0,125000
4	0,062500
5	0,062500
6	0,078125
7	0,070312
8	0,070312
9	0,072266
10	0,071289
11	0,071289
12	0,071533
13	0,071411
14	0,071411
15	0,071442

On observe des égalités $d_{3k+1} = d_{3k+2}$, et un rapprochement vers $1/14 \simeq 0,0714286$. Ces observations numériques ne constituent pas des preuves ; la question suivante permet de les justifier exactement.

2. e) Égalité de deux termes consécutifs dans chaque bloc.

Cette question supplémentaire est manuscrite dans le PDF.

Méthode 1 — Récurrence demandée.

Pour $k = 0$, l'égalité est $d_1 = d_2 = 0$. Pour $k = 1$, on a $d_4 = 1/16$ et, grâce à la récurrence d'indice 2 :

$$d_5 = \frac{2d_4 + d_3 + d_2}{4} = \frac{2/16 + 1/8}{4} = \frac{1}{16} = d_4.$$

Supposons désormais $k \geq 1$ et $d_{3k+1} = d_{3k+2} = x$. Posons $y = d_{3k+3}$. Les indices $3k + 1$ et $3k + 2$ sont au moins 2, donc la récurrence est applicable :

$$d_{3k+4} = \frac{2y + x + x}{4} = \frac{x + y}{2},$$

$$d_{3k+5} = \frac{2d_{3k+4} + y + x}{4} = \frac{(x + y) + y + x}{4} = \frac{x + y}{2}.$$

Ainsi $d_{3(k+1)+1} = d_{3(k+1)+2}$. Les deux initialisations et l'hérédité établissent l'égalité pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Méthode 2 — Longueur de la suite terminale de « face ».

Cette approche donne aussi des expressions exactes et explique la limite observée. Pour que $Y_n = 3$, la suite terminale de « face » doit avoir une longueur $3j$, avec $j \geq 1$.

Si $3j < n$, les $3j$ derniers jets doivent être F et le précédent P. Les jets antérieurs sont libres, et la probabilité de cet événement vaut $2^{-(3j+1)}$. Si $3j = n$, tous les jets doivent être F, ce qui a une probabilité 2^{-n} . Les longueurs terminales distinctes correspondent à des événements disjoints.

Pour $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$, les longueurs possibles sont $3, 6, \dots, 3k$, toutes strictement inférieures à n . On obtient, avec une somme vide pour $k = 0$:

$$d_{3k+1} = d_{3k+2} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{2 \cdot 8^j} = \frac{1}{14} (1 - 8^{-k}).$$

Pour $n = 3k + 3$, les longueurs strictement inférieures à n sont les mêmes, et il faut ajouter l'événement où les $3k + 3$ jets sont F :

$$d_{3k+3} = \frac{1}{14} (1 - 8^{-k}) + 8^{-(k+1)} = \frac{1}{14} + \frac{3}{56} 8^{-k}.$$

Les trois formes de termes convergent vers $1/14$; ces expressions fournissent une preuve de la convergence de toute la suite (d_n) . La récurrence est la méthode imposée pour l'égalité ; le dénombrement des fins de séquence révèle directement les valeurs exactes.

B. Premier instant d'apparition de trois « face » consécutifs.

La variable Z_n reste définitivement dans l'état 3 dès la première réalisation de FFF. Elle suit donc une convention différente de Y_n . Cette distinction explique pourquoi les matrices M et N sont différentes.

1. Relations entre les probabilités des états.

À nouveau, le jet suivant est indépendant de l'état au jet n , car cet état dépend des jets précédents. Les transitions sont :

État au jet n	Jet suivant P	Jet suivant F
0	0	1
1	0	2
2	0	3
3	3	3

La formule des probabilités totales, ou les unions disjointes correspondant aux

transitions, donne :

$$P(Z_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}(P(Z_n = 0) + P(Z_n = 1) + P(Z_n = 2)),$$

$$P(Z_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(Z_n = 0),$$

$$P(Z_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}P(Z_n = 1),$$

$$P(Z_{n+1} = 3) = P(Z_n = 3) + \frac{1}{2}P(Z_n = 2).$$

Le dernier état est conservé avec probabilité 1, et non avec probabilité 1/2.

2. a) Relation matricielle.

Les relations précédentes s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} a'_{n+1} \\ b'_{n+1} \\ c'_{n+1} \\ d'_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_n \\ b'_n \\ c'_n \\ d'_n \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de la matrice N , d'où $W_{n+1} = NW_n$ pour tout $n \geq 1$.

2. b) Récurrence vectorielle et récurrence de d'_n .

La relation matricielle précédente donne $N^j W_n = W_{n+j}$. En multipliant (2) à droite par W_n , on obtient :

$$8W_{n+4} - 12W_{n+3} + 2W_{n+2} + W_{n+1} + W_n = 0 \quad (n \geq 1).$$

La quatrième coordonnée fournit :

$$8d'_{n+4} - 12d'_{n+3} + 2d'_{n+2} + d'_{n+1} + d'_n = 0 \quad (n \geq 1).$$

2. c) Premières probabilités et différences de la fonction de répartition.

On a $P(X = 1) = P(X = 2) = 0$. La première réalisation de FFF au jet 3 nécessite exactement FFF, d'où $P(X = 3) = 1/8$.

Pour avoir $X = 4$, les jets 2, 3, 4 doivent être F. Le premier jet doit alors être P, faute de quoi FFF serait déjà apparu au jet 3. Ainsi :

$$P(X = 4) = P(\text{PFFF}) = \frac{1}{16}.$$

Par définition de Z_n , $d'_n = P(X \leq n)$. Pour $n \geq 2$, l'union $[X \leq n] = [X \leq n-1] \cup [X = n]$ est disjointe, donc :

$$P(X = n) = d'_n - d'_{n-1}.$$

En particulier, $d'_1 = d'_2 = 0$, $d'_3 = 1/8$ et $d'_4 = 1/8 + 1/16 = 3/16$.

2. d) Identification avec q_n et comportement asymptotique.

Méthode 1 — Exploitation de la récurrence matricielle.

Posons $p_n = P(X = n)$. Il faut retrouver la récurrence d'ordre trois de la partie II, et pas seulement une récurrence d'ordre quatre.

Pour $n \geq 1$, définissons :

$$R_n = 8d'_{n+3} - 4d'_{n+2} - 2d'_{n+1} - d'_n.$$

La récurrence de 2.b donne :

$$R_{n+1} - R_n = 8d'_{n+4} - 12d'_{n+3} + 2d'_{n+2} + d'_{n+1} + d'_n = 0.$$

La suite (R_n) est donc constante. Les valeurs de 2.c donnent $R_1 = 8(3/16) - 4(1/8) = 1$. Pour $n \geq 2$, soustraire R_{n-1} de R_n fournit, en utilisant $p_j = d'_j - d'_{j-1}$:

$$8p_{n+3} - 4p_{n+2} - 2p_{n+1} - p_n = 0.$$

À l'indice $n = 1$, la même égalité se vérifie directement :

$$8p_4 - 4p_3 - 2p_2 - p_1 = 8/16 - 4/8 = 0.$$

Les suites p et q ont donc la même récurrence pour tout $n \geq 1$ et les mêmes trois valeurs initiales $0, 0, 1/8$. Par récurrence :

$$P(X = n) = q_n \quad (n \geq 1).$$

Méthode 2 — Décomposition suivant les premiers jets.

La décomposition probabiliste demandée en 2.f peut aussi servir à cette identification. Pour un premier succès à l'instant $n + 3 \geq 4$, les trois premiers jets ne peuvent pas être FFF. Selon la position du premier P, les préfixes possibles sont P, FP et FFP, de probabilités respectives $1/2$, $1/4$ et $1/8$.

Après ce premier P, l'attente recommence sans aucun « face » terminal. Les jets futurs sont indépendants du préfixe et ont la même loi que la suite initiale. Le temps restant nécessaire vaut respectivement $n + 2$, $n + 1$ et n . Les trois cas sont disjoints et couvrent $[X = n + 3]$, donc :

$$p_{n+3} = \frac{1}{2}p_{n+2} + \frac{1}{4}p_{n+1} + \frac{1}{8}p_n \quad (n \geq 1).$$

Cette relation et les trois valeurs initiales identifient encore $p_n = q_n$. La première méthode relie le résultat aux calculs matriciels ; la seconde explique directement les coefficients de la récurrence.

Dans les deux cas, II.4.d donne les conclusions demandées :

$$P(X = n) \sim \alpha r^n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(X = n + 1)}{P(X = n)} = r.$$

Ces quotients sont définis pour $n \geq 3$ puisque $q_n > 0$ pour ces indices.

2. e) Espérance du premier temps d'apparition.

Cette question supplémentaire est manuscrite dans le PDF. Sa première méthode est adaptée au programme actuel pour utiliser les suites réelles v et w .

Commençons par justifier que X est fini presque sûrement. Partageons les jets en blocs disjoints de trois. Chaque bloc est FFF avec probabilité $1/8$, et ces événements sont indépendants. Si $X > 3m$, aucun des m premiers blocs ne peut être FFF ; par conséquent :

$$P(X > 3m) \leq \left(\frac{7}{8}\right)^m.$$

Le membre de droite tend vers zéro. Par continuité décroissante des probabilités, $P(X = +\infty) = 0$. On peut donc traiter X comme une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{3, 4, 5, \dots\}$, quitte à lui attribuer une valeur finie sur cet événement négligeable. En particulier :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q_n = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1.$$

D'après II.4.c, $0 \leq q_n \leq \alpha r^n + C\sigma^n \leq (\alpha + C)r^n$, car $0 < \sigma < r < 1$. La série

$$\sum_{n \geq 1} nr^n$$

converge et vaut $r/(1-r)^2$. Par comparaison,

$$\sum_{n \geq 1} nq_n$$

converge. Ainsi X admet une espérance finie :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nq_n.$$

Méthode 1 — Décomposition réelle de q_n .

Les bornes sur v_n et w_n de II.4.c assurent la convergence absolue de leurs séries et de leurs séries pondérées par n . On peut donc appliquer la linéarité des séries convergentes :

$$E(X) = \alpha \frac{r}{(1-r)^2} + \beta T_v + \gamma T_w,$$

avec

$$T_v = \sum_{n \geq 1} n v_n$$

et

$$T_w = \sum_{n \geq 1} n w_n.$$

Calculons ces deux sommes sans échange entre dérivation et sommation. Pour une suite u égale à v ou à w , posons

$$S = \sum_{n \geq 1} u_n$$

et

$$T = \sum_{n \geq 1} n u_n.$$

En sommant sa relation $8u_{n+2} + au_{n+1} + u_n/r = 0$, on obtient :

$$8(S - u_1 - u_2) + a(S - u_1) + \frac{S}{r} = 0.$$

Avec $D = 8 + a + 1/r > 0$, cela donne :

$$S = \frac{(8+a)u_1 + 8u_2}{D}.$$

Pour la relation pondérée par n , les décalages d'indices se calculent explicitement :

$$\sum_{n \geq 1} n u_{n+2} = T - 2S + u_1, \quad \sum_{n \geq 1} n u_{n+1} = T - S.$$

Ces égalités se justifient sur les sommes partielles, puis par passage à la limite grâce aux convergences absolues établies. Il en résulte :

$$8(T - 2S + u_1) + a(T - S) + \frac{T}{r} = 0,$$

soit $T = ((16 + a)S - 8u_1)/D$. En utilisant les valeurs initiales de v et w , on obtient :

$$T_v = \frac{(8 + a)^2 - 8/r}{D^2}, \quad T_w = \frac{8(16 + a)}{D^2}.$$

La première expression demandée pour l'espérance est donc :

$$E(X) = \alpha \frac{r}{(1 - r)^2} + \beta \frac{(8 + a)^2 - 8/r}{(8 + a + 1/r)^2} + \gamma \frac{8(16 + a)}{(8 + a + 1/r)^2}.$$

Pour simplifier ces termes, utilisons uniquement des identités polynomiales réelles. Tout d'abord, un développement donne :

$$x - (1 - x)^2(104x^2 + 44x + 14) = (14 - 13x)(8x^3 - 4x^2 - 2x - 1).$$

Les deux membres développés valent $-104x^4 + 164x^3 - 30x^2 - 15x - 14$. Pour $x = r$, le membre de droite est nul. Puisque $r < 1$, on peut diviser par $(1 - r)^2$ et conclure :

$$\frac{r}{(r - 1)^2} = 104r^2 + 44r + 14.$$

Pour les deux autres sommes, posons $H = 8r^2 + 4r + 1 > 0$. Comme $a = 8r - 4$, on a $D = H/r$ et :

$$T_v = \frac{64r^4 + 64r^3 + 16r^2 - 8r}{H^2}, \quad T_w = \frac{64r^3 + 96r^2}{H^2}.$$

La réduction de ces fractions utilise les deux identités suivantes, obtenues en développant les produits :

$$64r^4 + 64r^3 + 16r^2 - 8r - (44 + 56r - 112r^2)H^2 = (44 + 328r + 896r^2 + 896r^3)g(r) = 0,$$

$$64r^3 + 96r^2 - (104 - 112r)H^2 = (104 + 512r + 896r^2)g(r) = 0.$$

Elles donnent donc :

$$T_v = 44 + 56r - 112r^2 = 44 - 14ar, \quad T_w = 104 - 112r.$$

Enfin, remplaçons $\beta = -\alpha r$ et $\gamma = -\alpha r^2$ dans l'expression de l'espérance :

$$E(X) = \alpha(104r^2 + 44r + 14) - \alpha r(44 - 14ar) - \alpha r^2(104 - 112r).$$

Les termes en $44r$ et $104r^2$ se compensent, d'où :

$$E(X) = 14\alpha + 14\alpha ar^2 + 112\alpha r^3 = 14\alpha(1 + ar^2 + 8r^3) = 14.$$

La dernière égalité utilise exactement la formule de α établie en II.4.b.

Méthode 2 — Somme pondérée de la récurrence (3).

Cette méthode ne nécessite ni la décomposition de q_n ni les calculs des sommes de v et w . Posons

$$L = E(X) = \sum_{n \geq 1} nq_n.$$

L'existence de L et la normalisation

$$\sum_{n \geq 1} q_n = 1$$

ont été justifiées avant les calculs.

En décalant les indices et en utilisant $q_1 = q_2 = 0$, on a :

$$\sum_{n \geq 1} nq_{n+3} = \sum_{m \geq 4} (m-3)q_m = L - 3,$$

$$\sum_{n \geq 1} nq_{n+2} = \sum_{m \geq 3} (m-2)q_m = L - 2,$$

$$\sum_{n \geq 1} nq_{n+1} = \sum_{m \geq 2} (m-1)q_m = L - 1.$$

La contribution de q_3 à la première identité est nulle après pondération par $m-3$, ce qui explique qu'aucun terme correctif supplémentaire n'apparaisse. Les décalages et la linéarité sont autorisés par la convergence des séries précédentes.

Multiplions (3) par n et sommons pour $n \geq 1$:

$$8(L - 3) = 4(L - 2) + 2(L - 1) + L.$$

On obtient $8L - 24 = 7L - 10$, donc $L = 14$.

La première méthode exploite l'expression détaillée de la loi et l'identité polynomiale demandée ; la seconde calcule directement l'espérance à partir de la récurrence et de la somme des probabilités.

2. f) Récurrence probabiliste directe.

Cette question supplémentaire est manuscrite dans le PDF.

Fixons $n \geq 1$. Sur l'événement $[X = n + 3]$, les trois premiers jets ne sont pas FFF, puisque $n + 3 \geq 4$. La position du premier « pile » distingue alors exactement trois préfixes :

- P, de probabilité $1/2$, après lequel il reste à attendre un premier FFF au rang $n + 2$ de la nouvelle suite ;
- FP, de probabilité $1/4$, après lequel ce rang doit être $n + 1$;
- FFP, de probabilité $1/8$, après lequel ce rang doit être n .

Chaque préfixe finit par P : il ne laisse donc aucun « face » à compléter. Les jets qui suivent sont indépendants de ce préfixe et ont la même loi que les jets initiaux. Par conséquent, les probabilités des trois cas sont respectivement :

$$\frac{1}{2}P(X = n + 2), \quad \frac{1}{4}P(X = n + 1), \quad \frac{1}{8}P(X = n).$$

En additionnant ces événements disjoints, on conclut :

$$P(X = n + 3) = \frac{1}{2}P(X = n + 2) + \frac{1}{4}P(X = n + 1) + \frac{1}{8}P(X = n).$$

C'est exactement la relation (3) satisfaite par q_n . Le raisonnement est valable dès $n = 1$; les termes impossibles, tels que $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$, valent alors zéro.

Relevé des adaptations

- II.3.b : remplacement de l'étude de deux racines non réelles par l'étude du facteur quadratique réel Q , du facteur de décroissance σ et de l'angle réel θ . Cela conserve le contrôle nécessaire à l'équivalent tout en restant dans le référentiel.
- II.4, préambule et II.4.a : restriction de E aux suites réelles et introduction de deux suites réelles v, w satisfaisant une récurrence d'ordre deux, à la place des suites géométriques non réelles.
- II.4.b : remplacement du système faisant intervenir ces racines par un système réel équivalent pour la décomposition de q_n . Résolution par substitution ; la suggestion manuscrite d'utiliser une méthode de résolution par déterminants est remplacée par des outils autorisés. La formule de α est conservée.
- II.4.c : remplacement de l'expression non réelle et de sa majoration par une décomposition réelle, des formules trigonométriques réelles et la borne $|q_n - \alpha r^n| \leq C\sigma^n$. L'identité trigonométrique nécessaire est rappelée dans le sujet et démontrée dans le corrigé.
- II.5.a : algorithme demandé rédigé en Python, conformément au référentiel. Les quotients sont demandés à partir de $k = 3$ pour éviter les divisions par $q_1 = q_2 = 0$; le calcul de q_{16} est explicité pour obtenir le quotient d'indice 15.
- III.A.2.d : algorithme demandé rédigé en Python, avec initialisation distincte de d_4 , la récurrence commençant à l'indice 2.
- III.B, préambule : ajout de la convention $X = +\infty$ si FFF n'apparaît jamais. III.B.2.e établit que cet événement est négligeable, ce qui complète la définition de la variable d'attente sans modifier sa loi.

- III.B.2.e : complément manuscrit reformulé avec les suites réelles v, w ; l'identité concernant les zéros de g est demandée pour son unique zéro réel r , et les sommes pondérées réelles nécessaires au calcul de l'espérance sont guidées. La conclusion $E(X) = 14$ et sa seconde démonstration par (3) sont conservées.