



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1987

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

L'étude simultanée de deux variables statistiques X et Y a permis d'obtenir les trois observations suivantes :

$$(x_1 = 0; y_1 = 0), \quad (x_2 = 1; y_2 = 1), \quad (x_3 = -2; y_3 = 0).$$

Dans un plan rapporté à un repère orthonormal, on représente ces trois observations par le nuage de points :

$$M_1(0; 0), \quad M_2(1; 1), \quad M_3(-2; 0).$$

Pour un nuage de N observations $(x_j; y_j)$, on utilise les moyennes, variances et covariance empiriques définies par :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_j x_j, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_j y_j,$$

$$V_X = \frac{1}{N} \sum_j (x_j - \bar{x})^2, \quad V_Y = \frac{1}{N} \sum_j (y_j - \bar{y})^2,$$

$$C_{XY} = \frac{1}{N} \sum_j (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y}).$$

Lorsque V_X et V_Y sont strictement positifs, le coefficient de corrélation est $\rho = \frac{C_{XY}}{\sqrt{V_X V_Y}}$.

La droite de régression de Y par rapport à X est la droite $y = ax + b$ qui minimise

$$\sum_j (y_j - ax_j - b)^2.$$

On ne suppose pas connues les formules donnant les coefficients de cette droite.

PARTIE I

L'objet de cette partie est d'étudier par différentes méthodes l'ajustement du nuage (M_1, M_2, M_3) par une droite.

On désigne par δ une direction donnée du plan et par D une droite non parallèle à δ , d'équation $y = ax + b$.

On projette les points M_1, M_2, M_3 sur D dans la direction δ . On note m_1, m_2, m_3 les points obtenus : pour $1 \leq j \leq 3$, m_j est donc l'intersection de la droite D avec la droite de direction δ passant par M_j .

1. Dans cette question, la direction δ est celle de l'axe des ordonnées Oy . On cherche la droite D rendant minimale l'expression :

$$f(a; b) = M_1 m_1 + M_2 m_2 + M_3 m_3.$$

(a) Calculer les distances $M_1 m_1, M_2 m_2, M_3 m_3$.

(b) Le nombre réel b est fixé. En distinguant trois cas suivant la position de b par rapport à $\frac{2}{3}$, représenter graphiquement la fonction φ définie par la relation :

$$\varphi(x) = |2x - b| + |x + b - 1|.$$

Montrer qu'elle passe par un minimum pour $x = \frac{b}{2}$.

(c) En déduire l'existence et l'unicité d'un couple $(a_1; b_1)$ conduisant à la plus petite valeur possible pour $f(a; b)$. Tracer la droite D_1 d'équation $y = a_1 x + b_1$.

2. Dans cette question, la direction δ est encore celle de l'axe des ordonnées. On cherche la droite D rendant minimale l'expression :

$$g(a; b) = \sup(M_1 m_1; M_2 m_2; M_3 m_3),$$

où $\sup(M_1 m_1; M_2 m_2; M_3 m_3)$ désigne le plus grand des trois nombres réels $M_1 m_1$, $M_2 m_2$, $M_3 m_3$.

(a) Représenter graphiquement sur une même figure :

- l'ensemble E_1 des points $M(x; y)$ du plan tels que $|y| \leq \frac{1}{3}$;
- l'ensemble E_2 des points $M(x; y)$ du plan tels que $|y - 2x| \leq \frac{1}{3}$;
- l'ensemble E_3 des points $M(x; y)$ du plan tels que $|x + y - 1| \leq \frac{1}{3}$.

En déduire l'ensemble $E_1 \cap E_2 \cap E_3$.

(b) En déduire l'existence et l'unicité d'un couple $(a_2; b_2)$ conduisant à la plus petite valeur possible pour $g(a; b)$. Tracer la droite D_2 d'équation $y = a_2 x + b_2$.

3. Dans cette question, la direction δ est toujours celle de l'axe des ordonnées. On cherche la droite D rendant minimale l'expression :

$$h(a; b) = (M_1 m_1)^2 + (M_2 m_2)^2 + (M_3 m_3)^2.$$

Le nombre réel a étant fixé, montrer que la fonction $b \mapsto h(a; b)$ admet un minimum en un point unique que l'on précisera.

En déduire l'existence et l'unicité d'un couple $(a_3; b_3)$ conduisant à la plus petite valeur possible pour $h(a; b)$.

Tracer la droite D_3 d'équation $y = a_3 x + b_3$. Quelle est la droite D_3 ainsi obtenue ?

4. Dans cette question, m est un nombre réel donné et l'on suppose $a \neq m$. La direction δ est celle de la droite d'équation $y = mx$. On cherche la droite D rendant minimale l'expression :

$$h_m(a; b) = (M_1 m_1)^2 + (M_2 m_2)^2 + (M_3 m_3)^2.$$

- (a) Calculer les coordonnées de m_1, m_2, m_3 . Exprimer $h_m(a; b)$ en fonction de a, b et m .
 (b) Le nombre m est fixé et différent de $\frac{2}{7}$.

Le nombre réel $a \neq m$ étant donné, pour quelle valeur de b la fonction $b \mapsto h_m(a; b)$ est-elle minimale ?

En déduire que $h_m(a; b)$ prend la plus petite valeur possible lorsque la fonction θ définie par :

$$\theta(a) = \frac{7a^2 - 4a + 1}{(a - m)^2}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{m\},$$

est minimale. Étudier la variation de la fonction θ .

En déduire l'existence et l'unicité d'un couple $(a_4; b_4)$ conduisant à la plus petite valeur possible pour $h_m(a; b)$. On explicitera a_4 et b_4 en fonction de m .

- (c) Étudier l'existence d'une telle droite D_4 dans le cas où $m = \frac{2}{7}$.

PARTIE II

Dans toute la suite, $M_0(x_0; y_0)$ désigne un point du plan associé à une observation supplémentaire des variables statistiques X et Y , et l'on étudie les modifications apportées par ce nouveau point au coefficient de corrélation et à la droite de régression de Y par rapport à X du nuage (M_1, M_2, M_3) .

1. Soient ρ et $\rho(M_0)$ les coefficients de corrélation respectivement associés aux nuages (M_1, M_2, M_3) et (M_0, M_1, M_2, M_3) .

(a) Calculer ρ en précisant les formules utilisées.

(b) Calculer $\rho(M_0)$ en fonction de x_0 et y_0 .

(c) Pour tout nombre réel k , on considère les points E_k et F_k de coordonnées respectives $(5 + k; k)$ et $(5 + k; -k)$. Soient α et β les fonctions qui associent respectivement au nombre réel k les nombres $\rho(E_k)$ et $\rho(F_k)$.

Montrer que α et β sont continues sur $\mathbb{R}$. Calculer $\alpha(0)$ et $\beta(0)$. Déterminer les limites lorsque k tend vers $+\infty$ de $\alpha(k)$ et de $\beta(k)$.

En déduire que, pour tout nombre réel r appartenant à l'intervalle $] -1; 1[$, il existe au moins un point M_0 tel que $\rho(M_0) = r$.

Existe-t-il un point M_0 tel que $\rho(M_0) = 1$ ou tel que $\rho(M_0) = -1$?

2. Soit D une droite d'équation $y = ax + b$.

(a) On suppose que $3b - a - 1 \neq 0$. Montrer qu'il existe un point M_0 et un seul tel que la droite de régression Δ du nuage (M_0, M_1, M_2, M_3) de Y par rapport à X soit D .

(b) On suppose que $3b - a - 1 = 0$ et que $(a; b) \neq \left(\frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$. Montrer qu'il n'existe aucun point M_0 tel que $\Delta = D$.

(c) On suppose que $(a; b) = \left(\frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$. Déterminer l'ensemble des points M_0 tels que $\Delta = D$. Retrouver ce résultat sans calcul.