



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1986

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^3 + t$.

Dans la partie I, on étudie la fonction réciproque g de f . Dans la partie II, on étudie un algorithme d'approximation de g à l'aide d'une suite de fonctions rationnelles. Enfin, dans la partie III, on étudie une approximation polynomiale de g par la méthode des moindres carrés.

I - Étude de g

1. Variation de g .

1. (a) Étudier les variations de f . Montrer que f admet une fonction réciproque ; soit g cette fonction. Pour tout réel x , on a donc $g(x)^3 + g(x) = x$.

Montrer que g est impaire et strictement croissante.

1. (b) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$; exprimer g' en fonction de g . En déduire, sans calcul, le sens de variation de g' .

2. Étude locale et asymptotique de g .

2. (a) Montrer que g admet au voisinage de 0 un développement limité à tout ordre. Expliciter ce développement à l'ordre 3.

2. (b) Montrer que $g(x)$ est équivalent à $x^{1/3}$ au voisinage de $+\infty$.

2. (c) On écrit alors $g(x)$ sous la forme $x^{1/3}[1 + h(x)]$, où $h(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Expliciter la relation satisfaite par h . En déduire que la fonction $x \mapsto x^{2/3}h(x)$ admet en $+\infty$ une limite finie, que l'on déterminera.

2. (d) Donner une allure de la représentation graphique de g .

3. Étude d'une primitive de g .

Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^x g(u) du$.

3. (a) Calculer G en fonction de g .

3. (b) Étudier la variation de G ; étudier G au voisinage de 0 et de $+\infty$.

II - Approximation rationnelle de g

Dans cette partie, $x \in [0, +\infty[$. On interprète $g(x)$ comme l'unique solution de $t^3 + t = x$, c'est-à-dire comme l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f avec la droite D_x parallèle à l'axe des abscisses et d'ordonnée x .

On se propose d'approcher $g(x)$ à l'aide de la suite de terme général $u_n(x)$ ainsi construite : on pose $u_0(x) = x$ et on prend pour $u_1(x)$ l'abscisse du point d'intersection de D_x avec la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x . On itère ce processus en considérant l'abscisse $u_{n+1}(x)$ du point d'intersection de D_x avec la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $u_n(x)$.

1. Construction de l'algorithme d'approximation.

Soit $t \geq 0$. Prouver que l'abscisse du point d'intersection de D_x avec la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse t est égale à $\frac{2t^3 + x}{3t^2 + 1}$.

On considère donc la suite définie par $u_0(x) = x$ et

$$u_{n+1}(x) = \frac{2u_n(x)^3 + x}{3u_n(x)^2 + 1}.$$

2. Étude de l'algorithme.

Soit φ la fonction qui à tout $t \geq 0$ associe $\varphi(t) = \frac{2t^3 + x}{3t^2 + 1}$.

2. (a) Étudier le signe de $t - \varphi(t)$.
2. (b) Calculer la dérivée de φ . Étudier le signe de $\varphi'(t)$.
2. (c) Dédire de II.2.(a) et II.2.(b) que l'intervalle $[g(x), x]$ est stable par φ .

En utilisant l'encadrement $0 \leq t^3 + t - x \leq t^3$, valable pour tout $t \in [g(x), x]$, montrer que, sous cette dernière condition, $0 \leq \varphi'(t) \leq 2/3$.

3. Étude de la convergence.

3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \in [g(x), x]$, que la suite $(u_n(x))$ est décroissante et qu'elle converge vers $g(x)$.

3. (b) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_{n+1}(x) - g(x) \leq \frac{2}{3}[u_n(x) - g(x)].$$

3. (c) Soit $a \geq 0$. On pose $\beta_n = \sup_{x \in [0, a]} [u_n(x) - g(x)]$. Prouver que $\beta_n \leq (2/3)^n a$.

3. (d) Prouver que, pour tout $t \geq 0$,

$$\varphi(t) - g(x) = [t - g(x)]^2 \frac{2t + g(x)}{3t^2 + 1}.$$

Montrer que, pour tout $t \in [g(x), x]$,

$$0 \leq \varphi(t) - g(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}[t - g(x)]^2.$$

On pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto \frac{3t}{3t^2 + 1}$.

3. (e) Calculer, sous forme de fraction, $u_2(1)$. Que dire de la précision de $u_2(1)$ comme valeur approchée de $g(1)$?

III - Approximation polynomiale de g par la méthode des moindres carrés

Soient $a > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $S = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une suite d'éléments de $[0, a]$ distincts deux à deux. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note E_p l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p .

1. Produit scalaire sur E_n adapté à S .

1. (a) Montrer que l'application qui à tout couple $(P, Q) \in E_n^2$ associe le nombre réel

$$(P | Q) = \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k)$$

est un produit scalaire sur E_n .

1. (b) Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. Montrer qu'il existe un unique $L_i \in E_n$ prenant la valeur 1 en x_i et la valeur 0 en tous les autres points de S .

1. (c) Prouver que $\mathcal{B} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormale de E_n .

1. (d) Montrer qu'il existe un unique $P_g \in E_n$ tel que $P_g(x_i) = g(x_i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$; expliciter les composantes de P_g dans la base $\mathcal{B}$.

2. Approximation de g .

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p < n$. Pour tout $A \in E_p$, on pose

$$N(A) = \sum_{k=0}^n [g(x_k) - A(x_k)]^2.$$

2. (a) Interpréter $N(A)$ à l'aide du produit scalaire sur E_n .

2. (b) Montrer qu'il existe un unique $H_g \in E_p$ tel que $N(H_g) \leq N(A)$ pour tout $A \in E_p$.
2. (c) Montrer que H_g est caractérisé par $(H_g \mid X^i) = (P_g \mid X^i)$ pour $0 \leq i \leq p$.
2. (d) On écrit

$$H_g = \sum_{j=0}^p \lambda_j X^j.$$

Expliciter un système linéaire admettant pour unique solution $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$.

2. (e) En utilisant les résultats des parties II et III, indiquer les différentes étapes d'un algorithme permettant de calculer H_g .

Pour une mise en œuvre en Python, on pourra utiliser la commande

`np.linalg.solve(R, b)` après `import numpy as np`. Pour une matrice carrée inversible R et un vecteur b de dimension compatible, cette commande renvoie le vecteur solution de $R\lambda = b$.