



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1986

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

I - Étude de g

1. Variation de g .

1. (a) La fonction polynomiale $f(t) = t^3 + t$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$. Elle est donc strictement croissante. Ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement $-\infty$ et $+\infty$. Le théorème de la bijection montre qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et possède une réciproque $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue et strictement croissante.

L'égalité $f(g(x)) = x$ donne $g(x)^3 + g(x) = x$. Comme $f(0) = 0$, on a $g(0) = 0$; en particulier, $g(x)$ a le même signe que x .

La fonction f est impaire. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $f(-g(x)) = -f(g(x)) = -x$. Par unicité de l'antécédent de $-x$, il vient $g(-x) = -g(x)$. Ainsi g est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1. (b) La fonction f est dérivable et sa dérivée ne s'annule pas. Le théorème de dérivation de la réciproque s'applique en chaque point :

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + 3g(x)^2} > 0.$$

Pour déterminer les variations de g' sans le dériver, on utilise les variations de g et le signe de ses valeurs. Sur $[0, +\infty[$, g est positive et strictement croissante; g^2 est donc strictement croissante, et $1/(1 + 3g^2)$ est strictement décroissante. Sur $] -\infty, 0]$, g est négative et strictement croissante; $|g|$ et g^2 y sont strictement décroissantes, donc g' est strictement croissante.

La dérivée est paire et atteint son maximum $g'(0) = 1$. Elle est strictement croissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

2. Étude locale et asymptotique de g .

2. (a) On établit d'abord la régularité qui permet d'utiliser Taylor-Young. La fonction $R(t) = 1/(1 + 3t^2)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, son dénominateur ne s'annulant pas. La formule $g' = R \circ g$ et la continuité de g montrent que g' est continue, donc $g \in C^1$.

Si $g \in C^m$ pour un entier $m \geq 1$, les règles de composition des fonctions de classe C^m donnent $R \circ g \in C^m$. Ainsi $g' \in C^m$, donc $g \in C^{m+1}$. Par récurrence, g est de classe C^∞ . Pour chaque ordre fini, Taylor-Young en 0 donne donc un développement limité à cet ordre. Cela ne suppose pas que la série des développements converge vers g .

Méthode 1 — Calcul des dérivées en 0

On a $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. En dérivant la formule de g' ,

$$g''(x) = -\frac{6g(x)g'(x)}{(1+3g(x)^2)^2} = -\frac{6g(x)}{(1+3g(x)^2)^3},$$

d'où $g''(0) = 0$. Une nouvelle dérivation donne

$$g'''(x) = -\frac{6g'(x)}{(1+3g(x)^2)^3} + \frac{108g(x)^2g'(x)}{(1+3g(x)^2)^4}.$$

En 0, on obtient $g'''(0) = -6$. Taylor-Young à l'ordre 3 donne alors

$$g(x) = x - x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0).$$

Méthode 2 — Identité exacte et équivalent

Puisque g est dérivable en 0, $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$, on a $g(x)/x \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$, $x \neq 0$.

L'identité $g(x)^3 + g(x) = x$ donne exactement $g(x) - x = -g(x)^3$. Donc

$$\frac{g(x) - x}{x^3} = -\left(\frac{g(x)}{x}\right)^3 \rightarrow -1.$$

Il s'ensuit à nouveau $g(x) = x - x^3 + o(x^3)$. La première méthode fournit les coefficients par les dérivées ; la seconde exploite l'équation satisfaite par g , sans composition de développements limités.

2. (b) La croissance de g et son caractère de réciproque impliquent $g(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Plus précisément, pour tout $A > 0$, si $x \geq f(A)$, alors $g(x) \geq A$.

Pour $x > 0$, $g(x) > 0$ et l'identité fondamentale donne

$$\frac{x}{g(x)^3} = 1 + \frac{1}{g(x)^2} \rightarrow 1.$$

Les quantités étant positives, on peut prendre la puissance $1/3$ et inverser :

$$g(x)/x^{1/3} \rightarrow 1. \text{ Ainsi } g(x) \sim x^{1/3} \text{ en } +\infty.$$

2. (c) Pour $x > 0$, posons $h(x) = g(x)/x^{1/3} - 1$. D'après I.2.(b), $h(x) \rightarrow 0$. En remplaçant $g(x)$ dans $g(x)^3 + g(x) = x$ et en divisant par $x > 0$, on obtient

$$(1 + h(x))^3 + x^{-2/3}(1 + h(x)) = 1.$$

Après développement du cube, cette relation devient

$$h(x)[3 + 3h(x) + h(x)^2] = -x^{-2/3}(1 + h(x)).$$

Le facteur $3 + 3h + h^2 = (h + 3/2)^2 + 3/4$ est strictement positif, donc la division est autorisée. Il vient

$$x^{2/3}h(x) = -\frac{1 + h(x)}{3 + 3h(x) + h(x)^2} \rightarrow -\frac{1}{3}.$$

La limite demandée est donc $-1/3$. On peut aussi écrire la précision asymptotique

$$g(x) = x^{1/3} - \frac{1}{3}x^{-1/3} + o(x^{-1/3}),$$

$$\text{car } h(x) = -\frac{1}{3}x^{-2/3} + o(x^{-2/3}) \text{ et } g(x) = x^{1/3}(1 + h(x)).$$

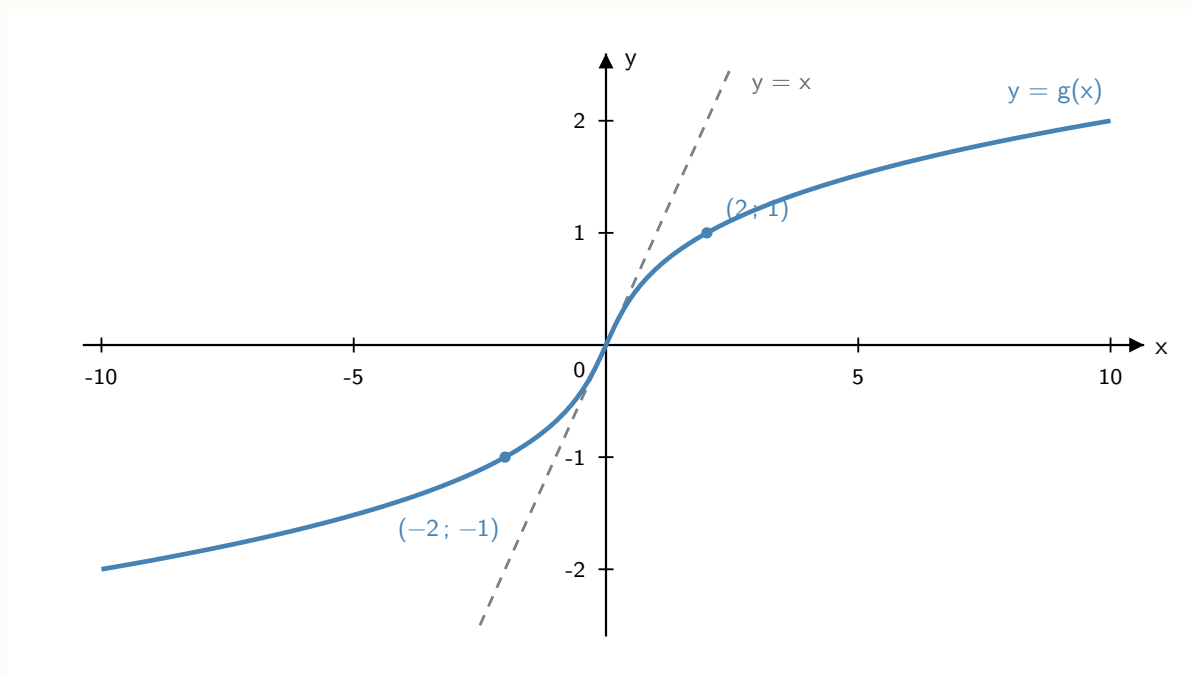
2. (d) La courbe de g est symétrique par rapport à l'origine, passe par $(0, 0)$ et est strictement croissante. Sa tangente en 0 a pour équation $y = x$. D'après I.1.(b), g' croît sur $] -\infty, 0]$ puis décroît sur $[0, +\infty[$: g est convexe sur $] -\infty, 0]$ et concave sur $[0, +\infty[$, avec changement de convexité en 0.

Pour $x > 0$, l'identité $x = g(x) + g(x)^3$ donne $0 < g(x) < x$; pour $x < 0$, l'imparité donne $x < g(x) < 0$. Les points $(2, 1)$ et $(10, 2)$ sont exacts, puisque $f(1) = 2$ et $f(2) = 10$. Leurs symétriques appartiennent aussi à la courbe.

Enfin, $g(x) \sim x^{1/3}$ en $+\infty$ et $g'(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$. Il n'existe pas d'asymptote horizontale, puisque g est non bornée. Il n'existe pas non plus d'asymptote affine en

$+\infty : g(x)/x \rightarrow 0$ imposerait une pente nulle, puis la divergence de g exclurait une limite finie. Le même argument s'applique en $-\infty$ par imparité.

Le tracé ci-dessous est obtenu à partir de la paramétrisation exacte $(x, y) = (t^3 + t, t)$, pour $-2 \leq t \leq 2$. Il représente g sur $[-10, 10]$, ainsi que sa tangente en 0.



3. Étude d'une primitive de g .

La continuité de g assure l'existence de $G(x) = \int_0^x g(u) du$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le théorème fondamental donne $G' = g$ et $G(0) = 0$.

3. (a) Méthode 1 — Vérification d'une primitive

Posons $H(x) = \frac{3}{4}g(x)^4 + \frac{1}{2}g(x)^2$. La dérivation et I.1.(b) donnent

$$H'(x) = [3g(x)^3 + g(x)]g'(x) = g(x)[3g(x)^2 + 1] \frac{1}{3g(x)^2 + 1} = g(x).$$

Comme $g(0) = 0$, on a $H(0) = 0$. Les fonctions G et H ont donc la même dérivée sur $\mathbb{R}$ et la même valeur en 0. Leur différence est constante et nulle, donc

$$G(x) = \frac{3}{4}g(x)^4 + \frac{1}{2}g(x)^2.$$

Méthode 2 — Intégration par parties

Sur le segment de bornes 0 et x , l'intégration par parties, valable aussi avec des bornes orientées si $x < 0$, donne

$$G(x) = xg(x) - \int_0^x u g'(u) du.$$

L'identité $u = g(u)^3 + g(u)$ transforme l'intégrande en $g(u)^3 g'(u) + g(u)g'(u)$, dont une primitive est $g(u)^4/4 + g(u)^2/2$. Comme $g(0) = 0$,

$$G(x) = xg(x) - \frac{1}{4}g(x)^4 - \frac{1}{2}g(x)^2.$$

Enfin, $xg(x) = g(x)^4 + g(x)^2$, donc $G(x) = 3g(x)^4/4 + g(x)^2/2$. Cette méthode utilise une intégration par parties et l'équation de g ; la première vérifie directement une expression candidate. Aucune intégrale impropre ni aucun changement de variable non affine n'intervient.

3. (b) Puisque $G' = g$, sa dérivée est négative sur $] -\infty, 0[$, nulle en 0 et positive sur $]0, +\infty[$. Ainsi G est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$, strictement croissante sur $]0, +\infty[$, et atteint son unique minimum global $G(0) = 0$. La formule de I.3.(a) et l'impairité de g montrent que G est paire.

Au voisinage de 0, écrivons $g(x) = x - x^3 + r(x)$ avec $r(x) = o(x^3)$. En développant le carré, les produits avec r donnent $g(x)^2 = x^2 - 2x^4 + o(x^4)$; en élevant ce carré au carré, $g(x)^4 = x^4 + o(x^4)$. Par substitution dans l'expression polynomiale exacte de G ,

$$G(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4).$$

En particulier, $G(x) \sim x^2/2$ en 0. Il s'agit de produits de développements explicitement effectués, sans théorème de composition des développements limités.

En $+\infty$, $g(x) \sim x^{1/3}$ et $g(x) \rightarrow +\infty$. On factorise

$$G(x) = \frac{3}{4}g(x)^4 \left(1 + \frac{2}{3g(x)^2}\right),$$

donc $G(x) \sim \frac{3}{4}x^{4/3}$ et $G(x) \rightarrow +\infty$. Par parité, $G(x) \rightarrow +\infty$ aussi en $-\infty$. Son tableau de variations est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de G'	$-$	0	$+$
G	$+\infty$; décroît	minimum 0	croît ; $+\infty$

II - Approximation rationnelle de g

Dans cette partie, $x \geq 0$ est fixé et l'on note $r = g(x)$. On a $r \geq 0$ et $x = r^3 + r \geq r$, donc $[r, x]$ est bien un intervalle. Si $x = 0$, alors $r = 0$ et toutes les valeurs $u_n(0)$ sont nulles ; les inégalités de convergence restent valables dans ce cas.

1. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse t a pour équation, en notant s l'abscisse variable,

$$y = f(t) + f'(t)(s - t) = t^3 + t + (3t^2 + 1)(s - t).$$

Son intersection avec D_x , d'équation $y = x$, vérifie

$$(3t^2 + 1)s = x - t^3 - t + (3t^2 + 1)t = x + 2t^3.$$

Comme $3t^2 + 1 > 0$, l'intersection est unique et son abscisse vaut $(2t^3 + x)/(3t^2 + 1)$. On obtient donc la récurrence demandée. On peut également l'écrire

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \frac{f(u_n(x)) - x}{f'(u_n(x))},$$

ce qui est la méthode de Newton pour l'équation $f(t) = x$. Ici la méthode est explicitement définie et ses propriétés sont démontrées dans les questions suivantes.

2. Étude de l'algorithme.

La fonction $\varphi(t) = (2t^3 + x)/(3t^2 + 1)$ est bien définie, continue et dérivable pour tout $t \geq 0$. De $x = r^3 + r$, on déduit $\varphi(r) = r$.

2. (a) On calcule

$$t - \varphi(t) = \frac{t(3t^2 + 1) - (2t^3 + x)}{3t^2 + 1} = \frac{t^3 + t - x}{3t^2 + 1}.$$

Le dénominateur est strictement positif, et $t^3 + t - x = f(t) - f(r)$ a le signe de $t - r$, car f est strictement croissante. Ainsi $t - \varphi(t) < 0$ pour $0 \leq t < r$, vaut 0 pour $t = r$, et est positif pour $t > r$. Si $r = 0$, le premier intervalle est vide.

2. (b) En dérivant le quotient,

$$\varphi'(t) = \frac{6t^2(3t^2 + 1) - 6t(2t^3 + x)}{(3t^2 + 1)^2} = \frac{6t(t^3 + t - x)}{(3t^2 + 1)^2}.$$

Pour $t > 0$, les facteurs $6t$ et le dénominateur sont positifs, donc le signe est celui de $t - r$. On a aussi $\varphi'(0) = 0$.

Si $x > 0$, donc $r > 0$, φ est strictement décroissante sur $[0, r]$ et strictement croissante sur $[r, +\infty[$; son minimum est $\varphi(r) = r$, et $\varphi(0) = x$. Si $x = 0$, elle est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, avec dérivée positive pour $t > 0$ et valeur 0 en 0.

2. (c) Pour $t \in [r, x]$, la croissance de φ sur $[r, +\infty[$ donne $\varphi(t) \geq \varphi(r) = r$. De II.2.(a), $t - \varphi(t) \geq 0$, donc $\varphi(t) \leq t \leq x$. Ainsi

$$r \leq \varphi(t) \leq t \leq x,$$

ce qui prouve la stabilité de $[r, x]$.

Pour le contrôle de la dérivée, $t \geq r$ implique $t^3 + t - x = f(t) - f(r) \geq 0$. De plus, $t \leq x$ implique $t^3 + t - x \leq t^3$. Donc

$$0 \leq \varphi'(t) \leq \frac{6t^4}{(3t^2 + 1)^2}.$$

Comme $(3t^2 + 1)^2 \geq 9t^4$, on peut vérifier sans division par t que $6t^4 \leq (2/3)(3t^2 + 1)^2$. Le dénominateur de φ' reste strictement positif même pour $t = 0$. Par conséquent, $0 \leq \varphi'(t) \leq 2/3$ sur $[r, x]$.

3. Étude de la convergence.

3. (a) La valeur initiale $u_0(x) = x$ appartient à $[r, x]$. La stabilité de cet intervalle donne, par récurrence, $u_n(x) \in [r, x]$ pour tout $n \geq 0$.

L'inégalité $\varphi(t) \leq t$ sur cet intervalle donne $u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$. La suite est donc décroissante et minorée par r . Elle converge vers un réel $\ell \in [r, x]$.

La fonction φ est continue, donc le passage à la limite dans $u_{n+1}(x) = \varphi(u_n(x))$ donne $\ell = \varphi(\ell)$. Cette équation équivaut, après multiplication par $3\ell^2 + 1 > 0$, à $\ell^3 + \ell = x$. L'unicité de la solution, établie en I.1.(a), donne $\ell = r = g(x)$.

Ainsi $u_n(x)$ décroît vers $g(x)$ pour tout $x \geq 0$. Pour $x > 0$, tant que $u_n(x) > r$, la décroissance est stricte ; pour $x = 0$, la suite est constante nulle.

3. (b) On compare les deux valeurs de φ en $u_n(x)$ et en r . Elles sont prises dans $[r, x]$, où $0 \leq \varphi' \leq 2/3$.

Si $u_n(x) = r$, les deux différences sont nulles. Sinon, le théorème des accroissements finis donne un $c \in]r, u_n(x)[$ tel que

$$u_{n+1}(x) - r = \varphi(u_n(x)) - \varphi(r) = \varphi'(c)[u_n(x) - r].$$

On obtient donc, dans tous les cas,

$$0 \leq u_{n+1}(x) - g(x) \leq \frac{2}{3}[u_n(x) - g(x)].$$

3. (c) En itérant l'inégalité précédente, on obtient, pour tout $x \geq 0$ et tout $n \geq 0$,

$$0 \leq u_n(x) - g(x) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n [x - g(x)].$$

Pour $x \in [0, a]$, $g(x) \geq 0$, donc $0 \leq x - g(x) \leq a$. Ainsi $0 \leq u_n(x) - g(x) \leq (2/3)^n a$ pour tous les points de cet intervalle.

L'ensemble des erreurs est non vide, puisque $0 \in [0, a]$, et borné ; son supremum est donc un réel fini. En prenant ce supremum, il vient

$$0 \leq \beta_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n a.$$

Cette estimation montre que l'erreur peut être rendue petite simultanément sur tout segment $[0, a]$. Elle vaut aussi pour $a = 0$, où $\beta_n = 0$.

3. (d) Pour $t \geq 0$, on utilise $x = r^3 + r$:

$$\varphi(t) - r = \frac{2t^3 + r^3 + r - r(3t^2 + 1)}{3t^2 + 1} = \frac{2t^3 - 3rt^2 + r^3}{3t^2 + 1}.$$

L'identité polynomiale

$$(t - r)^2(2t + r) = (t^2 - 2rt + r^2)(2t + r) = 2t^3 - 3rt^2 + r^3$$

donne exactement

$$\varphi(t) - r = (t - r)^2 \frac{2t + r}{3t^2 + 1}.$$

Pour $t \in [r, x]$, on a $0 \leq r \leq t$, donc $0 \leq (2t + r)/(3t^2 + 1) \leq 3t/(3t^2 + 1)$. Étudions $q(t) = 3t/(3t^2 + 1)$ sur $[0, +\infty[$. Sa dérivée vaut

$$q'(t) = \frac{3(1 - 3t^2)}{(3t^2 + 1)^2}.$$

Elle est positive avant $1/\sqrt{3}$, nulle en ce point et négative après. La fonction atteint donc son maximum en $1/\sqrt{3}$, de valeur $\sqrt{3}/2$. Ainsi

$$0 \leq \varphi(t) - g(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} [t - g(x)]^2.$$

En particulier, en notant $e_n = u_n(x) - g(x) \geq 0$, on obtient $e_{n+1} \leq (\sqrt{3}/2)e_n^2$. Cette borne quadratique explique l'accélération de la précision quand l'erreur est déjà petite.

3. (e) On calcule les deux itérations à partir de $u_0(1) = 1$:

$$u_1(1) = \frac{2 + 1}{3 + 1} = \frac{3}{4},$$

$$u_2(1) = \frac{2(3/4)^3 + 1}{3(3/4)^2 + 1} = \frac{59/32}{43/16} = \frac{59}{86}.$$

Cette valeur est une approximation par excès de $r = g(1)$, d'après II.3.(a).

Méthode 1 — Borne quadratique de l'erreur

Comme $f(2/3) = 26/27 < 1 = f(r)$ et que f est croissante, $r > 2/3$. On en déduit

$$0 \leq u_1(1) - r < \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}.$$

En appliquant II.3.(d),

$$0 \leq \frac{59}{86} - g(1) < \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{12} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{288} < 0,00602.$$

La fraction $59/86$ fournit donc une approximation par excès avec une erreur absolue inférieure à $0,00602$, en particulier inférieure à 10^{-2} .

Méthode 2 — Contrôle par le résidu de l'équation

On calcule le résidu exact de $v = 59/86$:

$$f(v) - 1 = \frac{59^3 + 59 \cdot 86^2 - 86^3}{86^3} = \frac{5687}{636056} > 0.$$

Le théorème des accroissements finis appliqué à f entre r et v donne

$$f(v) - f(r) = f'(c)(v - r) \text{ pour un } c \in]r, v[. \text{ Puisque } c > r > 2/3,$$

$$f'(c) = 1 + 3c^2 > 1 + 3(2/3)^2 = \frac{7}{3}.$$

Donc

$$0 < v - r < \frac{3}{7} \frac{5687}{636056} = \frac{17061}{4452392} < 0,00384.$$

On obtient une borne plus précise : $59/86 - 0,00384 < g(1) < 59/86$. La première méthode réutilise la vitesse de convergence de Newton ; la seconde contrôle directement une valeur approchée au moyen du résidu et d'un minorant de la dérivée. Une borne d'erreur absolue ne signifie pas automatiquement que l'arrondi de l'approximation possède les mêmes décimales que celui de la valeur exacte.

III - Approximation polynomiale de g par la méthode des moindres carrés

Les nombres $x_0, \dots, x_n$ sont distincts deux à deux et $n \geq 1$. On rappelle qu'un polynôme réel non nul de degré au plus d possède au plus d racines distinctes. Les espaces E_p ont pour base canonique $(1, X, \dots, X^p)$ et pour dimension $p + 1$.

1. Produit scalaire sur E_n adapté à S .

1. (a) La somme finie

$$(P | Q) = \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k)$$

est réelle, symétrique et bilinéaire, par les règles d'évaluation et les propriétés des sommes finies.

Pour tout $P \in E_n$, on a

$$(P | P) = \sum_{k=0}^n P(x_k)^2 \geq 0.$$

Si cette somme vaut 0, chacun de ses termes non négatifs est nul, donc $P(x_k) = 0$ pour tous les k . Le polynôme P , de degré au plus n , possède alors $n + 1$ racines distinctes ; il est nécessairement nul. Réciproquement, le polynôme nul a une norme carrée nulle.

Ainsi cette application est positive définie, symétrique et bilinéaire : c'est un produit scalaire sur E_n . Dans la suite, on note $\|P\|_S = \sqrt{(P | P)}$ la norme associée.

1. (b) Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, définissons

$$L_i(X) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

Les dénominateurs sont non nuls, puisque les points sont distincts. Ce produit de n facteurs affines est un polynôme de degré n , donc appartient à E_n . En $X = x_i$, chaque facteur vaut 1, donc $L_i(x_i) = 1$. En $X = x_k$ avec $k \neq i$, le facteur d'indice $j = k$ s'annule, donc $L_i(x_k) = 0$.

Pour l'unicité, si L et $\tilde{L}$ ont les mêmes valeurs imposées, leur différence appartient à E_n et s'annule aux $n + 1$ points distincts x_k . Le résultat sur les racines donne $L - \tilde{L} = 0$. Le polynôme L_i existe donc et est unique.

1. (c) Les valeurs obtenues en III.1.(b) donnent

$$(L_i | L_j) = \sum_{k=0}^n L_i(x_k) L_j(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

La famille est donc orthonormale, en particulier libre. Elle contient $n + 1 = \dim E_n$ vecteurs, donc constitue une base orthonormale de E_n .

1. (d) Posons

$$P_g = \sum_{i=0}^n g(x_i) L_i.$$

Cette somme appartient à E_n . Pour chaque k , son évaluation en x_k ne conserve que le terme d'indice $i = k$, donc $P_g(x_k) = g(x_k)$. Pour l'unicité, la différence de deux polynômes interpolant ces mêmes valeurs possède $n + 1$ racines distinctes et un degré au plus n ; elle est nulle.

Ainsi P_g existe et est unique. Ses composantes dans la base $\mathcal{B}$ sont $g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_n)$.

2. Approximation de g .

On fixe désormais $0 \leq p < n$. Le sous-espace E_p est inclus dans l'espace euclidien E_n muni du produit scalaire précédent.

2. (a) Pour $A \in E_p$, on a $P_g(x_k) = g(x_k)$, donc

$$N(A) = \sum_{k=0}^n [P_g(x_k) - A(x_k)]^2 = (P_g - A | P_g - A) = \|P_g - A\|_S^2.$$

La minimisation de N consiste donc à trouver le polynôme de E_p le plus proche de P_g pour cette norme.

2. (b) Méthode 1 — Projection orthogonale

L'espace E_n est euclidien et E_p en est un sous-espace vectoriel. Le théorème de projection orthogonale donne un unique $H_g \in E_p$ tel que $P_g - H_g \in E_p^\perp$.

Pour tout $A \in E_p$, on décompose $P_g - A = (P_g - H_g) + (H_g - A)$. Le premier vecteur est orthogonal à E_p et le second appartient à E_p ; ils sont orthogonaux. Par Pythagore,

$$N(A) = \|P_g - H_g\|_S^2 + \|H_g - A\|_S^2 = N(H_g) + \|H_g - A\|_S^2 \geq N(H_g).$$

L'égalité a lieu si et seulement si $\|H_g - A\|_S = 0$, donc si et seulement si $A = H_g$. Cela établit l'existence et l'unicité du minimiseur.

Méthode 2 — Quadratique en les coefficients et hessienne

Écrivons

$$A_\lambda(X) = \sum_{j=0}^p \lambda_j X^j$$

et posons $F(\lambda) = N(A_\lambda)$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^{p+1}$. Cette fonction polynomiale est de classe C^2 .

Définissons la matrice réelle symétrique R et le vecteur b par

$$R_{ij} = \sum_{k=0}^n x_k^{i+j}, \quad b_i = \sum_{k=0}^n x_k^i g(x_k) \quad (0 \leq i, j \leq p).$$

La valeur d'une puissance d'exposant 0 est ici celle du polynôme constant 1, y compris en un nœud nul. En développant les carrés,

$$F(\lambda) = {}^t\lambda R \lambda - 2 {}^t b \lambda + \sum_{k=0}^n g(x_k)^2.$$

Pour tout vecteur non nul $c = (c_0, \dots, c_p)$,

$${}^t c R c = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^p c_j x_k^j \right)^2 > 0.$$

En effet, le polynôme non nul

$$\sum c_j X^j,$$

de degré au plus $p < n$, ne peut pas s'annuler aux $n + 1$ nœuds distincts. Au moins un carré est donc strictement positif. Il en résulte que R a un noyau nul : si $Rc = 0$, alors ${}^t c R c = 0$, donc $c = 0$. Comme R est carrée, elle est inversible.

Le gradient et la hessienne sont

$$\nabla F(\lambda) = 2(R\lambda - b), \quad \nabla^2 F(\lambda) = 2R.$$

Le gradient s'annule au seul point $\lambda^* = R^{-1}b$. Pour tout vecteur propre non nul v de $2R$, associé à une valeur propre μ , on a $\mu \|v\|^2 = 2 {}^t v R v > 0$, donc $\mu > 0$. Le théorème spectral pour les matrices symétriques réelles montre ainsi que toutes les valeurs propres de la hessienne sont strictement positives, sans déterminant.

Au point critique, le critère hessien donne un minimum local strict. Ici il est aussi global et unique : en utilisant $R\lambda^* = b$ et en développant,

$$F(\lambda) - F(\lambda^*) = {}^t(\lambda - \lambda^*)R(\lambda - \lambda^*),$$

quantité strictement positive si $\lambda \neq \lambda^*$. Le polynôme A_{λ^*} est donc l'unique minimiseur H_g .

La première méthode donne l'interprétation géométrique et l'identité de Pythagore ; la seconde produit directement un système pour les coefficients et vérifie le minimum par une hessienne positive définie.

2. (c) Par la caractérisation de la projection orthogonale, $H_g \in E_p$ minimise N si et seulement si $P_g - H_g$ est orthogonal à chaque polynôme de E_p .

La famille $(1, X, \dots, X^p)$ est une base de E_p . Par bilinéarité du produit scalaire, être orthogonal à tous les éléments de E_p équivaut à être orthogonal à chacun des X^i , pour $0 \leq i \leq p$. On obtient donc

$$(P_g - H_g \mid X^i) = 0 \quad (0 \leq i \leq p),$$

soit $(H_g \mid X^i) = (P_g \mid X^i)$ pour tous ces indices.

Réciproquement, si un $H \in E_p$ vérifie ces égalités, elles impliquent $P_g - H \in E_p^\perp$; par unicité de la projection, $H = H_g$. Les relations caractérisent donc exactement le minimiseur, et ne sont pas seulement nécessaires.

2. (d) Rectification locale : le PDF demande comme solution le tuple $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ alors que l'expression de H_g comporte aussi λ_0 . Le système doit déterminer les $p + 1$ coefficients $(\lambda_0, \dots, \lambda_p)$, y compris le coefficient constant. Cette omission est particulièrement visible pour $p = 0$.

On remplace

$$H_g = \sum_{j=0}^p \lambda_j X^j$$

dans les relations de III.2.(c). Pour chaque $i \in \{0, \dots, p\}$,

$$\sum_{j=0}^p \lambda_j \sum_{k=0}^n x_k^{i+j} = \sum_{k=0}^n x_k^i g(x_k).$$

Avec les moments

$$s_\ell = \sum_{k=0}^n x_k^\ell$$

pour $0 \leq \ell \leq 2p$, et

$$b_i = \sum_{k=0}^n x_k^i g(x_k),$$

le système est

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_p \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_p & s_{p+1} & \cdots & s_{2p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}.$$

On a $s_0 = n + 1$, car X^0 est le polynôme constant 1. La matrice du système est précisément R de III.2.(b), dont l'inversibilité a été démontrée par sa forme quadratique. Le système possède donc une unique solution. On peut aussi la voir comme la conséquence de l'existence et de l'unicité du polynôme minimiseur, dont la décomposition dans la base canonique est unique.

Pour $p = 0$, le système se réduit à

$$(n+1)\lambda_0 = \sum_{k=0}^n g(x_k) :$$

le meilleur polynôme constant est la moyenne des valeurs aux nœuds.

2. (e) Question adaptée au programme actuel : la commande nécessaire à une mise en œuvre en Python est précisée dans le sujet. L'objectif et les données de l'algorithme sont conservés.

On décrit d'abord les étapes mathématiques, puis une réalisation numérique.

L'algorithme calcule les coefficients à partir des valeurs de g aux nœuds ; ces valeurs sont elles-mêmes approchées par la partie II.

Étape 1 — Fixer les données $x_0, \dots, x_n$, le degré $p < n$ et une précision souhaitée. Étape 2 — Calculer la matrice

$$R = \left(\sum_{k=0}^n x_k^{i+j} \right)_{0 \leq i, j \leq p}.$$

Elle dépend seulement des nœuds et du degré, et elle est inversible par III.2.(d). Étape 3

— À chaque nœud x_k , initialiser une itération par $v_{k,0} = x_k$ et calculer

$v_{k,m+1} = (2v_{k,m}^3 + x_k)/(3v_{k,m}^2 + 1)$. Ces valeurs approchent $g(x_k)$ par excès. Étape 4 —

Former un second membre approché

$$\hat{b}_i = \sum_{k=0}^n x_k^i v_{k,m}$$

pour $0 \leq i \leq p$. Étape 5 — Résoudre le système $R\hat{\lambda} = \hat{b}$ par le pivot de Gauss, ou par la commande numérique donnée dans le sujet, puis retourner

$$\widehat{H}_m(X) = \sum_{j=0}^p \hat{\lambda}_j X^j.$$

En arithmétique exacte, lorsque $m \rightarrow +\infty$, chaque $v_{k,m} \rightarrow g(x_k)$, donc $\hat{b} \rightarrow b$ par passage à la limite dans des sommes finies. Comme R^{-1} est fixe, $\hat{\lambda} = R^{-1}\hat{b} \rightarrow R^{-1}b = \lambda$. Les polynômes ainsi calculés approchent donc H_g coefficient par coefficient.

On peut aussi choisir le nombre d'itérations à partir d'une erreur sur le polynôme. Soit $a_* = \max_k x_k > 0$. Pour chaque nœud, II.3.(c) donne $|v_{k,m} - g(x_k)| \leq a_*(2/3)^m$. Soit $\hat{P}_m \in E_n$ le polynôme interpolant les $v_{k,m}$. Par définition de la norme,

$$\|\hat{P}_m - P_g\|_S^2 = \sum_{k=0}^n [v_{k,m} - g(x_k)]^2 \leq (n+1)a_*^2(2/3)^{2m}.$$

Le polynôme $\hat{H}_m$ est la projection orthogonale de $\hat{P}_m$ sur E_p , puisque son système est celui des mêmes relations d'orthogonalité. La linéarité de ce projecteur et Pythagore impliquent que sa norme ne peut pas augmenter un vecteur : si π est ce projecteur, $\|z\|_S^2 = \|\pi z\|_S^2 + \|z - \pi z\|_S^2 \geq \|\pi z\|_S^2$. Ainsi

$$\|\hat{H}_m - H_g\|_S \leq \|\hat{P}_m - P_g\|_S \leq \sqrt{n+1} a_* \left(\frac{2}{3}\right)^m.$$

Pour une précision $\tau > 0$, il suffit donc de choisir m tel que $\sqrt{n+1} a_* (2/3)^m \leq \tau$. Cet indice est fini, car $(2/3)^m \rightarrow 0$. Cette borne contrôle l'écart au polynôme exact H_g dans la norme aux nœuds ; l'erreur d'approximation de g par un polynôme de degré p demeure mesurée séparément par $N(H_g)$. Aucune borne sur tout l'intervalle entre les nœuds n'est affirmée.

Implémentation Python

Python

```
import numpy as np

def approximation_moindres_carres(abscisses, p, tolerance):
    points = np.array(abscisses, dtype=float)
    n = len(points) - 1
    if n < 1 or p < 0 or p >= n or tolerance <= 0:
        raise ValueError("Il faut n >= 1, 0 <= p < n et tolerance > 0.")
```

```
for k in range(n + 1):
    if points[k] < 0:
        raise ValueError("Les abscisses doivent etre positives ou nulles.")
    for j in range(k):
        if points[k] == points[j]:
            raise ValueError("Les abscisses doivent etre distinctes.")

valeurs = np.array(points, dtype=float)
borne = max(points)
facteur = np.sqrt(n + 1)
iterations = 0
while facteur * borne > tolerance:
    valeurs = (2 * valeurs**3 + points) / (3 * valeurs**2 + 1)
    borne = (2 / 3) * borne
    iterations = iterations + 1

W = np.zeros((n + 1, p + 1))
for k in range(n + 1):
    W[k, 0] = 1
    for j in range(1, p + 1):
        W[k, j] = W[k, j - 1] * points[k]

R = np.dot(W.T, W)
second_membre = np.dot(W.T, valeurs)
coefficients = np.linalg.solve(R, second_membre)
return coefficients, iterations, facteur * borne

coefficients, iterations, borne = approximation_moindres_carres(
    [0, 0.5, 1, 1.5, 2], 2, 1e-8
)
print(coefficients)
print(iterations)
print(borne)
```

Le degré p est un entier, les abscisses sont des réels finis représentables par le tableau numérique, et la tolérance est strictement positive. Le tableau valeurs contient simultanément les itérations de Newton aux $n + 1$ nœuds. Dans cette formule, les puissances, les multiplications par un scalaire et la division des tableaux sont effectuées coefficient par coefficient. La variable borne part de a_* et est multipliée par $2/3$ à chaque itération ; la condition de boucle correspond exactement à la majoration précédente.

La matrice W contient $W_{kj} = x_k^j$; sa première colonne est initialisée à 1, ce qui traite le polynôme constant même en un nœud nul. Les bornes exclusives de range font parcourir tous les indices $0, \dots, n$ et les degrés $1, \dots, p$. Le symbole $.T$ désigne la transposée. Les commandes `np.dot` effectuent les produits matriciels et donnent $R = {}^tWW$ ainsi que le second membre tWv . La commande `np.linalg.solve`, expliquée dans le sujet, résout le système carré. La fonction renvoie les coefficients dans l'ordre constant, linéaire, quadratique, puis jusqu'au degré p , le nombre d'itérations et la borne théorique de l'erreur liée aux valeurs de Newton.

La borne démontrée suppose les opérations exactes. En calcul flottant, les arrondis et la résolution du système ajoutent une erreur, notamment pour des degrés élevés ou des nœuds produisant une matrice difficile à résoudre numériquement ; le code illustre ici des données et des degrés modestes. Le calcul numérique accompagne la démonstration et ne la remplace pas.

Code exécuté et vérifié. Pour les cinq nœuds de l'exemple et le degré 2, il renvoie les coefficients approximatifs

$$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = (0.0131880080, 0.8587503495, -0.1856381447),$$

dans l'ordre des puissances croissantes, avec 50 itérations et une borne théorique inférieure à $7,02 \times 10^{-9}$. Le cas du polynôme constant et les relations d'orthogonalité du système ont également été contrôlés numériquement. Ces vérifications ne remplacent pas les preuves précédentes.

Relevé des adaptations

- III.2.(d) : le tuple des inconnues est rectifié en $(\lambda_0, \dots, \lambda_p)$. L'original omet λ_0 dans le tuple final alors que le coefficient constant figure dans l'expression de H_g . Les $p + 1$ coefficients sont nécessaires, y compris pour $p = 0$.
- III.2.(e) : une réalisation Python est proposée et la syntaxe, les paramètres et la valeur renvoyée par `np.linalg.solve` sont fournis dans le sujet. La question conserve son objectif ; le corrigé justifie une précision sur le polynôme calculé à partir de l'erreur de Newton. Aucun code ancien n'est à convertir.