



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1984

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

HEC - ESCP - emlyon 1984 - Mathématiques I

Énoncé - Mathématiques approfondies ECG

Sujet d'origine : concours 1984, option générale. La structure, les notations et la numérotation sont conservées. Les différentiels manquants dans le PDF sont rétablis. Toutes les propriétés nécessaires de la fonction Γ sont établies dans le problème ; aucune connaissance préalable de cette fonction n'est requise. La formule de Stirling est admise.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les résultats des calculs doivent être justifiés et les conclusions clairement mises en évidence.

Partie I - Approximation d'une intégrale impropre

Soit n un entier naturel non nul. On considère les fonctions f_n , g_n et h_n définies sur $[0, n]$ par

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n, \quad g_n(t) = e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n, \quad h_n(t) = e^t g'_n(t).$$

Les dérivées aux extrémités sont comprises comme les dérivées unilatérales, ou celles des prolongements naturels de ces expressions.

1. Variations de h_n et de g_n

Étudier les variations de h_n et dresser son tableau de variations.

En déduire les variations de g_n . Montrer en particulier que g_n est à valeurs positives ou nulles et qu'il existe un unique $x_n \in [0, n]$ tel que, pour tout $t \in [0, n]$,

$$g_n(t) \leq g_n(x_n).$$

2. Majoration du maximum de g_n

Montrer que

$$g_n(x_n) \leq \frac{1}{ne}.$$

3. Convergence et comparaison des intégrales

Soit x un réel strictement positif.

a) Étudier la convergence des intégrales

$$I_n(x) = \int_0^n f_n(t)t^{x-1} dt, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt.$$

b) Soit $c > 0$. Montrer que, si $n \geq c$, alors

$$0 \leq \Gamma(x) - I_n(x) \leq \int_0^c g_n(t)t^{x-1} dt + \int_c^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt.$$

4. Limite de $I_n(x)$

En déduire que la suite de terme général $I_n(x)$ converge vers $\Gamma(x)$.

Partie II - Produits et formule de duplication

On admet la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Soit $\alpha > 0$. On pose

$$P_1(\alpha) = 1, \quad P_n(\alpha) = (\alpha + 1)(2\alpha + 1) \cdots [(n-1)\alpha + 1] \quad (n \geq 2),$$

et

$$J_0(\alpha) = 1, \quad J_n(\alpha) = \int_0^1 (1 - t^\alpha)^n dt \quad (n \geq 1).$$

1. Relation de récurrence pour $J_n(\alpha)$

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$(1 + n\alpha)J_n(\alpha) = n\alpha J_{n-1}(\alpha).$$

2. Expression de $J_n(\alpha)$

En déduire la valeur de $J_n(\alpha)$, que l'on exprimera à l'aide de $P_n(\alpha)$.

3. Relation avec I_n et équivalent de P_n

En effectuant un changement de variable, trouver une relation entre $J_n(\alpha)$ et $I_n(1/\alpha)$.

En déduire un équivalent de la suite de terme général $P_n(\alpha)$, pour α fixé.

4. Équivalent d'un produit à pas constant

Soit désormais $x > 0$. Pour $p \in \mathbb{N}$ non nul et $n \in \mathbb{N}$ non nul, on pose

$$Q_n(p, x) = x(x+p)(x+2p) \cdots [x + (n-1)p].$$

Exprimer $Q_n(p, x)$ à l'aide de $P_n(p/x)$. En déduire un équivalent de la suite de terme général $Q_n(p, x)$, les nombres p et x étant fixés.

5. Formule de duplication et intégrale de Gauss

a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$Q_n(2, x)Q_n(2, x + 1) = Q_{2n}(1, x).$$

b) En déduire une relation entre $\Gamma(x)$, $\Gamma(x/2)$ et $\Gamma((x + 1)/2)$.

c) En déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$, puis, à l'aide d'un changement de variable, la convergence et la valeur de

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$