



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1984

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

HEC - ESCP - emlyon 1984 - Mathématiques I

Corrigé détaillé - Mathématiques approfondies ECG

La numérotation suit l'énoncé. La fonction Γ est définie par son intégrale dans le problème : aucune formule générale sur cette fonction n'est utilisée sans démonstration. La formule de Stirling est admise, conformément au sujet.

Le cas $n = 1$ est traité séparément dans les deux premières questions. Les intégrations par parties et les changements de variable sont d'abord effectués sur des segments où les fonctions sont régulières, puis prolongés par passage à la limite.

Partie I - Approximation d'une intégrale impropre

1. Variations de h_n et de g_n

Calcul de g'_n et de h_n

Les fonctions considérées sont les restrictions à $[0, n]$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$: $(1 - t/n)^n$ est un polynôme. En dérivant,

$$g'_n(t) = -e^{-t} + \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}.$$

Donc

$$h_n(t) = -1 + e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}.$$

Lorsque $n = 1$, la puissance d'exposant 0 désigne le polynôme constant égal à 1, y compris en $t = 1$.

Cas $n = 1$

On a, pour $t \in [0, 1]$,

$$g_1(t) = e^{-t} - 1 + t, \quad h_1(t) = e^t - 1.$$

La fonction h_1 est strictement croissante, de 0 à $e - 1$. Elle est positive pour $t > 0$.

Comme $g_1'(t) = e^{-t}h_1(t)$, la fonction g_1 est strictement croissante sur $[0, 1]$, de 0 à e^{-1} .

t	0	1
$h_1(t)$	0	$e - 1$; croissance stricte
$g_1(t)$	0	e^{-1} ; croissance stricte

Le maximum est atteint uniquement en $t = 1$:

$$x_1 = 1, \quad g_1(x_1) = \frac{1}{e}.$$

Cas $n \geq 2$: variations de h_n

Pour $0 < t < n$, on dérive l'expression de h_n :

$$\begin{aligned} h_n'(t) &= e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} - \frac{n-1}{n} e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} \\ &= e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} \left(1 - \frac{t}{n} - \frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{1-t}{n} e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$h'_n(t) = \frac{1-t}{n} e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2}.$$

Pour $0 < t < n$, le facteur autre que $1 - t$ est strictement positif. Le signe de $h'_n(t)$ est donc celui de $1 - t$. La fonction h_n est strictement croissante sur $[0, 1]$ puis strictement décroissante sur $[1, n]$.

On connaît les valeurs

$$h_n(0) = 0, \quad h_n(1) = e \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} - 1 > 0, \quad h_n(n) = -1.$$

La positivité de $h_n(1)$ découle de la croissance stricte sur $[0, 1]$, sans nécessiter d'estimation de la puissance.

Intervalle ou point	Variation ou valeur de h_n
$t = 0$	$h_n(0) = 0$
$[0, 1]$	Strictement croissante
$t = 1$	Maximum strictement positif
$[1, n]$	Strictement décroissante
$t = n$	$h_n(n) = -1$

Existence et unicité du maximum de g_n

La fonction h_n est continue sur $[1, n]$, strictement décroissante, positive en 1 et négative en n . Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie donnent un unique $x_n \in]1, n[$ tel que

$$h_n(x_n) = 0.$$

Par conséquent, $h_n(t) > 0$ pour $0 < t < x_n$ et $h_n(t) < 0$ pour $x_n < t \leq n$. Comme $g'_n(t) = e^{-t}h_n(t)$, les signes sont les mêmes pour g'_n .

Intervalle ou point	Signe de g'_n	Variation ou valeur de g_n
$t = 0$	0	$g_n(0) = 0$
$]0, x_n[$	+	Strictement croissante
$t = x_n$	0	Maximum unique
$]x_n, n[$	—	Strictement décroissante
$t = n$	—	$g_n(n) = e^{-n}$

Sur $[0, x_n]$, la fonction croît à partir de 0. Sur $[x_n, n]$, elle décroît jusqu'à $e^{-n} > 0$. Ainsi, elle est positive ou nulle sur tout $[0, n]$, et strictement positive pour $t > 0$.

En réunissant les deux cas,

$$g_n(t) \geq 0 \quad (0 \leq t \leq n),$$

et

$$\text{Le maximum de } g_n \text{ est atteint en un unique } x_n; \quad x_1 = 1, \quad 1 < x_n < n \text{ si } n \geq 2.$$

Cette étude établit également l'inégalité utile

$$0 \leq f_n(t) \leq e^{-t} \quad (0 \leq t \leq n).$$

2. Majoration du maximum de g_n

Pour $n = 1$, on a déjà $g_1(x_1) = 1/e$, ce qui donne l'égalité demandée.

Supposons $n \geq 2$. Le point x_n est intérieur à $[0, n]$ et $g'_n(x_n) = 0$. D'où

$$e^{-x_n} = \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1}.$$

En multipliant par $1 - x_n/n$,

$$\left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x_n}{n}\right) e^{-x_n}.$$

Ainsi,

$$g_n(x_n) = e^{-x_n} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right) e^{-x_n} = \frac{x_n}{n} e^{-x_n}.$$

La fonction $u \mapsto ue^{-u}$, pour $u \geq 0$, a pour dérivée $(1 - u)e^{-u}$. Elle atteint son maximum en $u = 1$, avec la valeur $1/e$. On obtient donc

$$g_n(x_n) \leq \frac{1}{ne}.$$

L'inégalité est même stricte pour $n \geq 2$, puisque $x_n > 1$. En particulier, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq g_n(t) \leq \frac{1}{ne} \quad (0 \leq t \leq n).$$

Il aurait été incorrect d'imposer $g'_1(x_1) = 0$: pour $n = 1$, le maximum est atteint à une extrémité, et $g'_1(1) = 1 - e^{-1} > 0$.

3. Convergence et comparaison des intégrales

a) Convergence de $I_n(x)$ et de $\Gamma(x)$

On fixe $x > 0$.

Pour $I_n(x)$. Sur $]0, n]$, l'intégrande est continue. Lorsque $t \rightarrow 0^+$, $f_n(t) \rightarrow 1$, donc

$$f_n(t)t^{x-1} \sim t^{x-1}.$$

L'intégrale $\int_0^1 t^{x-1} dt$ converge puisque $x - 1 > -1$, c'est-à-dire $x > 0$. Il n'y a pas de singularité en n , puisque $n > 0$ et $f_n(n) = 0$. Par comparaison,

$$I_n(x) = \int_0^n f_n(t)t^{x-1} dt \text{ converge.}$$

Pour $\Gamma(x)$. Au voisinage de 0,

$$e^{-t}t^{x-1} \sim t^{x-1},$$

ce qui donne la convergence comme précédemment. En $+\infty$, la croissance comparée donne $t^{x+1}e^{-t} \rightarrow 0$, donc

$$e^{-t}t^{x-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Comme l'intégrande est positive et que l'intégrale de $1/t^2$ converge à l'infini,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt \text{ converge pour } x > 0.$$

Cette intégrale est strictement positive : $\Gamma(x) > 0$.

b) Encadrement de $\Gamma(x) - I_n(x)$

Pour $c > 0$ et $n \geq c$, la convergence des intégrales permet d'écrire

$$\begin{aligned}\Gamma(x) - I_n(x) &= \int_0^n (e^{-t} - f_n(t))t^{x-1} dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt \\ &= \int_0^n g_n(t)t^{x-1} dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt.\end{aligned}$$

Les intégrandes sont positifs ou nuls, donc cette différence est positive ou nulle. En séparant l'intégrale sur $[0, n]$ en $[0, c]$ et $[c, n]$,

$$\Gamma(x) - I_n(x) = \int_0^c g_n(t)t^{x-1} dt + \int_c^n g_n(t)t^{x-1} dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt.$$

Puisque $f_n(t) \geq 0$, on a $g_n(t) = e^{-t} - f_n(t) \leq e^{-t}$. Ainsi,

$$\int_c^n g_n(t)t^{x-1} dt \leq \int_c^n e^{-t}t^{x-1} dt.$$

En regroupant les deux dernières intégrales,

$$0 \leq \Gamma(x) - I_n(x) \leq \int_0^c g_n(t)t^{x-1} dt + \int_c^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt.$$

4. Convergence de $I_n(x)$ vers $\Gamma(x)$

La majoration de I.2 donne, lorsque $n \geq c$,

$$\int_0^c g_n(t)t^{x-1} dt \leq \frac{1}{ne} \int_0^c t^{x-1} dt = \frac{c^x}{nex}.$$

En l'insérant dans I.3.b,

$$0 \leq \Gamma(x) - I_n(x) \leq \frac{c^x}{nex} + \int_c^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt \quad (n \geq c).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme l'intégrale définissant $\Gamma(x)$ converge, on peut choisir $c > 0$ assez grand pour avoir

$$\int_c^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ce c étant désormais fixé, on choisit un entier $N \geq c$ assez grand pour que $c^x/(Nex) < \varepsilon/2$. Pour tout $n \geq N$, on a alors

$$0 \leq \Gamma(x) - I_n(x) < \varepsilon.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = \Gamma(x), \quad x > 0.$$

L'ordre des choix est essentiel : on choisit d'abord c pour rendre la queue d'intégrale petite, puis n pour contrôler l'erreur sur $[0, c]$. Aucun échange d'une limite et d'une intégrale n'est nécessaire.

Partie II - Produits et formule de duplication

1. Relation de récurrence pour $J_n(\alpha)$

On fixe $\alpha > 0$ et $n \geq 1$. La fonction $t \mapsto (1 - t^\alpha)^n$ est continue sur $[0, 1]$, donc $J_n(\alpha)$ existe.

Si $0 < \alpha < 1$, sa dérivée peut être singulière en 0. On effectue donc une intégration par parties sur $[\varepsilon, 1]$, avec $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 (1 - t^\alpha)^n dt &= [t(1 - t^\alpha)^n]_{\varepsilon}^1 + n\alpha \int_{\varepsilon}^1 t^\alpha (1 - t^\alpha)^{n-1} dt \\ &= -\varepsilon(1 - \varepsilon^\alpha)^n + n\alpha \int_{\varepsilon}^1 t^\alpha (1 - t^\alpha)^{n-1} dt. \end{aligned}$$

Le terme de bord tend vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$. L'intégrande restant est continu sur $[0, 1]$, avec une extension de valeur 0 en 0. On obtient donc

$$J_n(\alpha) = n\alpha \int_0^1 t^\alpha (1 - t^\alpha)^{n-1} dt.$$

Or

$$t^\alpha (1 - t^\alpha)^{n-1} = (1 - t^\alpha)^{n-1} - (1 - t^\alpha)^n.$$

Ainsi,

$$J_n(\alpha) = n\alpha(J_{n-1}(\alpha) - J_n(\alpha)),$$

d'où

$$(1 + n\alpha)J_n(\alpha) = n\alpha J_{n-1}(\alpha).$$

Pour $n = 1$, on comprend $(1 - t^\alpha)^0$ comme la fonction constante égale à 1, et son intégrale vaut bien $J_0(\alpha) = 1$.

2. Expression de $J_n(\alpha)$ à l'aide de $P_n(\alpha)$

La relation précédente donne

$$J_n(\alpha) = \frac{n\alpha}{1 + n\alpha} J_{n-1}(\alpha).$$

En itérant de n jusqu'à 1, avec $J_0(\alpha) = 1$,

$$J_n(\alpha) = \prod_{k=1}^n \frac{k\alpha}{1 + k\alpha} = \frac{\alpha^n n!}{\prod_{k=1}^n (1 + k\alpha)}.$$

Le dénominateur est $P_{n+1}(\alpha) = (1 + n\alpha)P_n(\alpha)$. Donc

$$J_n(\alpha) = \frac{\alpha^n n!}{P_{n+1}(\alpha)} = \frac{\alpha^n n!}{(1 + n\alpha)P_n(\alpha)}.$$

Pour $n = 1$, cette expression donne $J_1(\alpha) = \alpha/(1 + \alpha)$, qui coïncide avec le calcul direct de $\int_0^1 (1 - t^\alpha) dt$.

3. Relation avec I_n et équivalent de P_n

Changement de variable

Dans $J_n(\alpha)$, posons $u = nt^\alpha$. Pour $t > 0$,

$$t = \left(\frac{u}{n}\right)^{1/\alpha}, \quad dt = \frac{1}{\alpha n^{1/\alpha}} u^{1/\alpha-1} du.$$

Sur $[\varepsilon, 1]$, ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant. Puis, en faisant tendre ε vers 0^+ , la convergence de $I_n(1/\alpha)$ démontrée en I.3.a justifie l'égalité

$$\begin{aligned} J_n(\alpha) &= \frac{1}{\alpha n^{1/\alpha}} \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^{1/\alpha-1} du \\ &= \frac{I_n(1/\alpha)}{\alpha n^{1/\alpha}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{I_n(1/\alpha) = \alpha n^{1/\alpha} J_n(\alpha).}$$

Équivalent de $J_n(\alpha)$

La partie I donne $I_n(1/\alpha) \rightarrow \Gamma(1/\alpha) > 0$. Par conséquent,

$$\boxed{J_n(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha n^{1/\alpha}}.}$$

Équivalent de $P_n(\alpha)$

D'après II.2,

$$P_n(\alpha) = \frac{\alpha^n n!}{(1 + n\alpha) J_n(\alpha)}.$$

Or $1 + n\alpha \sim n\alpha$ et

$$(1 + n\alpha)J_n(\alpha) \sim n\alpha \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha n^{1/\alpha}} = \Gamma(1/\alpha)n^{1-1/\alpha}.$$

Donc

$$P_n(\alpha) \sim \frac{\alpha^n n! n^{1/\alpha-1}}{\Gamma(1/\alpha)}.$$

En utilisant la formule de Stirling admise,

$$\begin{aligned} P_n(\alpha) &\sim \frac{\alpha^n}{\Gamma(1/\alpha)} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} n^{1/\alpha-1} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1/\alpha)} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^n n^{n+1/\alpha-1/2}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$P_n(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1/\alpha)} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^n n^{n+1/\alpha-1/2}.$$

La puissance $n^{1/\alpha-1}$ provient notamment du facteur $1 + n\alpha$; l'oublier conduirait à un équivalent erroné.

4. Équivalent de $Q_n(p, x)$

En mettant x en facteur dans chacun des n termes,

$$\begin{aligned} Q_n(p, x) &= x^n \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{kp}{x} \right) \\ &= x^n \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{kp}{x} \right). \end{aligned}$$

Le produit vide vaut 1 lorsque $n = 1$. Par définition de P_n ,

$$Q_n(p, x) = x^n P_n(p/x).$$

Pour p et x fixés, l'équivalent de II.3 avec $\alpha = p/x$ donne

$$P_n(p/x) \sim \frac{(p/x)^n n! n^{x/p-1}}{\Gamma(x/p)}.$$

En multipliant par x^n ,

$$Q_n(p, x) \sim \frac{p^n n! n^{x/p-1}}{\Gamma(x/p)}.$$

Après application de Stirling, on obtient la forme utile à la question suivante :

$$Q_n(p, x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x/p)} \left(\frac{p}{e} \right)^n n^{n+x/p-1/2}.$$

5. Formule de duplication et intégrale de Gauss

a) Identité entre les produits

On a

$$Q_n(2, x) = \prod_{k=0}^{n-1} (x + 2k), \quad Q_n(2, x + 1) = \prod_{k=0}^{n-1} (x + 2k + 1).$$

Le premier produit contient les facteurs dont le décalage est pair, de 0 à $2n - 2$, et le second ceux dont le décalage est impair, de 1 à $2n - 1$. Leur réunion contient chaque facteur $x + j$, pour $0 \leq j \leq 2n - 1$, exactement une fois. Ainsi,

$$Q_n(2, x)Q_n(2, x + 1) = \prod_{j=0}^{2n-1} (x + j) = Q_{2n}(1, x).$$

b) Relation entre les valeurs de Γ

On utilise les équivalents de II.4. Pour $x > 0$ fixé,

$$Q_n(2, x) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x/2)} \left(\frac{2}{e}\right)^n n^{n+x/2-1/2},$$

et

$$Q_n(2, x + 1) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma((x+1)/2)} \left(\frac{2}{e}\right)^n n^{n+(x+1)/2-1/2}.$$

En multipliant,

$$Q_n(2, x)Q_n(2, x + 1) \sim \frac{2\pi}{\Gamma(x/2)\Gamma((x+1)/2)} \left(\frac{2}{e}\right)^{2n} n^{2n+x-1/2}.$$

Pour le membre de droite de II.5.a, on applique II.4 à l'indice $2n$, avec $p = 1$:

$$\begin{aligned} Q_{2n}(1, x) &\sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x)} e^{-2n} (2n)^{2n+x-1/2} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi} 2^{x-1/2}}{\Gamma(x)} \left(\frac{2}{e}\right)^{2n} n^{2n+x-1/2}. \end{aligned}$$

Les deux quantités sont exactement égales pour tout n . Après division par le facteur positif commun

$$\left(\frac{2}{e}\right)^{2n} n^{2n+x-1/2},$$

leurs limites sont donc égales :

$$\frac{2\pi}{\Gamma(x/2)\Gamma((x+1)/2)} = \frac{\sqrt{2\pi} 2^{x-1/2}}{\Gamma(x)}.$$

Toutes les valeurs de Γ sont strictement positives. On peut donc multiplier et simplifier pour obtenir

$$\boxed{\Gamma(x/2)\Gamma((x+1)/2) = 2^{1-x}\sqrt{\pi}\Gamma(x), \quad x > 0.}$$

De manière équivalente,

$$\boxed{\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x/2)\Gamma((x+1)/2).}$$

C'est la formule de duplication demandée. Elle a été démontrée à partir des produits et de Stirling, sans faire appel à une propriété préalable de Γ .

c) Valeur de $\Gamma(1/2)$ et intégrale de Gauss

On calcule directement

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

En prenant $x = 1$ dans la formule précédente,

$$\Gamma(1/2)\Gamma(1) = 2^0 \sqrt{\pi} \Gamma(1).$$

Comme $\Gamma(1) = 1$, on obtient

$$\boxed{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.}$$

Pour l'intégrale de Gauss, on part de

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{-1/2} du.$$

Sur un segment $[\varepsilon, R]$, on effectue le changement de variable $u = t^2$, soit $du = 2t dt$.

Comme $t > 0$, on a $u^{-1/2} = 1/t$, donc

$$\int_{\varepsilon}^R e^{-u} u^{-1/2} du = 2 \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{R}} e^{-t^2} dt.$$

L'intégrale de gauche converge lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$ et $R \rightarrow +\infty$ d'après I.3.a. L'intégrande de droite est continu en 0, et cette égalité donne la convergence à l'infini. En passant aux limites,

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Cette valeur est obtenue sans supposer connue une intégrale gaussienne ou la normalisation de la loi normale.

Résultats essentiels

Objet	Résultat
Maximum de g_n	$x_1 = 1; 1 < x_n < n$ pour $n \geq 2$
Erreur sur $[0, n]$	$0 \leq g_n(t) \leq 1/(ne)$
Limite des intégrales	$I_n(x) \rightarrow \Gamma(x)$ pour $x > 0$
Récurrence de J_n	$(1 + n\alpha)J_n = n\alpha J_{n-1}$
Expression de J_n	$J_n = \alpha^n n! / [(1 + n\alpha)P_n]$
Changement de variable	$I_n(1/\alpha) = \alpha n^{1/\alpha} J_n(\alpha)$
Équivalent de P_n	$P_n(\alpha) \sim \alpha^n n! n^{1/\alpha-1} / \Gamma(1/\alpha)$
Équivalent de Q_n	$Q_n(p, x) \sim p^n n! n^{x/p-1} / \Gamma(x/p)$
Duplication	$\Gamma(x/2)\Gamma((x+1)/2) = 2^{1-x} \sqrt{\pi} \Gamma(x)$
Intégrale de Gauss	$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$

Points de vigilance

- Séparer $n = 1$ et $n \geq 2$ lors de l'étude du maximum.
- Justifier les convergences au voisinage de 0 avant de comparer les intégrales.
- Pour I.4, fixer la coupure c avant de faire tendre n vers l'infini.
- Dans II.1, utiliser un segment $[\varepsilon, 1]$ pour éviter la singularité éventuelle de la dérivée en 0.
- Distinguer P_n et P_{n+1} : le facteur supplémentaire est $1 + n\alpha$.
- Dans II.5.b, appliquer Stirling à l'indice $2n$ et conserver le facteur $2^{x-1/2}$.
- Dans II.5.c, démontrer la valeur de l'intégrale de Gauss à partir de la formule obtenue, sans l'utiliser auparavant.