



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1983

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par f_n, g_n, h_n les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x+x^2)^n}, \quad g_n(x) = \frac{x}{(1+x+x^2)^n}, \quad h_n(x) = \frac{x^2}{(1+x+x^2)^n}.$$

PARTIE I

1. Étudier les variations des fonctions f_1, g_1, h_1 . Dresser les tableaux de variation de ces fonctions. Construire leurs courbes représentatives dans un même repère orthonormal.
2. Déterminer les nombres de points d'inflexion de ces courbes, ce qui revient à déterminer les nombres de points où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe. Calculer les coordonnées des points d'inflexion et les pentes des tangentes en ces points à 10^{-2} près.

PARTIE II

On pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(t) dt, \quad J_n = \int_0^1 g_n(t) dt, \quad K_n = \int_0^1 h_n(t) dt.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$1 - x \leq \frac{1}{1+x+x^2} \leq \frac{1}{1+x}.$$

2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}.$$

Trouver un équivalent simple de I_n . On dit que les suites (u_n) et (v_n) de nombres réels strictement positifs sont équivalentes lorsque le rapport u_n/v_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

3. Pour tout entier naturel $n \geq 3$, calculer les intégrales :

$$\int_0^1 t(1-t)^n dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^n} dt.$$

Trouver un équivalent simple de J_n .

4. Pour tout entier naturel $n \geq 4$, calculer les intégrales :

$$\int_0^1 t^2(1-t)^n dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t)^n} dt.$$

Trouver un équivalent simple de K_n .

PARTIE III

On conserve les notations précédentes.

1. Calculer I_1 .

2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$I_{n+1} = \frac{2(2n-1)}{3n} I_n + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3} \right).$$

Calculer I_2, I_3, I_4 . On donnera le résultat sous la forme $a + b\pi\sqrt{3}$, où a et b sont des nombres rationnels que l'on exprimera sous forme réduite ; on donnera ensuite des valeurs approchées de ces intégrales à 10^{-3} près.

3. Exprimer J_n et K_n en fonction de I_n . En déduire les valeurs de J_n et de K_n lorsque $n = 1, n = 2, n = 3$. On donnera ces valeurs approchées à 10^{-3} près.

PARTIE IV

On considère les intégrales impropres :

$$I'_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt, \quad J'_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt, \quad K'_n = \int_0^{+\infty} h_n(t) dt.$$

1. Déterminer pour quelles valeurs de n ces intégrales sont convergentes.
2. Dans chacun des cas où elles convergent, calculer I'_n, J'_n, K'_n lorsque $n = 1, n = 2, n = 3$.