



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1983

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

HEC - ESCP - emlyon 1983 - Mathématiques I

Énoncé - Mathématiques approfondies ECG

Sujet d'origine : concours 1983, option générale. La structure, les notations et la numérotation sont conservées. Deux coquilles sont rectifiées : en I.4, la conclusion porte sur (w_n) ; en II.5.a, l'intégrande est $\varphi(t)e^{-t}$. Les questions se traitent avec des récurrences, la continuité sur un segment, des comparaisons d'intégrales et des primitives usuelles ; aucune inégalité intégrale générale n'est supposée connue.

On note $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. Soit $a \in \mathbb{R}$. L'hypothèse $a \geq 0$ s'applique uniquement à la partie I.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les résultats doivent être justifiés et les conclusions clairement mises en évidence.

Partie I - Suites et majorations

Dans cette partie, on suppose $a \geq 0$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et

$$u_{n+1} = a + \frac{1 - e^{-n}}{2} u_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

1. Étude de (u_n)

- a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2a$.
- b) Montrer que (u_n) est croissante.
- c) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. Suite vérifiant une inégalité de récurrence

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$v_{n+1} \leq a + \frac{1 - e^{-n}}{2} v_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

- a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $v_n \leq u_n$.
- b) Montrer que (v_n) est majorée.
- c) À l'aide d'un contre-exemple, montrer que (v_n) n'est pas nécessairement convergente.

3. Majorations d'intégrales

- a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

- b) Montrer que

$$\int_0^1 e^{-x^3} dx \leq \frac{5}{6}.$$

- c) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x^3} dx$ converge et que

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^3} dx \leq \frac{1}{2}.$$

4. Une autre inégalité de récurrence

Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$w_{n+1} \leq a + \frac{w_n}{4} \int_0^n e^{-x^3} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Montrer que (w_n) est majorée.

Partie II - Majorations de fonctions

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Dans cette partie, a est un réel quelconque.

1. Maximum de f sur un segment variable

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble des valeurs $f(t)$, pour $t \in [0, x]$, admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. On note

$$g(x) = \sup_{t \in [0, x]} f(t).$$

Montrer que g est croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Une première inégalité intégrale

On suppose dans cette question que

$$f(x) \leq a + \int_0^x f(t)e^{-t} dt, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (4)$$

a) On suppose, dans cette sous-question uniquement, que f est croissante. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \geq k$,

$$f(x) \leq a + \int_0^k f(t)e^{-t} dt + (e^{-k} - e^{-x})f(x).$$

En déduire que f est majorée.

b) On suppose, dans cette sous-question uniquement, que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction g de II.1 vérifie elle aussi (4), c'est-à-dire

$$g(x) \leq a + \int_0^x g(t)e^{-t} dt.$$

En déduire que f est majorée.

c) On suppose seulement que f vérifie (4). Montrer que f est majorée.

3. Un autre noyau intégrable

On suppose que

$$f(x) \leq a + \int_0^x f(t)e^{-t^3} dt, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (5)$$

Montrer que f est majorée.

4. Généralisation à un noyau positif intégrable

Soit $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\int_0^{+\infty} h(t) dt$ converge. On suppose que

$$f(x) \leq a + \int_0^x f(t)h(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (6)$$

Montrer que f est majorée.

5. Recherche d'une majoration optimale

On suppose de nouveau que f vérifie (4). On définit sur $\mathbb{R}_+$

$$\varphi(x) = f(x) - ae^{1-e^{-x}}.$$

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\varphi(x) \leq \int_0^x \varphi(t)e^{-t} dt.$$

b) Soient $c \in \mathbb{R}_+$ et $\lambda = \sup_{x \in [0, c]} \varphi(x)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, c]$,

$$\varphi(x) \leq \lambda \frac{(1 - e^{-x})^n}{n!}.$$

Pour $n = 0$, la puissance d'exposant 0 est comprise comme la fonction constante égale à 1, y compris en $x = 0$.

c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) \leq ae^{1-e^{-x}}.$$

d) Soit $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour toute fonction continue f vérifiant (4) et tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq \psi(x)$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\psi(x) \geq ae^{1-e^{-x}}.$$