



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1983

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PARTIE I

1. Posons $D(x) = 1 + x + x^2$. La mise sous forme canonique donne :

$$D(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Les trois fonctions sont donc définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On étudie leurs dérivées, puis leurs limites pour construire les tableaux et le tracé.

Pour f_1 , la dérivation donne :

$$f_1'(x) = -\frac{2x+1}{D(x)^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif. La dérivée est positive pour $x < -1/2$, nulle en $-1/2$, puis négative. De plus $f_1(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$ et $f_1(-1/2) = 4/3$.

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
Signe de f_1'	+	0	—
Variation de f_1	$0 \nearrow$	$4/3$	$\searrow 0$

La courbe a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ aux deux infinis. Elle est symétrique par rapport à la droite $x = -1/2$, puisque $D(-1-x) = D(x)$.

Pour g_1 , la règle de dérivation d'un quotient donne :

$$g_1'(x) = \frac{D(x) - x(2x+1)}{D(x)^2} = \frac{1-x^2}{D(x)^2}.$$

La dérivée est négative pour $x < -1$ et pour $x > 1$, positive pour $-1 < x < 1$, et s'annule en $-1, 1$. On a $g_1(-1) = -1$, $g_1(1) = 1/3$, et $g_1(x) \rightarrow 0$ aux deux infinis, par valeurs

négatives à gauche et positives à droite.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
Signe de g'_1	$-$	$0 \quad +$	$0 \quad -$	$-$
Variation de g_1	$0 \searrow$	$-1 \nearrow$	$1/3$	$\searrow 0$

La courbe de g_1 a elle aussi l'asymptote horizontale $y = 0$ aux deux infinis. Son signe est celui de x .

Pour h_1 , on obtient :

$$h'_1(x) = \frac{2xD(x) - x^2(2x+1)}{D(x)^2} = \frac{x(x+2)}{D(x)^2}.$$

La dérivée est positive sur $] -\infty, -2[$ et $]0, +\infty[$, négative sur $] -2, 0[$, et nulle en $-2, 0$.

On a $h_1(-2) = 4/3$, $h_1(0) = 0$, et $h_1(x) \rightarrow 1$ aux deux infinis.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
Signe de h'_1	$+$	$0 \quad -$	$0 \quad +$	$+$
Variation de h_1	$1 \nearrow$	$4/3 \searrow$	0	$\nearrow 1$

La courbe de h_1 a l'asymptote horizontale $y = 1$ aux deux infinis. Plus précisément :

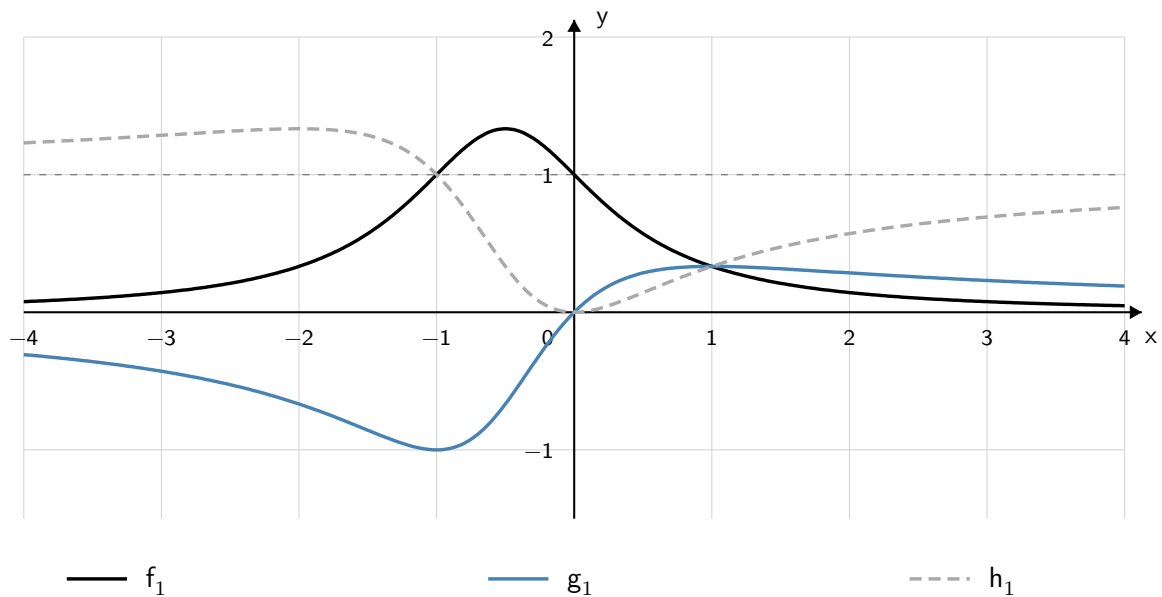
$$h_1(x) - 1 = -\frac{x+1}{D(x)}.$$

Elle est au-dessus de cette asymptote pour $x < -1$, la coupe en $(-1, 1)$ et est en dessous pour $x > -1$.

Pour situer les courbes les unes par rapport aux autres, le dénominateur commun étant positif, les égalités se ramènent aux numérateurs. Les intersections sont :

$$f_1 = g_1 \Leftrightarrow x = 1, \quad f_1 = h_1 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}, \quad g_1 = h_1 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}.$$

Les trois courbes passent donc par $(1, 1/3)$. En outre, f_1 et h_1 se coupent en $(-1, 1)$, tandis que g_1 et h_1 se coupent à l'origine. Voici le tracé dans un même repère orthonormal ; les échelles horizontale et verticale sont identiques. Les portions non représentées se prolongent selon les variations et asymptotes établies.



Une unité correspond à la même longueur sur les deux axes.

2. On calcule les dérivées secondes et on étudie leurs changements de signe. Tous les dénominateurs sont strictement positifs ; les numérateurs déterminent donc la convexité et les points d'inflexion.

Pour f_1 , en dérivant l'expression de f'_1 :

$$f''_1(x) = \frac{-2D(x) + 2(2x + 1)^2}{D(x)^3} = \frac{6x(x + 1)}{D(x)^3}.$$

Le signe est positif sur $] -\infty, -1[$, négatif sur $] -1, 0[$, puis positif sur $] 0, +\infty[$. Il change bien aux deux zéros -1 et 0 . La courbe de f_1 possède exactement deux points d'inflexion :

$(-1, 1)$ avec pente $f'_1(-1) = 1$, $(0, 1)$ avec pente $f'_1(0) = -1$.

Pour g_1 , on a :

$$g''_1(x) = \frac{-2xD(x) - 2(1-x^2)(2x+1)}{D(x)^3} = \frac{2(x^3 - 3x - 1)}{D(x)^3}.$$

Posons $P(x) = x^3 - 3x - 1$. Sa dérivée est $P'(x) = 3(x^2 - 1)$; P est strictement croissante sur $] -\infty, -1]$, strictement décroissante sur $[-1, 1]$, puis strictement croissante sur $[1, +\infty[$. On a :

$$P(-2) = -3, \quad P(-1) = 1, \quad P(0) = -1, \quad P(1) = -3, \quad P(2) = 1.$$

La continuité et la stricte monotonie donnent exactement trois racines : $a \in] -2, -1[$, $b \in] -1, 0[$ et $c \in]1, 2[$. Aucun de ces points n'est un zéro de P' . La fonction P change de signe à chacune des trois racines; dans l'ordre, les signes de g''_1 sont $-$, $+$, $-$, $+$. La courbe de g_1 possède donc exactement trois points d'inflexion.

Pour h_1 , en dérivant h'_1 :

$$h''_1(x) = \frac{(2x+2)D(x) - 2x(x+2)(2x+1)}{D(x)^3} = -\frac{2(x^3 + 3x^2 - 1)}{D(x)^3}.$$

Posons $R(x) = x^3 + 3x^2 - 1$. Sa dérivée $R'(x) = 3x(x+2)$ montre qu'il est strictement croissant sur $] -\infty, -2]$, strictement décroissant sur $[-2, 0]$, puis strictement croissant sur $[0, +\infty[$. Les valeurs :

$$R(-3) = -1, \quad R(-2) = 3, \quad R(-1) = 1, \quad R(0) = -1, \quad R(1) = 3$$

montrent qu'il possède exactement trois racines : $u \in] -3, -2[$, $v \in] -1, 0[$ et $w \in]0, 1[$.

Elles ne sont pas des zéros de R' , et le signe de R change à chacune. Les signes de h_1'' sont donc, dans l'ordre, $+$, $-$, $+$, $-$. La courbe de h_1 possède exactement trois points d'inflexion.

Pour les approximations, une dichotomie sur les intervalles précédents donne les encadrements suivants, dont les changements de signe aux bornes ont été vérifiés :

$$-1,532089 < a < -1,532088, \quad -0,347297 < b < -0,347296, \quad 1,879385 < c < 1,879386,$$

$$-2,879386 < u < -2,879385, \quad -0,652704 < v < -0,652703, \quad 0,532088 < w < 0,532089.$$

On évalue ensuite les fonctions et les dérivées aux abscisses non arrondies :

$g_1(x) = x/D(x)$, $g_1'(x) = (1 - x^2)/D(x)^2$, $h_1(x) = x^2/D(x)$, $h_1'(x) = x(x + 2)/D(x)^2$. Les coordonnées et pentes, arrondies au centième, sont :

Courbe	Abscisse	Ordonnée	Pente de la tangente
f_1	-1,00	1,00	1,00
f_1	0,00	1,00	-1,00
g_1	-1,53	-0,84	-0,41
g_1	-0,35	-0,45	1,47
g_1	1,88	0,29	-0,06
h_1	-2,88	1,29	0,06
h_1	-0,65	0,55	-1,47
h_1	0,53	0,16	0,41

Pour un point d'abscisse r sur une courbe de fonction F , la tangente a l'équation

$y = F(r) + F'(r)(x - r)$. On a ainsi deux points d'inflexion pour f_1 , trois pour g_1 et trois pour h_1 , avec les pentes indiquées.

PARTIE II

Les trois intégrandes sont continues sur le segment $[0, 1]$, puisque $D(t) > 0$. Toutes les intégrales de cette partie existent et sont strictement positives : les intégrandes sont positives sur $]0, 1]$, et f_n l'est également en 0.

1. Pour $x \in [0, 1]$, les nombres $D(x)$ et $1 + x$ sont strictement positifs. Comme $D(x) = 1 + x + x^2 \geq 1 + x$, le passage aux inverses donne :

$$\frac{1}{D(x)} \leq \frac{1}{1+x}.$$

Pour l'autre inégalité, on utilise l'identité exacte $(1-x)(1+x+x^2) = 1-x^3$. Ainsi :

$$\frac{1}{D(x)} - (1-x) = \frac{x^3}{D(x)} \geq 0.$$

On a donc bien $1-x \leq 1/D(x) \leq 1/(1+x)$ sur tout le segment.

2. Les trois termes de l'encadrement de II.1 sont non négatifs. La fonction $s \mapsto s^n$ est croissante sur $[0, +\infty[$ pour chaque entier $n \geq 1$; on peut donc élever les inégalités à la puissance n , puis intégrer par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 (1-t)^n dt \leq I_n \leq \int_0^1 (1+t)^{-n} dt.$$

Pour $n \geq 2$, les primitives donnent :

$$\int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}, \quad \int_0^1 (1+t)^{-n} dt = \frac{1-2^{1-n}}{n-1} \leq \frac{1}{n-1}.$$

Il en résulte l'encadrement demandé. En le multipliant par $n > 0$:

$$\frac{n}{n+1} \leq nI_n \leq \frac{n}{n-1}.$$

Les deux bornes tendent vers 1. Par encadrement, $nI_n \rightarrow 1$, donc $I_n \sim 1/n$.

3. Notons $A_n = \int_0^1 t(1-t)^n dt$ et $B_n = \int_0^1 t(1+t)^{-n} dt$.

Méthode 1 — Changement de variable et développement

Pour calculer A_n , on effectue le changement de variable affine $u = 1 - t$, puis on développe le facteur $1 - u$:

$$A_n = \int_0^1 (1-u)u^n du = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Pour B_n , on pose $u = 1 + t$, d'où $t = u - 1$ et des bornes 1, 2. Pour $n \geq 3$, les nombres $n-1$ et $n-2$ sont non nuls, donc :

$$B_n = \int_1^2 (u^{1-n} - u^{-n}) du = \left[\frac{u^{2-n}}{2-n} - \frac{u^{1-n}}{1-n} \right]_1^2.$$

En regroupant les termes :

$$B_n = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} - \frac{2^{2-n}}{n-2} + \frac{2^{1-n}}{n-1} = \frac{1 - n2^{1-n}}{(n-1)(n-2)}.$$

Ces intégrales encadrent J_n . En effet, on élève l'encadrement de II.1 à la puissance n , on multiplie par $t \geq 0$ et on intègre :

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq J_n \leq \frac{1 - n2^{1-n}}{(n-1)(n-2)}.$$

Par croissance comparée d'une puissance et d'une exponentielle, $n2^{1-n} \rightarrow 0$. Les produits $n^2 A_n$ et $n^2 B_n$ tendent donc tous deux vers 1. L'encadrement donne $n^2 J_n \rightarrow 1$, soit $J_n \sim 1/n^2$.

Méthode 2 — Intégration par parties pour la première intégrale

On calcule également A_n par intégration par parties sur $[0, 1]$. Avec $u(t) = t$ et $v(t) = -(1-t)^{n+1}/(n+1)$, les termes de bord s'annulent et :

$$A_n = \frac{1}{n+1} \int_0^1 (1-t)^{n+1} dt = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Le calcul de B_n reste celui de la première méthode ; l'encadrement obtenu conduit de nouveau à $J_n \sim 1/n^2$. Le changement de variable ramène au calcul de puissances ; l'intégration par parties se réutilise directement pour le facteur t^2 de la question suivante.

4. Rectification de l'énoncé : dans le PDF, la seconde intégrale comporte $(1-t)^n$ au dénominateur. Elle diverge au voisinage de 1 pour les valeurs de n demandées et ne peut pas fournir l'encadrement de K_n . Le dénominateur correct est $(1+t)^n$, comme dans l'inégalité de II.1. C'est cette version qui figure dans le sujet adapté.

En effet, pour $1/2 \leq t < 1$, on a $t^2/(1-t)^n \geq 1/[4(1-t)^n]$, et l'intégrale de cette dernière fonction diverge en 1 pour $n \geq 1$. La correction du signe est donc indispensable pour la question posée.

Posons $C_n = \int_0^1 t^2(1-t)^n dt$ et $D_n = \int_0^1 t^2(1+t)^{-n} dt$.

Méthode 1 — Intégration par parties pour C_n , changement de variable pour D_n

Sur le segment $[0, 1]$, on intègre C_n par parties avec $u(t) = t^2$ et $v(t) = -(1-t)^{n+1}/(n+1)$. Le terme de bord est nul aux deux extrémités, d'où :

$$C_n = \frac{2}{n+1} \int_0^1 t(1-t)^{n+1} dt = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

la dernière égalité utilisant II.3 avec l'indice $n+1$.

Pour D_n , le changement de variable affine $u = 1+t$ donne :

$$D_n = \int_1^2 (u^2 - 2u + 1)u^{-n} du = \left[\frac{u^{3-n}}{3-n} - \frac{2u^{2-n}}{2-n} + \frac{u^{1-n}}{1-n} \right]_1^2.$$

Les trois dénominateurs sont non nuls pour $n \geq 4$. En séparant les valeurs aux bornes :

$$D_n = \frac{1}{n-3} - \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n-1} - 2^{1-n} \left(\frac{4}{n-3} - \frac{4}{n-2} + \frac{1}{n-1} \right).$$

Les deux mises au même dénominateur donnent respectivement les numérateurs 2 et $n^2 - n + 2$. Ainsi :

$$D_n = \frac{2 - (n^2 - n + 2)2^{1-n}}{(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

En élevant l'encadrement de II.1 à la puissance n , puis en multipliant par $t^2 \geq 0$ et en intégrant, on obtient $C_n \leq K_n \leq D_n$. La croissance comparée donne $(n^2 - n + 2)2^{1-n} \rightarrow 0$, d'où :

$$n^3 C_n \rightarrow 2, \quad n^3 D_n \rightarrow 2.$$

Par encadrement, $n^3 K_n \rightarrow 2$; l'équivalent recherché est $K_n \sim 2/n^3$.

Méthode 2 — Développement après un changement de variable pour C_n

On peut remplacer l'intégration par parties par $u = 1 - t$, qui donne :

$$C_n = \int_0^1 (1-u)^2 u^n du = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3}.$$

Au dénominateur commun $(n+1)(n+2)(n+3)$, le numérateur vaut :

$$(n+2)(n+3) - 2(n+1)(n+3) + (n+1)(n+2) = 2.$$

On retrouve donc $C_n = 2/[(n+1)(n+2)(n+3)]$. Le calcul de D_n et l'encadrement précédents restent identiques et conduisent à $K_n \sim 2/n^3$. Cette approche convient aux petits degrés ; l'intégration par parties permet de diminuer progressivement le degré du facteur polynomial.

PARTIE III

1. La forme canonique du dénominateur permet d'utiliser une primitive de type arctangente. Le changement de variable affine $u = (2t+1)/\sqrt{3}$ donne $dt = (\sqrt{3}/2) du$ et $D(t) = 3(1+u^2)/4$. Par conséquent :

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} [\arctan u]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}.$$

Les angles $\pi/6$ et $\pi/3$ appartiennent à $] -\pi/2, \pi/2[$ et ont pour tangentes $1/\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. On en déduit :

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

2. On cherche une identité de dérivation reliant D^{-n} et D^{-n-1} . Pour $n \geq 1$, la fonction $F_n(t) = (2t + 1)D(t)^{-n}$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$. Sa dérivée est :

$$F'_n(t) = 2D(t)^{-n} - n(2t + 1)^2 D(t)^{-n-1}.$$

Comme $(2t + 1)^2 = 4D(t) - 3$, on obtient :

$$F'_n(t) = (2 - 4n)D(t)^{-n} + 3nD(t)^{-n-1}.$$

L'intégration sur $[0, 1]$, avec $F_n(1) = 3/3^n$ et $F_n(0) = 1$, donne :

$$3^{1-n} - 1 = (2 - 4n)I_n + 3nI_{n+1}.$$

Puisque $3n > 0$, on peut isoler I_{n+1} :

$$I_{n+1} = \frac{2(2n - 1)}{3n}I_n + \frac{3^{1-n} - 1}{3n} = \frac{2(2n - 1)}{3n}I_n + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3} \right).$$

En utilisant successivement $n = 1, 2, 3$ et la valeur de I_1 :

$$I_2 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27},$$

$$I_3 = I_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{9} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{27},$$

$$I_4 = \frac{10}{9}I_3 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{10}{81} - \frac{8}{81} + \frac{20\pi\sqrt{3}}{243} = -\frac{2}{9} + \frac{20\pi\sqrt{3}}{243}.$$

Les coefficients rationnels sont sous forme réduite. Les valeurs arrondies au millièmme sont :

Intégrale	Valeur approchée
I_2	0,403
I_3	0,292
I_4	0,226

3. On commence par calculer la combinaison $2J_n + I_n$, dont le numérateur est $D'(t) = 2t + 1$. Pour $n = 1$, une primitive logarithmique donne :

$$2J_1 + I_1 = \int_0^1 \frac{2t+1}{D(t)} dt = [\ln D(t)]_0^1 = \ln 3.$$

Pour $n \geq 2$, la dérivée de $D(t)^{1-n}/(1-n)$ vaut $(2t+1)D(t)^{-n}$, donc :

$$2J_n + I_n = \left[\frac{D(t)^{1-n}}{1-n} \right]_0^1 = \frac{1-3^{1-n}}{n-1}.$$

Ainsi :

$$J_1 = \frac{\ln 3 - I_1}{2}, \quad J_n = \frac{1-3^{1-n}}{2(n-1)} - \frac{1}{2}I_n \quad (n \geq 2).$$

Méthode 1 — Une identité de dérivation pour K_n

Pour tout $n \geq 1$, on dérive la fonction $tD(t)^{1-n}$:

$$(tD(t)^{1-n})' = D(t)^{-n}[D(t) - (n-1)t(2t+1)] = f_n(t) + (2-n)g_n(t) + (3-2n)h_n(t).$$

En intégrant sur $[0, 1]$, les valeurs aux bornes sont 3^{1-n} et 0, d'où :

$$I_n + (2-n)J_n + (3-2n)K_n = 3^{1-n}.$$

Pour un entier $n \geq 1$, $2n-3$ n'est jamais nul. Ainsi :

$$K_n = \frac{I_n + (2-n)J_n - 3^{1-n}}{2n-3}.$$

Pour $n = 1$, cela donne $K_1 = 1 - I_1 - J_1 = 1 - (\ln 3 + I_1)/2$. Pour $n \geq 2$, on remplace J_n par l'expression précédente :

$$I_n + (2-n)J_n = \frac{n}{2}I_n + \frac{(2-n)(1-3^{1-n})}{2(n-1)}.$$

En soustrayant 3^{1-n} , puis en divisant par $2n-3$, on obtient une expression en fonction du seul I_n :

$$K_n = \frac{n}{2(2n-3)}I_n + \frac{2-n-n3^{1-n}}{2(n-1)(2n-3)}, \quad n \geq 2.$$

Méthode 2 — Relation entre intégrales d'indices consécutifs

L'identité $f_1 + g_1 + h_1 = 1$ donne directement $K_1 = 1 - I_1 - J_1$. Pour $n \geq 2$, on multiplie l'intégrande f_n par $D(t)$:

$$f_{n-1}(t) = f_n(t) + g_n(t) + h_n(t), \quad K_n = I_{n-1} - I_n - J_n.$$

La récurrence de III.2 appliquée à l'indice $n - 1$ donne :

$$3(n-1)I_n = 2(2n-3)I_{n-1} + 3^{2-n} - 1.$$

Comme $2n - 3 > 0$ pour $n \geq 2$, on en déduit :

$$I_{n-1} = \frac{3(n-1)I_n + 1 - 3^{2-n}}{2(2n-3)}.$$

En remplaçant cette expression et celle de J_n dans $K_n = I_{n-1} - I_n - J_n$, le coefficient de I_n devient $n/[2(2n-3)]$. Le numérateur de la partie constante, au dénominateur $2(n-1)(2n-3)$, est :

$$(n-1)(1-3^{2-n}) - (2n-3)(1-3^{1-n}) = 2 - n - n3^{1-n}.$$

On retrouve exactement la formule de la première méthode. La première approche calcule directement une combinaison de I_n, J_n, K_n ; la seconde réutilise la récurrence déjà disponible.

En remplaçant les valeurs de I_1, I_2, I_3 , les six intégrales demandées sont :

$$J_1 = \frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{18}, \quad K_1 = 1 - \frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{18},$$

$$J_2 = \frac{1}{3} - \frac{\pi\sqrt{3}}{27}, \quad K_2 = -\frac{1}{3} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{27},$$

$$J_3 = \frac{5}{18} - \frac{\pi\sqrt{3}}{27}, \quad K_3 = -\frac{1}{6} + \frac{\pi\sqrt{3}}{27}.$$

Les valeurs arrondies au millièmme sont :

n	J_n	K_n
1	0,247	0,148
2	0,132	0,070
3	0,076	0,035

PARTIE IV

1. Les fonctions f_n, g_n, h_n sont continues sur $[0, +\infty[$, donc il n'existe aucune difficulté en 0 ni en un point fini. On étudie seulement l'extrémité $+\infty$. Comme $D(t)/t^2 = 1 + 1/t + 1/t^2 \rightarrow 1$, pour chaque entier $n \geq 1$ fixé :

$$f_n(t) \sim t^{-2n}, \quad g_n(t) \sim t^{1-2n}, \quad h_n(t) \sim t^{2-2n} \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Les intégrandes sont non négatives sur $[0, +\infty[$. Le critère par équivalence pour intégrales de fonctions positives s'applique donc. L'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} t^{-p} dt$ converge exactement lorsque $p > 1$. Il en résulte :

- I'_n converge si $2n > 1$, donc pour tout entier $n \geq 1$.

- J'_n converge si $2n - 1 > 1$, donc exactement pour $n \geq 2$.
- K'_n converge si $2n - 2 > 1$, donc exactement pour $n \geq 2$.

Pour $n = 1$, $g_1(t) \sim 1/t$ et $h_1(t) \sim 1$; les deux intégrales correspondantes divergent vers $+\infty$. Dans tous les cas convergents, la convergence est aussi absolue, puisque les fonctions sont non négatives.

2. Tous les calculs suivants sont d'abord effectués sur le segment $[0, R]$, où $R > 0$, puis on passe à la limite grâce aux convergences établies en IV.1.

La primitive utilisée en III.1 donne :

$$\int_0^R \frac{dt}{D(t)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^R.$$

Comme $\arctan((2R+1)/\sqrt{3}) \rightarrow \pi/2$ lorsque $R \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$I'_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Pour les indices suivants, on reprend l'identité de III.2 sur $[0, R]$:

$$\frac{2R+1}{D(R)^n} - 1 = (2-4n) \int_0^R f_n(t) dt + 3n \int_0^R f_{n+1}(t) dt.$$

Pour $n \geq 1$, le terme $(2R+1)/D(R)^n$ tend vers 0, car il est équivalent à $2R^{1-2n}$ et $1-2n < 0$. Les deux intégrales convergent. Le passage à la limite donne donc :

$$I'_{n+1} = \frac{2(2n-1)}{3n} I'_n - \frac{1}{3n}.$$

En particulier :

$$I'_2 = \frac{2}{3}I'_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{4\pi\sqrt{3}}{27},$$

$$I'_3 = I'_2 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + \frac{4\pi\sqrt{3}}{27}.$$

Pour $n \geq 2$, on utilise sur $[0, R]$ la primitive de $(2t + 1)D(t)^{-n}$:

$$2 \int_0^R g_n(t) dt + \int_0^R f_n(t) dt = \frac{D(R)^{1-n} - 1}{1-n}.$$

Comme $1 - n < 0$, $D(R)^{1-n} \rightarrow 0$; les intégrales de gauche convergent d'après IV.1.

Ainsi :

$$2J'_n + I'_n = \frac{1}{n-1}, \quad J'_n = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2}I'_n.$$

Cela donne :

$$J'_2 = \frac{2}{3} - \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}, \quad J'_3 = \frac{1}{2} - \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}.$$

Enfin, pour $n \geq 2$, l'identité d'intégrandes $f_{n-1} = f_n + g_n + h_n$ est intégrée sur $[0, R]$.

Toutes les intégrales correspondantes convergent, y compris celle de f_{n-1} puisque $n - 1 \geq 1$. En passant à la limite :

$$K'_n = I'_{n-1} - I'_n - J'_n = I'_{n-1} - \frac{1}{2}I'_n - \frac{1}{2(n-1)}.$$

Pour $n = 2$:

$$K'_2 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} + \frac{4\pi\sqrt{3}}{27} \right) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} + \frac{4\pi\sqrt{3}}{27}.$$

Pour $n = 3$:

$$K'_3 = \left(-\frac{1}{3} + \frac{4\pi\sqrt{3}}{27} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{4\pi\sqrt{3}}{27} \right) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}.$$

Les résultats exacts sont donc :

$$I'_1 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}; \quad J'_1 \text{ et } K'_1 \text{ divergent vers } +\infty,$$

$$I'_2 = K'_2 = -\frac{1}{3} + \frac{4\pi\sqrt{3}}{27}, \quad J'_2 = \frac{2}{3} - \frac{2\pi\sqrt{3}}{27},$$

$$I'_3 = -\frac{1}{2} + \frac{4\pi\sqrt{3}}{27}, \quad J'_3 = \frac{1}{2} - \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}, \quad K'_3 = -\frac{1}{3} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}.$$

À titre de contrôle, les valeurs numériques sont :

n	I'_n	J'_n	K'_n
1	1,209	Divergente	Divergente
2	0,473	0,264	0,473
3	0,306	0,097	0,070

Ces valeurs ont été contrôlées par intégration numérique indépendante. Les calculs de la partie III ont également été vérifiés numériquement; ces contrôles confirment les formules, sans remplacer les démonstrations.

Relevé des adaptations

- II.4 : remplacement de $(1 - t)^n$ par $(1 + t)^n$ dans le dénominateur de la seconde intégrale. L'intégrale imprimée diverge pour $n \geq 4$; la version rectifiée est celle qui découle de II.1 et permet d'obtenir l'équivalent de K_n .

Aucun résultat n'a été admis pour remplacer une démonstration. Aucun passage ne reste à vérifier.