



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1983

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

HEC - ESCP - emlyon 1983 - Mathématiques I

Corrigé détaillé - Mathématiques approfondies ECG

On note $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Dans la partie I, $a \geq 0$; dans la partie II, a est un réel quelconque. Les suites et fonctions vérifiant les inégalités ne sont pas supposées positives, sauf mention explicite.

Deux coquilles du PDF sont corrigées : la question I.4 porte sur (w_n) , et l'intégrale de II.5.a contient $\varphi(t)$, et non $\varphi(x)$.

Partie I - Suites et majorations

1. Étude de (u_n)

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \frac{1 - e^{-n}}{2}.$$

Alors $c_0 = 0$, $0 \leq c_n < 1/2$, la suite (c_n) est croissante et $c_n \rightarrow 1/2$. La récurrence s'écrit $u_{n+1} = a + c_n u_n$.

a) Majoration par $2a$

Montrons par récurrence la propriété plus précise $0 \leq u_n \leq 2a$.

Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$, donc la propriété est vraie puisque $a \geq 0$. Si $0 \leq u_n \leq 2a$, alors

$$0 \leq u_{n+1} = a + c_n u_n \leq a + \frac{1}{2} \cdot 2a = 2a.$$

Par récurrence,

$$0 \leq u_n \leq 2a \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

b) Croissance

Comme $c_0 = 0$, on a $u_1 = a = u_0$. Supposons $u_{n+1} \geq u_n$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= c_{n+1}u_{n+1} - c_n u_n \\ &= c_{n+1}(u_{n+1} - u_n) + (c_{n+1} - c_n)u_n. \end{aligned}$$

Les deux termes sont positifs ou nuls, car $c_{n+1} \geq 0$, $u_n \geq 0$, $c_{n+1} \geq c_n$ et l'hypothèse de récurrence donne $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Ainsi,

$$(u_n) \text{ est croissante.}$$

Si $a = 0$, elle est constante égale à 0. Si $a > 0$, on a $u_0 = u_1$, puis $u_{n+1} > u_n$ pour $n \geq 1$.

c) Convergence et limite

La suite est croissante et majorée par $2a$. Elle converge donc vers un réel ℓ . La suite décalée (u_{n+1}) a la même limite, et $c_n \rightarrow 1/2$. En passant à la limite dans

$$u_{n+1} = a + c_n u_n,$$

$$\ell = a + \frac{\ell}{2}.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2a.$$

2. Suite vérifiant une inégalité de récurrence

On suppose $v_{n+1} \leq a + c_n v_n$. Aucune condition n'est imposée à v_0 .

a) Comparaison avec (u_n) à partir du rang 1

Au rang 0, le coefficient c_0 est nul, donc

$$v_1 \leq a = u_1,$$

quelle que soit la valeur de v_0 . Si $v_n \leq u_n$ pour un $n \geq 1$, la positivité de c_n permet d'écrire

$$v_{n+1} \leq a + c_n v_n \leq a + c_n u_n = u_{n+1}.$$

Par récurrence,

$$v_n \leq u_n \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Cette conclusion n'est pas nécessairement vraie au rang 0, où v_0 est libre.

b) Majoration

Pour $n \geq 1$, on a $v_n \leq u_n \leq 2a$. En incluant le terme initial,

$$v_n \leq \max(v_0, 2a) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La suite est donc majorée, sans être nécessairement minorée.

c) Contre-exemple à la convergence

Prenons $v_n = -n$. Alors

$$\begin{aligned} a + c_n v_n - v_{n+1} &= a - \frac{n(1 - e^{-n})}{2} + n + 1 \\ &= a + 1 + \frac{n}{2}(1 + e^{-n}) > 0. \end{aligned}$$

La suite satisfait donc bien (2), mais $v_n \rightarrow -\infty$. Elle ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

La relation (2) n'impose pas la convergence de (v_n) .

On peut même donner un contre-exemple borné : $v_n = -1$ pour n pair et $v_n = -2$ pour n impair. Si n est pair, $a + c_n v_n = a - c_n \geq -1/2 > -2 = v_{n+1}$. Si n est impair, $a + c_n v_n = a - 2c_n \geq -1 = v_{n+1}$. Cette suite alterne entre deux valeurs distinctes et ne converge pas.

3. Majorations d'intégrales

a) Majoration de e^{-x}

Posons $H(x) = 1 - x + x^2/2 - e^{-x}$. On a

$$H(0) = 0, \quad H'(x) = -1 + x + e^{-x}, \quad H'(0) = 0,$$

et

$$H''(x) = 1 - e^{-x} \geq 0 \quad (x \geq 0).$$

Ainsi H' est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $H'(x) \geq 0$. La fonction H est donc croissante et $H(x) \geq H(0) = 0$. En particulier,

$$e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

La démonstration établit en fait cette inégalité pour tout $x \geq 0$.

b) Intégrale sur $[0, 1]$

Si $0 \leq x \leq 1$, alors $x^3 \in [0, 1]$. En appliquant l'inégalité précédente à x^3 ,

$$e^{-x^3} \leq 1 - x^3 + \frac{x^6}{2}.$$

Les fonctions sont continues sur $[0, 1]$. En intégrant,

$$\int_0^1 e^{-x^3} dx \leq 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{14} = \frac{23}{28} < \frac{5}{6}.$$

D'où

$$\int_0^1 e^{-x^3} dx \leq \frac{5}{6}.$$

c) Convergence et majoration de la queue

Sur $[0, 1]$, l'intégrande est continu. Pour $x \geq 1$, on a $x^3 \geq x$, donc

$$0 < e^{-x^3} \leq e^{-x}.$$

Comme $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge, le critère de comparaison donne la convergence de l'intégrale demandée. De plus,

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^3} dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{e} < \frac{1}{2},$$

puisque $e > 2$. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^3} dx \text{ converge, } \int_1^{+\infty} e^{-x^3} dx \leq \frac{1}{2}.$$

En réunissant b) et c), on dispose de la majoration utile

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^3} dx \leq \frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}.$$

4. Majoration de (w_n)

Posons

$$b_n = \frac{1}{4} \int_0^n e^{-x^3} dx.$$

La question I.3 donne $0 \leq b_n \leq 1/3$ et $b_0 = 0$. L'inégalité (3) devient $w_{n+1} \leq a + b_n w_n$.

Au rang 0, elle donne $w_1 \leq a \leq 3a/2$. Montrons par récurrence que $w_n \leq 3a/2$ pour $n \geq 1$. Si cette propriété est vraie au rang n , alors, puisque $b_n \geq 0$,

$$w_{n+1} \leq a + b_n w_n \leq a + b_n \frac{3a}{2} \leq a + \frac{1}{3} \frac{3a}{2} = \frac{3a}{2}.$$

La dernière majoration utilise $a \geq 0$. Par récurrence et en incluant le terme initial,

$$w_n \leq \max\left(w_0, \frac{3a}{2}\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Il ne faut pas remplacer directement $b_n w_n$ par $w_n/3$: cette comparaison serait fautive lorsque $w_n < 0$. La preuve compare d'abord w_n à une borne positive ou nulle, puis majore le coefficient.

Partie II - Majorations de fonctions

1. Maximum de f sur un segment variable

Existence de $g(x)$

Pour chaque $x \geq 0$, f est continue sur le segment $[0, x]$. Elle y est bornée et atteint son maximum. Par conséquent,

$$g(x) = \max_{t \in [0, x]} f(t) \in \mathbb{R}.$$

On a notamment $g(0) = f(0)$ et $f(x) \leq g(x)$.

Croissance

Si $0 \leq x \leq y$, alors $[0, x] \subset [0, y]$. Le maximum sur le premier segment ne peut pas dépasser celui sur le second. Donc

$$g \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+.$$

Continuité

Fixons $x_0 \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x_0 , il existe $\delta > 0$ tel que, pour $t \geq 0$ et $|t - x_0| < \delta$,

$$|f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $x_0 \leq y < x_0 + \delta$, chaque nouvelle valeur $f(t)$, pour $t \in [x_0, y]$, vérifie

$$f(t) \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leq g(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme g est croissante, il en résulte

$$0 \leq g(y) - g(x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $0 \leq y < x_0$ et $x_0 - y < \delta$, alors, pour tout $t \in [y, x_0]$,

$$f(t) \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad f(y) \geq f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi $f(t) \leq f(y) + \varepsilon \leq g(y) + \varepsilon$. Les valeurs sur $[0, y]$ sont également inférieures ou égales à $g(y)$. On obtient donc

$$0 \leq g(x_0) - g(y) \leq \varepsilon.$$

Ces deux estimations prouvent la continuité en x_0 . En $x_0 = 0$, seule la première est nécessaire.

g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Première inégalité intégrale

On suppose $f(x) \leq a + \int_0^x f(t)e^{-t} dt$. Ici, a peut être négatif.

a) Cas où f est croissante

Pour $x \geq k$, on sépare l'intégrale en $[0, k]$ et $[k, x]$. Comme f est croissante, $f(t) \leq f(x)$ pour $k \leq t \leq x$. Le poids e^{-t} étant positif,

$$\int_k^x f(t)e^{-t} dt \leq f(x) \int_k^x e^{-t} dt = (e^{-k} - e^{-x})f(x).$$

Cette inégalité reste vraie lorsque $f(x) < 0$. On en déduit

$$f(x) \leq a + \int_0^k f(t)e^{-t} dt + (e^{-k} - e^{-x})f(x).$$

Choisissons $k = 1$ et posons $B = a + \int_0^1 f(t)e^{-t} dt$, qui est un réel fini. Pour $x \geq 1$,

$$(1 - e^{-1} + e^{-x})f(x) \leq B.$$

Le coefficient est au moins $1 - e^{-1} > 0$. Si $B \geq 0$, on obtient $f(x) \leq B/(1 - e^{-1})$. Si $B < 0$, on obtient simplement $f(x) < 0$. Dans les deux cas,

$$f(x) \leq \frac{\max(B, 0)}{1 - e^{-1}} \quad (x \geq 1).$$

Sur $[0, 1]$, la continuité donne un maximum fini M_0 . Donc

$$f(x) \leq \max\left(M_0, \frac{\max(B, 0)}{1 - e^{-1}}\right) \quad (x \geq 0).$$

Le signe de B doit être pris en compte : pour $B < 0$, majorer le quotient en remplaçant son dénominateur par une borne inférieure ne serait pas correct.

b) Cas où $f \geq 0$

La fonction g de II.1 est alors continue, croissante et positive ou nulle. Pour $0 \leq y \leq x$, on a

$$f(y) \leq a + \int_0^y f(t)e^{-t} dt \leq a + \int_0^y g(t)e^{-t} dt \leq a + \int_0^x g(t)e^{-t} dt.$$

La dernière comparaison utilise $g(t) \geq 0$. En prenant le maximum sur $y \in [0, x]$,

$$g(x) \leq a + \int_0^x g(t)e^{-t} dt.$$

La fonction g satisfait donc (4) et est croissante. La question II.2.a montre qu'elle est majorée. Comme $f(x) \leq g(x)$, f est majorée également.

Au passage, la relation en $x = 0$ donne $0 \leq f(0) \leq a$: l'existence d'une telle fonction non négative impose ici $a \geq 0$.

c) Cas général

Définissons les parties positives

$$F(x) = \max(f(x), 0), \quad A = \max(a, 0).$$

La fonction F est continue, positive ou nulle, et $f \leq F$. Comme $e^{-t} \geq 0$,

$$f(x) \leq a + \int_0^x f(t)e^{-t} dt \leq A + \int_0^x F(t)e^{-t} dt.$$

Le dernier membre est positif ou nul. Il majore donc à la fois $f(x)$ et 0, donc leur maximum :

$$F(x) \leq A + \int_0^x F(t)e^{-t} dt.$$

On applique II.2.b à F avec le paramètre $A \geq 0$. La fonction F est majorée ; comme $f \leq F$, on conclut

f est majorée, sans hypothèse sur son signe ni sur celui de a .

3. Noyau e^{-t^3}

On suppose $f(x) \leq a + \int_0^x f(t)e^{-t^3} dt$. Définissons de nouveau $F = \max(f, 0)$ et $A = \max(a, 0)$. Le même raisonnement que dans II.2.c donne

$$F(x) \leq A + \int_0^x F(t)e^{-t^3} dt.$$

Posons $G(x) = \max_{0 \leq t \leq x} F(t)$. Par II.1, G est continue et croissante ; de plus, $G \geq 0$ et $F \leq G$.

Pour $0 \leq y \leq x$, la positivité de G et du noyau donne

$$F(y) \leq A + \int_0^y F(t)e^{-t^3} dt \leq A + \int_0^x G(t)e^{-t^3} dt.$$

En prenant le maximum sur $y \in [0, x]$,

$$G(x) \leq A + \int_0^x G(t)e^{-t^3} dt.$$

Posons

$$C = A + \int_0^1 G(t)e^{-t^3} dt \geq 0.$$

Cette constante est finie par continuité. Pour $x \geq 1$, on utilise $G(t) \leq G(x)$ et la majoration de I.3.c :

$$\begin{aligned} G(x) &\leq C + \int_1^x G(t)e^{-t^3} dt \\ &\leq C + G(x) \int_1^x e^{-t^3} dt \\ &\leq C + \frac{1}{2}G(x). \end{aligned}$$

La dernière comparaison utilise $G(x) \geq 0$. On obtient $G(x) \leq 2C$ pour $x \geq 1$. Pour $0 \leq x \leq 1$, la croissance donne $G(x) \leq G(1)$ et l'inégalité intégrale en 1 donne $G(1) \leq C$. Ainsi,

$$\boxed{f(x) \leq F(x) \leq G(x) \leq 2C \quad (x \geq 0).}$$

La fonction f est donc majorée. Il ne suffirait pas d'utiliser la seule borne

$\int_0^{+\infty} e^{-t^3} dt \leq 4/3$, supérieure à 1 : on utilise une coupure donnant une queue de masse au plus 1/2.

4. Noyau positif intégrable quelconque

On suppose $h \geq 0$ continue, $\int_0^{+\infty} h(t) dt$ convergente, et

$$f(x) \leq a + \int_0^x f(t)h(t) dt.$$

Comme précédemment, $F = \max(f, 0)$ et $A = \max(a, 0)$ vérifient

$$F(x) \leq A + \int_0^x F(t)h(t) dt.$$

Pour $G(x) = \max_{0 \leq t \leq x} F(t)$, le raisonnement de II.3, utilisant $G \geq 0$ et $h \geq 0$, donne

$$G(x) \leq A + \int_0^x G(t)h(t) dt.$$

Puisque l'intégrale de h converge, sa queue tend vers 0. On peut choisir $c > 0$ tel que

$$\int_c^{+\infty} h(t) dt \leq \frac{1}{2}.$$

Posons $C = A + \int_0^c G(t)h(t) dt$. Cette constante est finie et positive ou nulle. Pour $x \geq c$,

$$\begin{aligned} G(x) &\leq C + \int_c^x G(t)h(t) dt \\ &\leq C + G(x) \int_c^x h(t) dt \\ &\leq C + \frac{1}{2}G(x). \end{aligned}$$

On en déduit $G(x) \leq 2C$. Pour $x \leq c$, on a $G(x) \leq G(c) \leq C$, d'après la croissance et l'inégalité intégrale en c . Ainsi,

$f(x) \leq G(x) \leq 2C \quad \text{pour tout } x \geq 0.$
--

La fonction f est majorée. La démonstration ne requiert pas que l'intégrale totale de h soit inférieure à 1, seulement que sa queue puisse être rendue assez petite.

5. Majoration optimale pour le noyau e^{-t}

On suppose de nouveau que f vérifie (4). Posons

$$q(x) = ae^{1-e^{-x}}, \quad \varphi(x) = f(x) - q(x).$$

Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}_+$. Le paramètre a reste un réel quelconque.

a) Inégalité satisfaite par φ

La fonction q est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$q'(x) = ae^{1-e^{-x}}e^{-x} = q(x)e^{-x}, \quad q(0) = a.$$

En intégrant la dérivée,

$$q(x) = a + \int_0^x q(t)e^{-t} dt.$$

En soustrayant cette égalité de l'inégalité (4),

$$f(x) - q(x) \leq \int_0^x (f(t) - q(t))e^{-t} dt,$$

donc

$$\varphi(x) \leq \int_0^x \varphi(t)e^{-t} dt.$$

Cette démonstration est valable aussi si $a < 0$.

b) Majoration itérée

Fixons $c \geq 0$. Par continuité sur le segment $[0, c]$,

$$\lambda = \max_{x \in [0, c]} \varphi(x)$$

est un réel fini. On ne suppose pas $\lambda \geq 0$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, c]$,

$$\varphi(x) \leq \lambda \frac{(1 - e^{-x})^n}{n!}.$$

Initialisation. Pour $n = 0$, le membre de droite vaut λ , donc l'inégalité est vraie par définition de λ . La puissance d'exposant 0 est comprise comme la fonction constante égale à 1.

Hérédité. Supposons la majoration vraie à l'ordre n . Pour $x \in [0, c]$, l'intervalle $[0, x]$ est inclus dans $[0, c]$. Le poids e^{-t} étant positif,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\leq \int_0^x \varphi(t) e^{-t} dt \\ &\leq \frac{\lambda}{n!} \int_0^x (1 - e^{-t})^n e^{-t} dt. \end{aligned}$$

La deuxième inégalité résulte de l'intégration de la majoration de $\varphi(t)$; elle reste valable si $\lambda < 0$.

Comme la dérivée de $(1 - e^{-t})^{n+1}$ est $(n+1)(1 - e^{-t})^n e^{-t}$,

$$\int_0^x (1 - e^{-t})^n e^{-t} dt = \frac{(1 - e^{-x})^{n+1}}{n+1}.$$

Ainsi,

$$\varphi(x) \leq \lambda \frac{(1 - e^{-x})^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Par récurrence,

$$\boxed{\varphi(x) \leq \lambda \frac{(1 - e^{-x})^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq c).}$$

c) Passage à la limite et majoration de f

Fixons $x \geq 0$ et choisissons $c \geq x$. Pour ce x fixé, on a $0 \leq 1 - e^{-x} < 1$, donc

$$\left| \lambda \frac{(1 - e^{-x})^n}{n!} \right| \leq \frac{|\lambda|}{n!} \rightarrow 0.$$

La quantité $\varphi(x)$ est majorée par chacun des membres de droite de II.5.b. En passant à la limite dans ces majorations, on obtient $\varphi(x) \leq 0$, soit

$$\boxed{f(x) \leq ae^{1-e^{-x}} \quad \text{pour tout } x \geq 0.}$$

On retrouve une majoration globale : puisque $1 \leq e^{1-e^{-x}} < e$,

$$\boxed{f(x) \leq \begin{cases} ae, & a \geq 0, \\ a, & a < 0. \end{cases}}$$

Le cas $a < 0$ impose de tenir compte du sens des inégalités lors de la multiplication par a .

d) Optimalité

La fonction $q(x) = ae^{1-e^{-x}}$ est continue et vérifie exactement

$$q(x) = a + \int_0^x q(t)e^{-t} dt.$$

Elle fait donc partie des fonctions auxquelles s'applique l'hypothèse sur ψ . En prenant $f = q$, on obtient, pour tout $x \geq 0$,

$$\boxed{\psi(x) \geq q(x) = ae^{1-e^{-x}}.}$$

La fonction q est donc la plus petite majoration valable point par point pour toutes les fonctions continues satisfaisant (4). L'égalité est effectivement réalisable par $f = q$.

Résultats essentiels

Objet	Résultat
Suite (u_n)	Croissante, $0 \leq u_n \leq 2a$, et $u_n \rightarrow 2a$
Suite (v_n)	$v_n \leq u_n$ pour $n \geq 1$; majorée, mais pas nécessairement convergente
Intégrale sur $[0, 1]$	$\int_0^1 e^{-x^3} dx \leq 5/6$
Queue d'intégrale	$\int_1^{+\infty} e^{-x^3} dx \leq 1/2$
Suite (w_n)	$w_n \leq \max(w_0, 3a/2)$
Maximum sur un segment	$g(x) = \max_{0 \leq t \leq x} f(t)$ est continu et croissant
Noyau positif intégrable	L'inégalité (6) implique que f est majorée
Majoration optimale pour (4)	$f(x) \leq ae^{1-e^{-x}}$

Objet	Résultat
Fonction réalisant l'égalité	$q(x) = ae^{1-e^{-x}}$

Points de vigilance

- L'hypothèse $a \geq 0$ ne concerne que la partie I.
- La comparaison $v_n \leq u_n$ débute au rang 1, car v_0 est libre.
- Une suite majorée n'est pas nécessairement convergente.
- Majorer un coefficient positif ne permet pas de majorer son produit par une quantité négative dans le même sens.
- Pour une fonction de signe quelconque, utiliser sa partie positive avant d'allonger une intégrale à noyau positif.
- Le maximum sur un segment variable est continu, mais n'est pas nécessairement dérivable.
- Pour un noyau intégrable, couper l'intégrale de façon à rendre la masse de la queue inférieure à 1.
- Dans II.5.b, le nombre λ peut être négatif ; la récurrence reste valable.
- Pour démontrer l'optimalité, exhiber une fonction qui satisfait l'inégalité avec égalité.