



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1979

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

PARTIE I

1. Calculer les inverses des matrices réelles :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. On note tM la transposée d'une matrice M . Montrer qu'il existe une matrice J telle que ${}^tJ = J$ et que, pour tous les réels x, y, z :

$$x^2 + y^2 - z^2 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3. On note G l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre trois M telles que ${}^tMJM = J$. Montrer que G contient la matrice identité, que le produit de deux matrices de G appartient à G , et que toute matrice $M \in G$ est inversible avec $M^{-1} \in G$.

4. Montrer que A, B, C appartiennent à G .

PARTIE II

1. Montrer que, si x, y, z sont trois entiers relatifs, les nombres :

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2(x+z)(y+z) \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - z^2 + 2(x-z)(y-z)$$

sont des carrés d'entiers naturels.

2. Montrer que les relations :

$$z_1 - x_1 = y + z, \quad z_1 - y_1 = x + z, \quad x_1 + y_1 - z_1 = x + y + z$$

sont équivalentes à une relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

où H est une matrice constante que l'on déterminera.

3. On appelle triplet rectangulaire tout triplet (x, y, z) d'entiers naturels sans diviseur commun autre que 1 et tel que $x^2 + y^2 = z^2$. Soit (x, y, z) un triplet rectangulaire tel que $z > 1$. Posant :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

montrer que l'un des triplets (x', y', z') , $(-x', y', z')$ ou $(x', -y', z')$ est rectangulaire et que $1 \leq z' \leq z - 1$.

4. Imaginer un algorithme transformant, en un nombre fini d'étapes, par des produits matriciels comme ci-dessus, un triplet rectangulaire quelconque en $(0, 1, 1)$.

- Donner dix triplets rectangulaires distincts.

PARTIE III

- Soit E l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+3} - 7a_{n+2} + 7a_{n+1} - a_n = 0.$$

Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 3, dont on déterminera une base formée de suites de la forme $n \mapsto r^n$.

- Déterminer (a_n) sachant que $a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0$. Calculer alors a_3 et a_4 .
- Déterminer (a_n) sachant que $a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1$.
- Déterminer (a_n) sachant que $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0$.

PARTIE IV

On considère toujours la matrice A définie dans la première partie. On note I la matrice identité d'ordre trois.

- Montrer que A^3 est combinaison linéaire de I, A, A^2 .
- Montrer qu'il existe trois suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = u_n I + v_n A + w_n A^2,$$

et que ces suites appartiennent à l'espace E défini à la question III.1.

3. En déduire une méthode de calcul de A^n .
4. Déterminer une injection $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^3$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ soit un triplet rectangulaire.