



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1979

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PARTIE I

1. On commence par résoudre le système $A(p, q, r) = (X, Y, Z)$, ce qui établira l'inversibilité de A sans utiliser de déterminant. Les équations sont :

$$2p + q + 2r = X, \quad p + 2q + 2r = Y, \quad 2p + 2q + 3r = Z.$$

La troisième équation moins la première donne $q + r = Z - X$; la troisième moins la deuxième donne $p + r = Z - Y$. Ainsi $p = Z - Y - r$ et $q = Z - X - r$. En remplaçant dans la troisième équation :

$$2(Z - Y - r) + 2(Z - X - r) + 3r = Z,$$

soit $r = 3Z - 2X - 2Y$. On en déduit :

$$p = 2X + Y - 2Z, \quad q = X + 2Y - 2Z, \quad r = -2X - 2Y + 3Z.$$

Ces expressions satisfont les trois équations pour tous les réels X, Y, Z et constituent leur unique solution. Par conséquent A est inversible et :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Posons $S_y = \text{diag}(1, -1, 1)$ et $S_x = \text{diag}(-1, 1, 1)$. Leurs carrés sont I , donc ces matrices sont inversibles et sont leurs propres inverses. On a $B = AS_y$ et $C = AS_x$, car multiplier à droite par ces matrices change le signe de la colonne correspondante. L'inverse d'un produit de matrices inversibles donne :

$$B^{-1} = S_y A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C^{-1} = S_x A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les trois matrices et leurs inverses ont des coefficients entiers, propriété importante pour les triplets de la partie II.

2. La matrice diagonale :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est symétrique, puisque ${}^t J = J$. Pour $X = (x, y, z)$ écrit en colonne, on a $JX = (x, y, -z)$, donc :

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - z^2.$$

Cette matrice répond à la question. On remarque aussi que $J^2 = I$, donc $J^{-1} = J$.

3. Question adaptée au programme actuel. La demande initiale de structure de groupe est remplacée par la vérification explicite de la présence de l'identité, de la stabilité par produit et de la stabilité par passage à l'inverse. Ces propriétés se démontrent avec les opérations matricielles du programme.

L'identité appartient à G car ${}^t I J I = J$.

Si $M, N \in G$, alors la transposée d'un produit et l'associativité donnent :

$${}^t(MN)J(MN) = {}^t N ({}^t M J M) N = {}^t N J N = J.$$

Le produit MN appartient donc à G .

Soit maintenant $M \in G$. De ${}^t M J M = J$ et $J^2 = I$, on déduit :

$$(J {}^t M J) M = I.$$

Posons $L = J {}^t M J$. Si $MX = 0$, alors $X = LMX = 0$; l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ associée à M est donc injective. En dimension finie, pour un endomorphisme, l'injectivité implique la bijectivité par le théorème du rang. La matrice M est ainsi inversible et $M^{-1} = L$.

On multiplie maintenant ${}^t M J M = J$ à gauche par ${}^t(M^{-1})$ et à droite par M^{-1} . Comme ${}^t(M^{-1}) {}^t M = {}^t(M M^{-1}) = I$, il vient :

$$J = {}^t(M^{-1}) J M^{-1}.$$

Donc $M^{-1} \in G$. Les trois propriétés demandées sont établies, avec la formule explicite $M^{-1} = J {}^t M J$ pour toute matrice $M \in G$.

4. On calcule les produits scalaires définis par J entre les colonnes de A . Elles sont $a_1 = (2, 1, 2)$, $a_2 = (1, 2, 2)$ et $a_3 = (2, 2, 3)$, écrites en colonnes. Les valeurs diagonales sont :

$${}^t a_1 J a_1 = 4 + 1 - 4 = 1, \quad {}^t a_2 J a_2 = 1 + 4 - 4 = 1, \quad {}^t a_3 J a_3 = 4 + 4 - 9 = -1.$$

Les valeurs hors diagonale sont :

$${}^t a_1 J a_2 = 2 + 2 - 4 = 0, \quad {}^t a_1 J a_3 = 4 + 2 - 6 = 0, \quad {}^t a_2 J a_3 = 2 + 4 - 6 = 0.$$

La symétrie de J donne les valeurs symétriques restantes. Ainsi ${}^t A J A = J$, donc $A \in G$.

Pour les deux matrices diagonales introduites en I.1, on vérifie ${}^t S_y J S_y = J$ et ${}^t S_x J S_x = J$: chaque changement de signe est effectué deux fois, et les trois coefficients diagonaux de J sont conservés. Ainsi $S_y, S_x \in G$. Par stabilité par produit, $B = A S_y$ et $C = A S_x$ appartiennent également à G .

En particulier, toute transformation par A, B, C ou leurs inverses conserve la quantité $x^2 + y^2 - z^2$: pour $M \in G$, on a ${}^t (M X) J (M X) = {}^t X J X$.

PARTIE II

1. On développe les deux expressions afin de reconnaître des carrés :

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2(x + z)(y + z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = (x + y + z)^2,$$

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2(x - z)(y - z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz = (x + y - z)^2.$$

Si $x, y, z \in \mathbb{Z}$, alors $|x + y + z|$ et $|x + y - z|$ sont des entiers naturels. Les deux nombres sont donc bien des carrés d'entiers naturels, même si les entiers entre parenthèses sont négatifs.

2. On résout les trois relations en x_1, y_1, z_1 . Les deux premières donnent :

$$x_1 = z_1 - y - z, \quad y_1 = z_1 - x - z.$$

En remplaçant dans la troisième :

$$(z_1 - y - z) + (z_1 - x - z) - z_1 = x + y + z,$$

d'où $z_1 = 2x + 2y + 3z$. Les deux premières relations donnent ensuite $x_1 = 2x + y + 2z$ et $y_1 = x + 2y + 2z$. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, ces expressions donnent directement $z_1 - x_1 = y + z$, $z_1 - y_1 = x + z$ et $x_1 + y_1 - z_1 = x + y + z$. L'équivalence est donc démontrée, avec $H = A$.

3. Les formules de I.1 donnent :

$$x' = 2x + y - 2z, \quad y' = x + 2y - 2z, \quad z' = 3z - 2x - 2y.$$

Ces nombres sont entiers. Comme $A^{-1} \in G$, ils vérifient $x'^2 + y'^2 = z'^2$. Il reste à contrôler z' , les signes des deux premières coordonnées et l'absence de diviseur

commun.

Puisque $z > 1$, on a $x > 0$ et $y > 0$. En effet, si $x = 0$, l'égalité imposerait $y = z$, et la primitivité donnerait $z = 1$; le même argument vaut si $y = 0$. On a donc $x + y > z$, car :

$$(x + y)^2 = z^2 + 2xy > z^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$, $x + y \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}z$. On en déduit :

$$z' = 3z - 2(x + y) \geq (3 - 2\sqrt{2})z > 0,$$

car $3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 > 0$. D'autre part, $x + y > z$ donne $z' < z$. Comme z' et z sont entiers, on obtient bien $1 \leq z' \leq z - 1$.

On montre ensuite que x' et y' ne peuvent pas être tous deux négatifs ou nuls. Leur somme avec z' est :

$$x' + y' + z' = x + y - z > 0.$$

Si $x' \leq 0$ et $y' \leq 0$, alors, puisque $z' > 0$ et $x'^2 + y'^2 = z'^2$, on aurait :

$$z' = \sqrt{x'^2 + y'^2} \leq |x'| + |y'| = -x' - y',$$

d'où $x' + y' + z' \leq 0$, contradiction. Ainsi au moins une des deux coordonnées est strictement positive. S'il y a une coordonnée négative, elle est unique; il suffit de changer son signe. L'un des trois triplets proposés possède donc des coordonnées naturelles et vérifie la relation de Pythagore.

Enfin, si un entier $d \geq 1$ divise x', y', z' , alors il divise les coordonnées de $A(x', y', z')$, donc x, y, z , puisque A a des coefficients entiers. La primitivité du triplet initial impose

$d = 1$. Changer le signe d'une coordonnée ne modifie pas ses diviseurs. Le triplet rendu non négatif est donc rectangulaire au sens du sujet.

4. On applique la descente de II.3 tant que la troisième coordonnée est supérieure à 1.

À partir d'un triplet (x, y, z) avec $z > 1$, on calcule $(x', y', z') = A^{-1}(x, y, z)$. Si $x' < 0$, on utilise le triplet $(-x', y', z')$; si $y' < 0$, on utilise $(x', -y', z')$; sinon on conserve (x', y', z') . Les deux cas négatifs ne peuvent pas se produire simultanément d'après II.3.

Chaque étape est un produit par l'une des trois matrices de I.1 :

$$A^{-1}, \quad C^{-1} = S_x A^{-1}, \quad B^{-1} = S_y A^{-1}.$$

Le nouveau triplet est rectangulaire et sa troisième coordonnée est un entier compris entre 1 et $z - 1$. La descente ne peut donc comporter plus de $z_{\text{initial}} - 1$ étapes. Elle aboutit à un triplet naturel satisfaisant $x^2 + y^2 = 1$, donc à $(0, 1, 1)$ ou $(1, 0, 1)$.

Si le triplet final est $(1, 0, 1)$, on effectue encore un produit par B^{-1} :

$$B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi tout triplet rectangulaire, y compris les deux triplets de troisième coordonnée 1, se transforme en $(0, 1, 1)$ en un nombre fini d'étapes par les produits matriciels demandés.

Voici une réalisation Python de cet algorithme. L'entrée est supposée être un triplet rectangulaire; la fonction renvoie la liste des triplets successifs. Les valeurs absolues effectuent exactement les corrections de signe justifiées ci-dessus.

Python

```
def reduction(x, y, z):
    trajectoire = [(x, y, z)]
    while z > 1:
        a = 2*x + y - 2*z
        b = x + 2*y - 2*z
        c = -2*x - 2*y + 3*z
        x, y, z = abs(a), abs(b), c
        trajectoire.append((x, y, z))
    if x == 1:
        a = 2*x + y - 2*z
        b = -x - 2*y + 2*z
        c = -2*x - 2*y + 3*z
        x, y, z = a, b, c
        trajectoire.append((x, y, z))
    return trajectoire
```

Les trois coordonnées intermédiaires sont calculées avant de modifier x, y, z , afin que chaque produit utilise le même triplet de départ. Le dernier bloc correspond au produit par B^{-1} , et non à une nouvelle étape de descente stricte. Aucun import n'est nécessaire.

Ce code a été exécuté sur les deux triplets de troisième coordonnée 1, sur les dix triplets de II.5 et sur tous les triplets rectangulaires de troisième coordonnée au plus 200.

Chaque trajectoire se termine en $(0, 1, 1)$; ses triplets sont naturels, primitifs et vérifient Pythagore. La troisième coordonnée diminue strictement dans la boucle. Ces tests contrôlent l'implémentation; la preuve de terminaison est celle donnée ci-dessus.

5. On produit des exemples à partir du triplet rectangulaire $(0, 1, 1)$ en utilisant A, B, C . D'après I.4, ces matrices conservent la relation de Pythagore. Elles conservent aussi la primitivité : si un entier divise les trois coordonnées du triplet obtenu, il divise celles du triplet de départ en appliquant l'inverse, dont les coefficients sont entiers. Il suffit donc de vérifier la non-négativité des coordonnées calculées.

Les produits suivants fournissent dix triplets distincts :

Triplet de départ	Matrice appliquée	Triplet obtenu
$(0, 1, 1)$	A	$(3, 4, 5)$
$(3, 4, 5)$	A	$(20, 21, 29)$
$(3, 4, 5)$	B	$(12, 5, 13)$
$(3, 4, 5)$	C	$(8, 15, 17)$
$(12, 5, 13)$	A	$(55, 48, 73)$
$(12, 5, 13)$	B	$(45, 28, 53)$
$(12, 5, 13)$	C	$(7, 24, 25)$
$(8, 15, 17)$	A	$(65, 72, 97)$
$(8, 15, 17)$	B	$(35, 12, 37)$
$(8, 15, 17)$	C	$(33, 56, 65)$

Les dix troisièmes coordonnées sont différentes. Tous les triplets affichés sont donc distincts et, par les arguments précédents, rectangulaires.

PARTIE III

1. On ne suppose aucun théorème général de résolution des récurrences d'ordre trois.

On établit d'abord la dimension par les valeurs initiales, puis on construit trois suites géométriques indépendantes.

L'ensemble de toutes les suites réelles est un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un réel terme à terme. La suite nulle satisfait la relation. Si $a, b \in E$ et $s, t \in \mathbb{R}$, la suite $c_n = sa_n + tb_n$ vérifie :

$$\begin{aligned}
 c_{n+3} - 7c_{n+2} + 7c_{n+1} - c_n &= s(a_{n+3} - 7a_{n+2} + 7a_{n+1} - a_n) \\
 &+ t(b_{n+3} - 7b_{n+2} + 7b_{n+1} - b_n) = 0.
 \end{aligned}$$

Donc E est un sous-espace vectoriel. L'application linéaire $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^3$, définie par $\Phi(a) = (a_0, a_1, a_2)$, est bijective. En effet, toute donnée de trois valeurs initiales définit une unique suite en posant successivement :

$$a_{n+3} = 7a_{n+2} - 7a_{n+1} + a_n.$$

Cela prouve la surjectivité de Φ ; si les trois valeurs initiales sont nulles, la récurrence impose tous les termes nuls, ce qui prouve son injectivité. Ainsi E est isomorphe à $\mathbb{R}^3$ et $\dim E = 3$.

Une suite $a_n = r^n$ avec $r \neq 0$ appartient à E si $r^3 - 7r^2 + 7r - 1 = 0$. On factorise ce polynôme réel directement :

$$r^3 - 7r^2 + 7r - 1 = (r - 1)(r^2 - 6r + 1).$$

Ses trois racines réelles sont $1, \alpha = 3 + 2\sqrt{2}$ et $\beta = 3 - 2\sqrt{2}$. Elles sont distinctes et non nulles ; $\alpha\beta = 1$ et $\alpha + \beta = 6$. Les trois suites $1, \alpha^n$ et β^n appartiennent donc à E .

Pour démontrer leur indépendance sans déterminant, supposons $c + d\alpha^n + e\beta^n = 0$ pour tout n . Les indices $0, 1, 2$ donnent, par soustraction de l'équation d'indice 0 :

$$d(\alpha - 1) + e(\beta - 1) = 0, \quad d(\alpha^2 - 1) + e(\beta^2 - 1) = 0.$$

On soustrait à la seconde égalité la première multipliée par $\beta + 1$. Il vient $d(\alpha - 1)(\alpha - \beta) = 0$. Les deux facteurs entre parenthèses étant non nuls, $d = 0$. La première égalité donne alors $e = 0$, puisque $\beta \neq 1$, puis l'indice 0 donne $c = 0$. Les trois suites sont libres. Comme $\dim E = 3$, elles forment une base de E .

Toute suite de E s'écrit donc de manière unique $a_n = c + d\alpha^n + e\beta^n$. Pour préparer les questions suivantes, posons $\delta = \alpha - \beta = 4\sqrt{2} > 0$. Puisque $\alpha^2 - 6\alpha + 1 = \beta^2 - 6\beta + 1 = 0$, les valeurs initiales donnent :

$$a_2 - 6a_1 + a_0 = -4c, \quad c = \frac{6a_1 - a_0 - a_2}{4}.$$

Les deux équations restantes sont $d + e = a_0 - c$ et $\alpha d + \beta e = a_1 - c$. On les résout sans division par zéro, puisque $\delta > 0$:

$$d = \frac{a_1 - c - \beta(a_0 - c)}{\delta}, \quad e = \frac{\alpha(a_0 - c) - (a_1 - c)}{\delta}.$$

2. Pour $a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0$, la formule de III.1 donne $c = -1/4$. Les deux autres coefficients vérifient $d + e = 5/4$ et $\alpha d + \beta e = 1/4$, donc :

$$d = \frac{1 - 5\beta}{4\delta}, \quad e = \frac{5\alpha - 1}{4\delta}.$$

La suite cherchée est ainsi :

$$a_n = -\frac{1}{4} + \frac{1 - 5\beta}{4\delta}\alpha^n + \frac{5\alpha - 1}{4\delta}\beta^n, \quad n \geq 0.$$

Elle satisfait les valeurs initiales et la récurrence puisque c'est une combinaison des trois suites de la base. L'unicité prouvée en III.1 garantit que c'est la suite demandée. Pour les deux termes suivants, le calcul par la récurrence est plus direct :

$$a_3 = 7a_2 - 7a_1 + a_0 = 1, \quad a_4 = 7a_3 - 7a_2 + a_1 = 7.$$

3. Pour $a_0 = a_1 = 0$ et $a_2 = 1$, on obtient $c = -1/4$. Les équations sont $d + e = 1/4$ et $\alpha d + \beta e = 1/4$. Leur résolution donne :

$$d = \frac{1 - \beta}{4\delta}, \quad e = \frac{\alpha - 1}{4\delta}.$$

La suite demandée est donc :

$$a_n = -\frac{1}{4} + \frac{1-\beta}{4\delta}\alpha^n + \frac{\alpha-1}{4\delta}\beta^n, \quad n \geq 0.$$

Cette combinaison appartient à E et a les trois valeurs initiales imposées ; elle est unique par III.1.

4. Pour $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0$, la formule générale donne $c = 3/2$. On a donc $d + e = -3/2$ et $\alpha d + \beta e = -1/2$, puis :

$$d = \frac{3\beta - 1}{2\delta}, \quad e = \frac{1 - 3\alpha}{2\delta}.$$

La suite cherchée est :

$$a_n = \frac{3}{2} + \frac{3\beta - 1}{2\delta}\alpha^n + \frac{1 - 3\alpha}{2\delta}\beta^n, \quad n \geq 0.$$

Comme aux questions précédentes, l'appartenance à E et la vérification des trois valeurs initiales établissent que cette expression est l'unique solution.

PARTIE IV

1. On calcule directement les puissances nécessaires. Les produits matriciels donnent :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 12 \\ 8 & 9 & 12 \\ 12 & 12 & 17 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 50 & 49 & 70 \\ 49 & 50 & 70 \\ 70 & 70 & 99 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, les coefficients de la première ligne de A^2 sont $4 + 1 + 4 = 9$, $2 + 2 + 4 = 8$ et $4 + 2 + 6 = 12$; ceux de $A^3 = A^2 A$ sont $18 + 8 + 24 = 50$, $9 + 16 + 24 = 49$ et $18 + 16 + 36 = 70$. Les autres lignes s'obtiennent par les mêmes produits ligne-colonne.

Une comparaison coefficient par coefficient donne :

$$A^3 = 7A^2 - 7A + I.$$

Pour les six coefficients distincts des matrices symétriques, le second membre donne respectivement $63 - 14 + 1 = 50$, $56 - 7 = 49$, $84 - 14 = 70$, $63 - 14 + 1 = 50$, $84 - 14 = 70$ et $119 - 21 + 1 = 99$. La relation est donc entièrement vérifiée. Aucun théorème général sur un polynôme de matrice n'est nécessaire.

2. En multipliant la relation de IV.1 par A^n , pour tout $n \geq 0$, on obtient :

$$A^{n+3} = 7A^{n+2} - 7A^{n+1} + A^n.$$

On définit trois suites appartenant à E par leurs valeurs initiales :

Suite	Indice 0	Indice 1	Indice 2
(u_n)	1	0	0
(v_n)	0	1	0
(w_n)	0	0	1

Leur existence et leur unicité sont celles de III.1. Posons $M_n = u_n I + v_n A + w_n A^2$. Ces matrices vérifient la même récurrence que A^n , par linéarité, et leurs trois premières valeurs sont $M_0 = I$, $M_1 = A$, $M_2 = A^2$. Une récurrence à partir de ces trois égalités donne $M_n = A^n$ pour tout $n \geq 0$. Cela établit l'existence des suites demandées et leur appartenance à E .

On peut aussi vérifier que les coefficients dans cette représentation sont uniques. Si

$rI + sA + tA^2 = 0$, les coefficients de positions $(1, 2)$ et $(1, 3)$ donnent $s + 8t = 0$ et $2s + 12t = 0$. La deuxième égalité moins deux fois la première donne $-4t = 0$, donc $t = 0$, puis $s = 0$. Le coefficient $(1, 1)$ donne alors $r = 0$. La famille (I, A, A^2) est libre.

Les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ sont donc exactement, dans cet ordre, les suites déterminées en III.2, III.4 et III.3.

3. Méthode 1 — Réduction des puissances à I, A, A^2

On utilise IV.2 et les expressions de la partie III, en conservant les notations $\alpha = 3 + 2\sqrt{2}$, $\beta = 3 - 2\sqrt{2}$ et $\delta = 4\sqrt{2}$. On a :

$$u_n = -\frac{1}{4} + \frac{1-5\beta}{4\delta}\alpha^n + \frac{5\alpha-1}{4\delta}\beta^n,$$

$$v_n = \frac{3}{2} + \frac{3\beta-1}{2\delta}\alpha^n + \frac{1-3\alpha}{2\delta}\beta^n,$$

$$w_n = -\frac{1}{4} + \frac{1-\beta}{4\delta}\alpha^n + \frac{\alpha-1}{4\delta}\beta^n.$$

Il suffit alors de calculer ces trois nombres et de former $A^n = u_n I + v_n A + w_n A^2$. En utilisant la matrice A^2 de IV.1, le résultat est :

$$A^n = \begin{pmatrix} u_n + 2v_n + 9w_n & v_n + 8w_n & 2v_n + 12w_n \\ v_n + 8w_n & u_n + 2v_n + 9w_n & 2v_n + 12w_n \\ 2v_n + 12w_n & 2v_n + 12w_n & u_n + 3v_n + 17w_n \end{pmatrix}.$$

Cette méthode découle directement des questions précédentes. Pour un calcul exact avec des entiers, on peut aussi calculer les trois suites par leur récurrence plutôt que par les formules contenant des racines carrées, puis appliquer la même combinaison matricielle.

Méthode 2 — Une base orthonormale de vecteurs propres explicites

La matrice A est symétrique. On vérifie directement :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Par exemple, pour $(1, 1, \sqrt{2})$, les deux premières coordonnées de l'image valent $3 + 2\sqrt{2} = \alpha$; la dernière vaut $4 + 3\sqrt{2} = \alpha\sqrt{2}$. Le calcul avec $-\sqrt{2}$ donne de même la valeur propre β .

Les trois vecteurs sont orthogonaux : $(1, -1, 0)$ est orthogonal aux deux autres, et le produit scalaire de ces derniers vaut $1 + 1 - 2 = 0$. Leurs normes sont respectivement $\sqrt{2}, 2, 2$. En les divisant par ces normes, on obtient une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Dans cette base, A agit par multiplication par $1, \alpha, \beta$. Pour chaque $n \geq 0$, A^n agit donc par $1, \alpha^n, \beta^n$. Si e est un vecteur unitaire, la matrice de la projection sur sa droite est $e^t e$. En utilisant les trois vecteurs normalisés :

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha^n}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} + \frac{\beta^n}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Posons $S_n = \alpha^n + \beta^n$ et $T_n = \alpha^n - \beta^n$. On obtient la forme compacte :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{S_n}{4} & -\frac{1}{2} + \frac{S_n}{4} & \frac{\sqrt{2}T_n}{4} \\ -\frac{1}{2} + \frac{S_n}{4} & \frac{1}{2} + \frac{S_n}{4} & \frac{\sqrt{2}T_n}{4} \\ \frac{\sqrt{2}T_n}{4} & \frac{\sqrt{2}T_n}{4} & \frac{S_n}{2} \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 0$, $S_0 = 2$ et $T_0 = 0$, ce qui redonne bien I . La première méthode utilise un polynôme annulateur vérifié concrètement ; la seconde utilise trois vecteurs propres réels explicites et donne une expression plus compacte. Toutes deux évitent les déterminants.

4. Rectification de l'énoncé : le PDF indique $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ tout en demandant des triplets. L'ensemble d'arrivée est corrigé en $\mathbb{N}^3$.

Méthode 1 — Itération de la matrice A

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f(n) = (x_n, y_n, z_n)$ par :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients de A sont des entiers naturels, donc les coordonnées de $f(n)$ sont naturelles par récurrence. Le triplet initial est rectangulaire. La relation de Pythagore est conservée par $A \in G$, et la primitivité est conservée parce que A^{-1} a des coefficients entiers, selon l'argument de II.5. Tous les $f(n)$ sont donc des triplets rectangulaires.

Il reste à vérifier l'injectivité. Le produit par A donne :

$$z_{n+1} = 2x_n + 2y_n + 3z_n, \quad z_{n+1} - z_n = 2x_n + 2y_n + 2z_n > 0,$$

car les coordonnées sont non négatives et $z_n \geq 1$. La suite des troisièmes coordonnées est donc strictement croissante. Si $m < n$, alors $z_m < z_n$, ce qui impose $f(m) \neq f(n)$. L'application est injective.

En utilisant la seconde expression de IV.3, on peut aussi écrire explicitement :

$$x_n = -\frac{1}{2} + \frac{S_n}{4} + \frac{\sqrt{2}T_n}{4}, \quad y_n = \frac{1}{2} + \frac{S_n}{4} + \frac{\sqrt{2}T_n}{4}, \quad z_n = \frac{S_n}{2} + \frac{\sqrt{2}T_n}{4}.$$

L'intégralité de ces expressions est garantie par leur origine matricielle. Les premiers triplets sont $(0, 1, 1)$, $(3, 4, 5)$, $(20, 21, 29)$ et $(119, 120, 169)$.

Méthode 2 — Une construction polynomiale élémentaire

On peut obtenir une autre injection sans calculer de puissances de matrices. Posons :

$$g(n) = (2n(n+1), 2n+1, 2n(n+1)+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Notons $x = 2n(n+1)$, $y = 2n+1$, $z = x+1$. Les trois nombres sont naturels et $y^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2x + 1$. Ainsi :

$$x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = z^2.$$

Tout diviseur commun des trois coordonnées divise $z - x = 1$, donc est égal à 1. Chaque triplet est rectangulaire. Enfin, la deuxième coordonnée $2n+1$ est strictement croissante ; l'application g est donc injective. Elle peut elle aussi être choisie comme l'injection f demandée.

La première construction prolonge l'étude de A ; la seconde montre directement qu'il existe une infinité de triplets rectangulaires grâce à une identité polynomiale simple.

Relevé des adaptations

- I.3 : remplacement de la notion de groupe, hors du référentiel, par les trois propriétés matricielles concrètes de présence de l'identité et de stabilité par produit et par inverse. La notation G est conservée.
- II.1 : remplacement de l'expression ancienne « entiers rationnels » par « entiers relatifs », avec le même sens mathématique.
- IV.4 : correction de l'ensemble d'arrivée de l'injection, de $\mathbb{N}^2$ en $\mathbb{N}^3$, conformément à la demande de triplets.

La récurrence de III.1 est résolue par une preuve élémentaire complète, sans recours à une théorie générale des récurrences d'ordre trois. Aucun résultat n'a été admis pour remplacer une démonstration. Aucun passage ne reste à vérifier.