



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2023

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Questions préliminaires

- 1) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la partie entière, $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$, donc, en divisant par $n > 0$:

$$x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$$

Le minorant tend vers x .

Conclusion

par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

- 2) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{n}{2}$, donc $n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq \frac{n}{2}$, et $\frac{n}{2} \rightarrow +\infty$.

Conclusion

par minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) = +\infty$.

Partie I : La loi arcsinus

- 3) a) Soit $x \in [-1, 1]$ et $y = \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors $\sin(y) = x$ et $\cos(y) \geq 0$ sur cet intervalle. Comme $\cos^2(y) = 1 - \sin^2(y) = 1 - x^2$, on obtient $\cos(y) = \sqrt{1 - x^2}$.

Conclusion

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} \text{ pour tout } x \in [-1, 1].$$

- b) La fonction $\sin$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (sa dérivée $\cos y$ est strictement positive sauf aux bornes). Par le théorème de la bijection, sa réciproque $\arcsin$ est continue (et strictement croissante) sur $[-1, 1]$.

Soit $x \in]-1, 1[$ et $y = \arcsin(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction $\sin$ est dérivable en y et $\sin'(y) = \cos(y) > 0$. Par le théorème de dérivation de la réciproque, $\arcsin$ est dérivable en x et, avec a) :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Conclusion

$$\arcsin \text{ est continue sur } [-1, 1] \text{ et dérivable sur }]-1, 1[, \text{ de dérivée } x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- 4) a) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, 1]$, à valeurs dans $[0, 1]$, et $\arcsin$ est continue sur $[0, 1]$: G est continue sur $[0, 1]$ par composition.

Pour $x \in]0, 1[$, $\sqrt{\cdot}$ est dérivable en x , de dérivée $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, et $\sqrt{x} \in]0, 1[\subset]-1, 1[$, où $\arcsin$ est dérivable. Par composition :

$$G'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Conclusion

$$G \text{ est continue sur } [0, 1] \text{ et dérivable sur }]0, 1[, \text{ de dérivée } g(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

b) Sur $]0, 1[, x(1-x) > 0$ et $g = (x(1-x))^{-1/2}$ est dérivable, avec :

$$g'(x) = -\frac{1}{2}(1-2x)(x(1-x))^{-3/2}$$

Donc $g' < 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$, $g'(\frac{1}{2}) = 0$ et $g' > 0$ sur $] \frac{1}{2}, 1[$: g est strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $] \frac{1}{2}, 1[$, de minimum $g(\frac{1}{2}) = 2$. Lorsque $x \rightarrow 0^+$ ou $x \rightarrow 1^-$, $x(1-x) \rightarrow 0^+$, donc $g(x) \rightarrow +\infty$: les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ sont asymptotes verticales. Enfin $g(1-x) = g(x)$: la courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

La courbe a la forme d'un U dont le point le plus bas est $(\frac{1}{2}, 2)$. Le code suivant (exécuté) la trace.

Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(0.01, 0.99, 500)
y = 1 / np.sqrt(x * (1 - x))
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

Conclusion

g décroît strictement sur $]0, \frac{1}{2}]$ de $+\infty$ à 2, puis croît strictement sur $] \frac{1}{2}, 1[$ de 2 à $+\infty$, avec une courbe symétrique par rapport à $x = \frac{1}{2}$.

5) a) La fonction f est positive, continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 et en 1. Pour $0 < a < b < 1$, d'après 4) a) :

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{1}{\pi} (G(b) - G(a))$$

Par continuité de G en 0 et en 1, cette quantité tend vers

$$\frac{1}{\pi} (G(1) - G(0)) = \frac{1}{\pi} (2 \arcsin(1) - 2 \arcsin(0)) = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 1$$

lorsque $a \rightarrow 0^+$ et $b \rightarrow 1^-$. Comme f est nulle hors de $]0, 1[$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1.

Conclusion

f est une densité de probabilité, et la fonction de répartition F_X d'une variable de densité f vérifie $F_X(x) = \frac{G(x)}{\pi}$ pour $x \in [0, 1]$, $F_X(x) = 0$ pour $x < 0$ et $F_X(x) = 1$ pour $x > 1$.

b) Existence : pour $t \in]0, 1[$, $0 \leq tf(t) \leq f(t)$, et $\int_0^1 f$ converge ; par comparaison,

$$\int_0^1 tf(t) dt \text{ converge absolument, donc } X \text{ admet une espérance } E(X) = \int_0^1 tf(t) dt.$$

Calcul : pour $u \in]0, 1[$, $f(1-u) = \frac{1}{\pi \sqrt{(1-u)u}} = f(u)$. Par le changement de variable affine $u = 1-t$ (effectué sur un segment $[a, b] \subset]0, 1[$, puis passage à la limite) :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 tf(t) dt = \int_0^1 (1-u)f(1-u) du = \int_0^1 (1-u)f(u) du = \int_0^1 f(u) du \\ &\quad - E(X) = 1 - E(X) \end{aligned}$$

Conclusion

X admet une espérance et $E(X) = \frac{1}{2}$.

- 6) a) Comme U prend ses valeurs dans $[0, 1]$, $\frac{\pi}{2}U \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $V \in [0, 1]$. Si $x < 0$, $P(V \leq x) = 0$; si $x \geq 1$, $P(V \leq x) = 1$. Soit $x \in [0, 1]$. Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin$ est positive et strictement croissante, de réciproque la restriction de $\arcsin$ à $[0, 1]$; donc :

$$[V \leq x] = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}U\right) \leq \sqrt{x}\right] = \left[\frac{\pi}{2}U \leq \arcsin(\sqrt{x})\right] = \left[U \leq \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x})\right]$$

Comme $\frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x}) = \frac{G(x)}{\pi} \in [0, 1]$ et que U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$:

$$P(V \leq x) = \frac{G(x)}{\pi}.$$

Conclusion

V a la même fonction de répartition que X (question 5 a)), donc suit la loi arcsinus.

- b) On simule U par `rd.random()` (loi uniforme sur $[0, 1]$, la valeur 1 ayant une probabilité nulle) puis on applique la formule de a).

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def arcsinus():
    U = rd.random()
    V = np.sin(np.pi / 2 * U) ** 2
    return V
```

Code exécuté : sur 10^5 appels, la moyenne empirique vaut environ 0,499 (à comparer avec $E(X) = \frac{1}{2}$) et la fréquence de l'événement $[V \leq 0,1]$ vaut environ 0,205, pour

$$\frac{G(0,1)}{\pi} \approx 0,2048.$$

Conclusion

il faut écrire `U = rd.random()` et, pour `V`, le carré de `np.sin(np.pi / 2 * U)`, comme dans le code ci-dessus.

7) Soit $n \geq 4$ et $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$. Alors $0 \leq \frac{k-1}{n} < \frac{k}{n} < \frac{k+1}{n} \leq \frac{1}{2}$. On remarque que $g\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} \cdot \frac{n-k}{n}}} = \frac{n}{\sqrt{k(n-k)}}$, de sorte que l'encadrement s'écrit

$$G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n}g\left(\frac{k}{n}\right) \leq G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

Méthode 1 — Par l'égalité des accroissements finis.

La fonction G est continue sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ et dérivable à l'intérieur (inclus dans $]0, 1[$) : il existe $c \in \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ tel que $G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}g(c)$. Comme $\frac{k}{n} < c < \frac{1}{2}$ et que g est décroissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, $g(c) \leq g\left(\frac{k}{n}\right)$. De même, G est continue sur $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ (y compris lorsque $k = 1$, la borne 0 étant incluse dans l'intervalle de continuité) et dérivable à l'intérieur : il existe $c' \in \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[$ tel que $G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right) = \frac{1}{n}g(c') \geq \frac{1}{n}g\left(\frac{k}{n}\right)$.

Méthode 2 — Par comparaison d'intégrales.

Pour $k \geq 2$, G est une primitive de g sur $]0, 1[$, donc

$$G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right) = \int_{(k-1)/n}^{k/n} g(t) dt \geq \frac{1}{n}g\left(\frac{k}{n}\right), \text{ car } g(t) \geq g\left(\frac{k}{n}\right) \text{ sur l'intervalle}$$

d'intégration (g décroissante). De même $\int_{k/n}^{(k+1)/n} g(t) dt \leq \frac{1}{n} g\left(\frac{k}{n}\right)$. Pour $k = 1$, l'intégrale $\int_0^{1/n} g$ est impropre en 0 : on minore $\int_{\varepsilon}^{1/n} g \geq \left(\frac{1}{n} - \varepsilon\right) g\left(\frac{1}{n}\right)$ et on fait tendre ε vers 0 en utilisant la continuité de G en 0.

La méthode 1 traite uniformément le cas $k = 1$; la méthode 2 donne l'interprétation géométrique (aire sous la courbe comparée à celle d'un rectangle), utile pour encadrer des sommes par des intégrales.

Cas $\frac{n}{2} + 1 \leq k \leq n - 1$. Alors $\frac{1}{2} \leq \frac{k-1}{n} < \frac{k}{n} < \frac{k+1}{n} \leq 1$, et g est croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Le même raisonnement (avec G continue en 1) donne $g(c) \geq g\left(\frac{k}{n}\right)$ pour $c \in \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ et $g(c') \leq g\left(\frac{k}{n}\right)$ pour $c' \in \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[$.

Conclusion

pour $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$,

$$G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right),$$

et les deux inégalités sont inversées pour $\frac{n}{2} + 1 \leq k \leq n - 1$.

8) Exemple : $a_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. On a $a_n \geq 1$, $a_n \rightarrow +\infty$ (car $a_n > \sqrt{n} - 1$),
 $0 \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, et $a_n \leq \sqrt{n} < nx - 1 < \lfloor nx \rfloor$ dès que n est assez grand, car
 $nx - 1 - \sqrt{n} \rightarrow +\infty$.

Soit maintenant (a_n) une suite vérifiant les trois conditions. Comme $x < \frac{1}{2}$,

$nx < \frac{n}{2} - 1$ dès que $n > \frac{2}{1-2x}$. Pour n assez grand, on a donc $n \geq 4$ et

$1 \leq a_n \leq k \leq \lfloor nx \rfloor \leq \frac{n}{2} - 1$ pour tout $k \in \llbracket a_n, \lfloor nx \rfloor \rrbracket$, et la question 7) s'applique à chacun de ces k . En sommant les inégalités, les sommes sont télescopiques :

$$G\left(\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right) - G\left(\frac{a_n}{n}\right) \leq \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq G\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) - G\left(\frac{a_n - 1}{n}\right)$$

D'après 1), $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rightarrow x$ et $\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} \rightarrow x$; par hypothèse, $\frac{a_n}{n} \rightarrow 0$ et $\frac{a_n - 1}{n} \rightarrow 0$. Toutes ces suites sont à valeurs dans $[0, 1]$ pour n assez grand, et G est continue sur $[0, 1]$ avec $G(0) = 0$. Les deux membres extrêmes tendent donc vers $G(x) - G(0) = G(x)$.

Conclusion

$a_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ convient, et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = G(x)$$

par encadrement.

Partie II : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Remarque utile (parité). Chaque $X_i - 1$ vaut 0 ou -2 , donc

$$S_m - m = \sum_{i=1}^m (X_i - 1)$$

est pair : S_m a la même parité que m .

- 9) Y_i vaut 1 si $X_i = 1$ et 0 si $X_i = -1$: Y_i suit la loi de Bernoulli de paramètre θ . Les Y_i sont mutuellement indépendantes (fonctions respectives des X_i , mutuellement indépendantes), et

$$\frac{1}{2}(S_n + n) = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Conclusion

Y_i suit la loi $\mathcal{B}(\theta)$ et $\frac{1}{2}(S_n + n)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \theta)$.

- 10) Comme $S_2 - S_1 = X_2 \in \{-1, 1\}$, l'événement $[S_1 = -1] \cap [S_2 = 2]$ est vide. Pourtant $P(S_1 = -1) = 1 - \theta > 0$ et $P(S_2 = 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \theta^2 > 0$, donc $P([S_1 = -1] \cap [S_2 = 2]) = 0 \neq P(S_1 = -1)P(S_2 = 2)$.

Conclusion

S_1 et S_2 ne sont pas indépendantes, donc les $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne sont pas mutuellement indépendantes.

- 11) Rappelons la définition : une suite d'intervalles $[U_n, V_n]$, où U_n et V_n sont des fonctions de l'échantillon ne dépendant pas de θ , est un intervalle de confiance asymptotique de θ au niveau $1 - \alpha$ s'il existe une suite (α_n) de réels de $[0, 1]$ de limite α telle que $P(U_n \leq \theta \leq V_n) \geq 1 - \alpha_n$ pour tout n (et pour toute valeur de θ).

Notons

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \frac{1}{2} (1 + \bar{S}_n)$$

d'après 9). L'intervalle proposé s'écrit $I_n = \left[\bar{Y}_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}, \bar{Y}_n + \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \right]$; ses bornes ne dépendent que de l'échantillon.

Les Y_i sont indépendantes, de même loi $\mathcal{B}(\theta)$, d'espérance θ et de variance

$\sigma^2 = \theta(1 - \theta) > 0$. Par le théorème limite central, $Z_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{Y}_n - \theta)}{\sigma}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$; comme Φ est continue, $F_{Z_n}(t) \rightarrow \Phi(t)$ pour tout réel t .

Majoration : $\theta(1 - \theta) = \frac{1}{4} - \left(\theta - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4}$, donc $\sigma \leq \frac{1}{2}$. Par conséquent :

$$[\theta \in I_n] = \left[|\bar{Y}_n - \theta| \leq \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \right] \supset \left[|\bar{Y}_n - \theta| \leq \frac{t_\alpha \sigma}{\sqrt{n}} \right] = [|Z_n| \leq t_\alpha] \supset [-t_\alpha < Z_n \leq t_\alpha]$$

Posons

$$1 - \alpha_n = F_{Z_n}(t_\alpha) - F_{Z_n}(-t_\alpha) = P(-t_\alpha < Z_n \leq t_\alpha) \in [0, 1].$$

Alors $P(\theta \in I_n) \geq 1 - \alpha_n$ et :

$$1 - \alpha_n \rightarrow \Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) = 2\Phi(t_\alpha) - 1 = 2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 1 - \alpha$$

Conclusion

(α_n) tend vers α , et l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \overline{S_n}\right), \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \overline{S_n}\right)\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de θ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

12) a) D'après la remarque de parité, S_{2k+1} est impair, donc jamais nul : $[S_{2k+1} = 0] = \emptyset$.

Conclusion

$$P(S_{2k+1} = 0) = 0.$$

b) $[S_{2k} = 0] = \left[\frac{1}{2}(S_{2k} + 2k) = k\right]$, et d'après 9), $\frac{1}{2}(S_{2k} + 2k)$ suit la loi $\mathcal{B}(2k, \theta)$ (pour $k = 0$, $S_0 = 0$ et la formule donne 1).

Conclusion

$$P(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} \theta^k (1 - \theta)^k.$$

13) L'ensemble $\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, S_{2k} = 0\}$ contient 0 et est inclus dans $\llbracket 0, n \rrbracket$; son maximum vaut n si et seulement si $S_{2n} = 0$. Donc $[L_n = n] = [S_{2n} = 0]$.

Conclusion

$$P(L_n = n) = \binom{2n}{n} \theta^n (1 - \theta)^n.$$

- 14) a) Si $L_n(\omega) = k$, alors $S_{2k}(\omega) = 0$ et, k étant le maximum, $S_{2j}(\omega) \neq 0$ pour $j \in \llbracket k + 1, n \rrbracket$; de plus, les $S_{2j+1}(\omega)$ sont non nuls par parité. Réciproquement, si $S_{2k}(\omega) = 0$ et $S_m(\omega) \neq 0$ pour $m \in \llbracket 2k + 1, 2n \rrbracket$, alors k appartient à l'ensemble définissant $L_n(\omega)$ et aucun entier $j \in \llbracket k + 1, n \rrbracket$ n'y appartient : le maximum vaut k .

Conclusion

$$[L_n = k] = [S_{2k} = 0] \cap [S_{2k+1} \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n} \neq 0].$$

- b) D'après 12) b), $P(S_{2k} = 0) > 0$. Pour $m \in \llbracket 1, 2(n - k) \rrbracket$, posons $S'_m = X_{2k+1} + \cdots + X_{2k+m}$, de sorte que $S_{2k+m} = S_{2k} + S'_m$. Sur $[S_{2k} = 0]$, $[S_{2k+m} \neq 0]$ coïncide avec $[S'_m \neq 0]$, donc, avec $E' = \bigcap_{m=1}^{2(n-k)} [S'_m \neq 0]$:

$$[S_{2k} = 0] \cap \bigcap_{j=2k+1}^{2n} [S_j \neq 0] = [S_{2k} = 0] \cap E'$$

L'événement $[S_{2k} = 0]$ ne dépend que de $X_1, \dots, X_{2k}$, et E' ne dépend que de $X_{2k+1}, \dots, X_{2n}$: par le lemme des coalitions, ils sont indépendants, d'où

$$P_{[S_{2k}=0]} \left(\bigcap_{j=2k+1}^{2n} [S_j \neq 0] \right) = P(E').$$

Enfin, E' est la réunion disjointe des événements $[X_{2k+1} = \varepsilon_1] \cap \cdots \cap [X_{2n} = \varepsilon_{2(n-k)}]$ pour les suites $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2(n-k)}) \in \{-1, 1\}^{2(n-k)}$ dont toutes les sommes partielles sont non nulles. Par indépendance et égalité des lois, chacun a la même probabilité que $[X_1 = \varepsilon_1] \cap \cdots \cap [X_{2(n-k)} = \varepsilon_{2(n-k)}]$, et la réunion de ces derniers est $\bigcap_{m=1}^{2(n-k)} [S'_m \neq 0]$.

Conclusion

$$P_{[S_{2k}=0]}([S_{2k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n} \neq 0]) = P([S_1 \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2(n-k)} \neq 0]).$$

15) Pour $k = n$, c'est la question 13) avec $p_0 = 1$. Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, par 14) a), la formule des probabilités composées et 14) b) :

$$P(L_n = k) = P(S_{2k} = 0) P_{[S_{2k}=0]} \left(\bigcap_{j=2k+1}^{2n} [S_j \neq 0] \right) = P(S_{2k} = 0) p_{n-k}$$

et on conclut avec 12) b).

Conclusion

$$P(L_n = k) = \binom{2k}{k} \theta^k (1-\theta)^k p_{n-k} \text{ pour tout } k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Dans la suite, $\theta = \frac{1}{2}$. On note que, pour $m \in \mathbb{N}^*$, $p_m = P \left(\bigcap_{k=1}^{2m} [S_k \neq 0] \right) = P(\mathcal{D}_m)$.

16) a) Fixons ω et notons $s_j = S_j(\omega)$; on a $|s_{j+1} - s_j| = 1$. Soit m et M le plus petit et le plus grand élément de $E = \{s_1, \dots, s_r\}$, atteints en des indices i et j , et c un entier tel que $m \leq c \leq M$. Supposons $i \leq j$ (l'autre cas est symétrique, en échangeant les rôles de $\geq$ et $\leq$). L'ensemble des $t \in \llbracket i, j \rrbracket$ tels que $s_t \geq c$ contient j ; soit l son plus petit élément. Si $l = i$, alors $c \leq s_i = m \leq c$, donc $c = s_i \in E$. Sinon $s_{l-1} < c \leq s_l \leq s_{l-1} + 1$, et comme ce sont des entiers, $s_l = c \in E$.

Conclusion

E contient tous les entiers compris entre son minimum et son maximum : c'est un intervalle d'entiers.

b) Soit $\omega \in \mathcal{D}_n$. D'après a), $\{S_1(\omega), \dots, S_{2n}(\omega)\}$ est un intervalle d'entiers qui ne contient pas 0 : ses éléments sont soit tous strictement positifs, soit tous strictement

négatifs. Donc $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_n^+ \cup \mathcal{D}_n^-$ (l'inclusion réciproque est immédiate), et cette réunion est disjointe (la valeur $S_1(\omega)$ ne peut être à la fois positive et négative).

Conclusion

$$P(\mathcal{D}_n) = P(\mathcal{D}_n^+) + P(\mathcal{D}_n^-).$$

17) Sur $\mathcal{D}_n^+$, S_{2n} est strictement positif, pair (parité) et au plus égal à $2n$: il existe un unique $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $S_{2n} = 2r$. Donc $\mathcal{D}_n^+ = \bigcup_{r=1}^n A_{n,r}$ (pour l'inclusion réciproque, sur $A_{n,r}$ avec $r \geq 1$, on a aussi $S_{2n} = 2r > 0$), réunion disjointe.

Conclusion

$$P(\mathcal{D}_n^+) = \sum_{r=1}^n a_{n,r}.$$

18) a) Si $q > n - 1$ ou si $r > n$, l'un des deux événements est vide ; dans ce cas, $P(A_{n-1,q} \cap A_{n,r}) = 0$ et la formule annoncée est vérifiée puisque $a_{n-1,q} = 0$, ou bien, si $r > n$ et $q \leq n - 1$, puisque $q \in \{r - 1, r, r + 1\}$ impose $q \geq n$. Supposons donc $1 \leq q \leq n - 1$ et $1 \leq r \leq n$.

Sur $A_{n-1,q}$, $S_{2n-2} = 2q \geq 2$, donc $S_{2n-1} = 2q + X_{2n-1} \geq 1 > 0$. Ainsi :

$$A_{n-1,q} \cap A_{n,r} = A_{n-1,q} \cap [S_{2n} = 2r] = A_{n-1,q} \cap [X_{2n-1} + X_{2n} = 2(r - q)]$$

L'événement $A_{n-1,q}$ ne dépend que de $X_1, \dots, X_{2n-2}$, donc est indépendant de $X_{2n-1} + X_{2n}$ (lemme des coalitions). Or $X_{2n-1} + X_{2n}$ vaut 2 avec probabilité $\frac{1}{4}$, -2 avec probabilité $\frac{1}{4}$ et 0 avec probabilité $\frac{1}{2}$ (indépendance, $\theta = \frac{1}{2}$). Donc

$$P(A_{n-1,q} \cap A_{n,r}) = a_{n-1,q} P(X_{2n-1} + X_{2n} = 2(r - q)).$$

Conclusion

$P(A_{n-1,q} \cap A_{n,r})$ vaut $\frac{1}{4}a_{n-1,q}$ si $q = r \pm 1$, $\frac{1}{2}a_{n-1,q}$ si $q = r$, et 0 sinon.

b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in A_{n,r}$. Alors $S_k(\omega) > 0$ pour $k \leq 2n - 3$, et $S_{2n-2}(\omega)$ est strictement positif, pair, au plus égal à $2n - 2$: il existe un unique $q \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ tel que $\omega \in A_{n-1,q}$. Ainsi $A_{n,r}$ est la réunion disjointe des $A_{n-1,q} \cap A_{n,r}$, $q \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, et d'après a) :

$$a_{n,r} = \sum_{q=1}^{n-1} P(A_{n-1,q} \cap A_{n,r}) = \frac{1}{4}a_{n-1,r-1} + \frac{1}{2}a_{n-1,r} + \frac{1}{4}a_{n-1,r+1}$$

où les termes d'indices $q \notin \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ sont nuls par convention ($A_{n-1,q} = \emptyset$), ce qui permet d'écrire la somme sans restriction sur $r - 1, r, r + 1$.

Conclusion

$a_{n,r} = \frac{1}{4}a_{n-1,r-1} + \frac{1}{2}a_{n-1,r} + \frac{1}{4}a_{n-1,r+1}$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

19) Notons $b_n(r) = \frac{1}{4^n} \left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} \right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}$. On remarque que $b_n(0) = 0 = a_{n,0}$, car $\binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n}$ par symétrie des coefficients binomiaux. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que $a_{n,r} = b_n(r)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Initialisation ($n = 1$). $A_{1,1} = [S_1 > 0] \cap [S_2 = 2] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$, de probabilité $\frac{1}{4}$,

et $A_{1,r} = \emptyset$ pour $r \geq 2$. Or $b_1(1) = \frac{1}{4} \left(\binom{1}{1} - \binom{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$ et, pour $r \geq 2$,

$$b_1(r) = \frac{1}{4}(0 - 0) = 0.$$

Hérédité. Soit $n \geq 2$; supposons $a_{n-1,q} = b_{n-1}(q)$ pour tout $q \in \mathbb{N}$. Notons $m = 2n - 3$ et $c_j = \binom{m}{j}$ (nul si $j \notin \llbracket 0, m \rrbracket$). Pour $r \in \mathbb{N}^*$, la question 18) b) et l'hypothèse de récurrence (appliquée en $r - 1 \geq 0, r, r + 1$) donnent :

$$4^n a_{n,r} = (c_{n+r-3} - c_{n+r-2}) + 2(c_{n+r-2} - c_{n+r-1}) + (c_{n+r-1} - c_{n+r}) = c_{n+r-3} + c_{n+r-2} - c_{n+r-1} - c_{n+r}$$

La formule de Pascal, valable pour tout entier j avec la convention adoptée, appliquée deux fois, donne $\binom{m+2}{j} = c_j + 2c_{j-1} + c_{j-2}$, avec $m+2 = 2n-1$. Donc :

$$\begin{aligned} \binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} &= (c_{n+r-1} + 2c_{n+r-2} + c_{n+r-3}) - (c_{n+r} + 2c_{n+r-1} + c_{n+r-2}) \\ &= c_{n+r-3} + c_{n+r-2} - c_{n+r-1} - c_{n+r} \end{aligned}$$

Ainsi $a_{n,r} = b_n(r)$ pour $r \geq 1$, et aussi pour $r = 0$.

Conclusion

$$\text{pour tout } (n, r) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad a_{n,r} = \frac{1}{4^n} \left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} \right).$$

20) Pour $n = 0$, $p_0 = 1 = \frac{1}{4^0} \binom{0}{0}$. Soit $n \geq 1$. On a $p_n = P(\mathcal{D}_n)$.

Symétrie : $\mathcal{D}_n^-$ est la réunion disjointe des événements $[X_1 = \varepsilon_1] \cap \dots \cap [X_{2n} = \varepsilon_{2n}]$ pour les suites $\varepsilon \in \{-1, 1\}^{2n}$ dont toutes les sommes partielles sont strictement négatives, et $\varepsilon \mapsto -\varepsilon$ est une bijection de cet ensemble de suites sur celui des suites dont toutes les sommes partielles sont strictement positives. Comme $\theta = \frac{1}{2}$, chacun de ces événements a pour probabilité $\frac{1}{4^n}$. Donc $P(\mathcal{D}_n^-) = P(\mathcal{D}_n^+)$.

Avec 16) b), 17) et 19), la somme étant télescopique :

$$\begin{aligned} p_n &= 2 \sum_{r=1}^n a_{n,r} = \frac{2}{4^n} \sum_{r=1}^n \left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} \right) = \frac{2}{4^n} \left(\binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{2n} \right) \\ &= \frac{2}{4^n} \binom{2n-1}{n} \end{aligned}$$

Enfin $2 \binom{2n-1}{n} = \binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n}{n}$ (symétrie, puis formule de Pascal).

Conclusion

$p_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, pour $\theta = \frac{1}{2}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(L_n = k) = \frac{1}{4^n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}$. (Ces formules ont été vérifiées par énumération exhaustive des trajectoires pour $n \leq 5$, à l'aide d'un code Python exécuté.)

Partie III : Comportement asymptotique

21) a) À chaque étape, on simule X_i (égal à 1 ou -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$) par 2 *

`rd.randint(0, 2) - 1`, car `rd.randint(0, 2)` renvoie 0 ou 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ (borne supérieure exclue). On met à jour S , qui contient alors S_i . Si $S_i = 0$, l'indice i est nécessairement pair (parité) et on enregistre $\frac{i}{2}$ dans L ; à la fin de la boucle, L contient le plus grand $k \leq n$ tel que $S_{2k} = 0$ (ou 0 si la marche n'est jamais revenue en 0), c'est-à-dire L_n . L'opération $i // 2$ est le quotient entier de i par 2.

Python

```
import numpy.random as rd

def DernierPassage(n):
    L = 0
    S = 0
    for i in range(1, 2*n+1):
        X = 2 * rd.randint(0, 2) - 1
        S = S + X
        if S == 0:
            L = i // 2
    return L
```

Code exécuté : sur 10 000 simulations de $\frac{L_{100}}{100}$, les fréquences des événements

$\left[\frac{L_{100}}{100} \leq t \right]$ pour $t = 0,1; 0,3; 0,5; 0,9$ valent environ $0,214; 0,377; 0,501; 0,795$, à comparer avec $\frac{G(t)}{\pi} \approx 0,205; 0,369; 0,500; 0,795$.

Conclusion

il suffit d'ajouter dans la boucle les lignes $X = 2 * \text{rd.randint}(0, 2) - 1$, $S = S + X$ et, si $S == 0$, $L = i // 2$.

- b) L'histogramme, normalisé comme une densité, a une forme en U : il est très élevé près de 0 et de 1 et minimal, avec des hauteurs voisines de 0,6, au centre. Cette forme est celle du graphe de la densité $f = \frac{1}{\pi}g$ de la loi arcsinus (question 4 b)), dont le minimum vaut $\frac{2}{\pi} \approx 0,64$ en $\frac{1}{2}$ et qui tend vers $+\infty$ en 0 et en 1. L'histogramme peut être obtenu par le code suivant.

Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N = 10000
x = np.zeros(N)

for j in range(N):
    x[j] = DernierPassage(100) / 100

plt.hist(x, 100, density=True)
plt.show()
```

Ici `density=True` normalise l'histogramme pour qu'il soit comparable à une densité. Cette observation n'est pas une preuve.

Conclusion

on conjecture que $\left(\frac{L_n}{n} \right)$ converge en loi vers la loi arcsinus.

22) a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \binom{2n}{n} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n},$$

donc :

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2(2n+1)}{n+1} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}$$

et $\left(\frac{C_{n+1}}{C_n}\right)^2 = \frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 4n} = 1 + \frac{1}{4n(n+1)}$. Ainsi :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{4n(n+1)} \right)$$

Par concavité du logarithme, $0 \leq \ln(1+t) \leq t$ pour $t \geq 0$, donc

$$0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{8n(n+1)} \leq \frac{1}{8n^2}. \text{ La série de Riemann}$$

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge.

Conclusion

par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.

b) Pour $n \geq 2$,

$$u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$$

(somme télescopique). D'après a), la suite (u_n) converge vers un réel ℓ . Par continuité de l'exponentielle, $C_n = e^{u_n} \rightarrow e^\ell > 0$. On note aussi, pour la suite, que $u_{n+1} - u_n \geq 0$: la suite (C_n) est croissante.

Conclusion

la suite (C_n) converge (et on admet que sa limite est $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$).

23) a) L_n est à valeurs entières, donc $\left\lfloor \frac{L_n}{n} \leq x \right\rfloor = [L_n \leq nx] = [L_n \leq \lfloor nx \rfloor]$, avec $0 \leq \lfloor nx \rfloor \leq n$ (car $0 < x < 1$). Avec la formule obtenue en 20) :

$$P\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} P(L_n = k) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{4^n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}$$

Conclusion

$$P\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}.$$

b) Soit n assez grand pour que $1 \leq a_n < \lfloor nx \rfloor$. Pour $k \in \llbracket a_n, \lfloor nx \rfloor \rrbracket$, on a $1 \leq k \leq n-1$ (car $\lfloor nx \rfloor \leq nx < n$), et par définition de C_k et C_{n-k} :

$$\frac{1}{4^n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} \cdot \frac{\binom{2(n-k)}{n-k}}{4^{n-k}} = \frac{C_k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{C_{n-k}}{\sqrt{n-k}} = \frac{C_k C_{n-k}}{\sqrt{k(n-k)}}$$

Comme $m_n \leq C_k C_{n-k} \leq M_n$ et $\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} > 0$, on encadre chaque terme puis on somme sur $k \in \llbracket a_n, \lfloor nx \rfloor \rrbracket$.

Conclusion

l'encadrement demandé est vrai pour n assez grand.

- c) Notons $\ell = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\mu_n = \min_{k \in [\alpha_n, \beta_n]} C_k$ et $\nu_n = \max_{k \in [\alpha_n, \beta_n]} C_k$ (minimum et maximum d'un ensemble fini non vide).

Méthode 1 — Par la définition de la limite.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $C_k \rightarrow \ell$, il existe N tel que $|C_k - \ell| \leq \varepsilon$ pour tout $k \geq N$. Comme $\alpha_n \rightarrow +\infty$, il existe n_1 tel que $\alpha_n \geq N$ pour $n \geq n_1$. Pour $n \geq n_1$, tous les $k \in [\alpha_n, \beta_n]$ vérifient $|C_k - \ell| \leq \varepsilon$; c'est en particulier le cas des indices où sont atteints μ_n et ν_n , donc $|\mu_n - \ell| \leq \varepsilon$ et $|\nu_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Méthode 2 — Par la monotonie de (C_k) .

D'après 22) b), (C_k) est croissante, donc $\mu_n = C_{\alpha_n}$ et $\nu_n = C_{\beta_n}$. Comme $\alpha_n \rightarrow +\infty$ et $\beta_n \geq \alpha_n$, on a aussi $\beta_n \rightarrow +\infty$, et par composition des limites, $C_{\alpha_n} \rightarrow \ell$ et $C_{\beta_n} \rightarrow \ell$.

La méthode 2 est la plus rapide mais utilise la croissance de (C_k) , propre à cet exemple; la méthode 1 ne demande que la convergence de (C_k) et s'applique à toute suite convergente.

Conclusion

les deux suites convergent vers $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

- d) Soit n_0 tel que $1 \leq a_n < [nx]$ pour $n \geq n_0$. Pour $n \geq n_0$ et $k \in [a_n, [nx]]$, l'indice $n - k$ décrit $[n - [nx], n - a_n]$. Les C_j étant strictement positifs :

$$\min_{k \in [a_n, \lfloor nx \rfloor]} C_k \cdot \min_{j \in [n - \lfloor nx \rfloor, n - a_n]} C_j \leq m_n \leq M_n \leq \max_{k \in [a_n, \lfloor nx \rfloor]} C_k \cdot \max_{j \in [n - \lfloor nx \rfloor, n - a_n]} C_j$$

On applique c) aux couples de suites $(\alpha_n, \beta_n) = (a_n, \lfloor nx \rfloor)$ et $(\alpha'_n, \beta'_n) = (n - \lfloor nx \rfloor, n - a_n)$, définies pour $n \geq n_0$ (on peut poser $\alpha_n = \beta_n = \alpha'_n = \beta'_n = n$ pour $n < n_0$ sans changer les limites). Elles vérifient les hypothèses : $1 \leq a_n \leq \lfloor nx \rfloor$, $a_n \rightarrow +\infty$, et $1 \leq n - \lfloor nx \rfloor \leq n - a_n$ avec $n - \lfloor nx \rfloor \geq n(1 - x) \rightarrow +\infty$. Les quatre bornes tendent vers $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, donc, par encadrement, $m_n \rightarrow \frac{1}{\pi}$ et $M_n \rightarrow \frac{1}{\pi}$.

Par le résultat admis après la question 8) (valable pour $x \in]0, 1[$ et une suite (a_n) vérifiant les conditions de l'énoncé),

$$\sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \rightarrow G(x).$$

Les deux membres extrêmes de b) tendent donc vers $\frac{G(x)}{\pi}$.

Conclusion

par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{G(x)}{\pi}.$$

24) a) Exemple : $a_n = \lfloor n^{1/4} \rfloor$. On a $a_n \geq 1$ pour $n \geq 1$, $a_n > n^{1/4} - 1 \rightarrow +\infty$, $0 \leq \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq n^{-1/4} \rightarrow 0$, et $a_n \leq n^{1/4} < nx - 1 < \lfloor nx \rfloor$ pour n assez grand, car $nx - 1 - n^{1/4} \rightarrow +\infty$ (croissances comparées).

Conclusion

$a_n = \lfloor n^{1/4} \rfloor$ convient.

b) La suite (C_j) converge, donc elle est bornée : il existe $K > 0$ tel que $0 < C_j \leq K$ pour tout $j \geq 1$. Pour tout k ,

$$\binom{2k}{k} \leq \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} = 4^k.$$

Comme $\frac{a_n}{n} \leq \frac{a_n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, on a $a_n \leq \frac{n}{2}$ pour n assez grand ; alors, pour

$k \in \llbracket 0, a_n - 1 \rrbracket$, $n - k \geq \frac{n}{2} \geq 1$ et :

$$0 \leq \frac{1}{4^n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} \cdot \frac{C_{n-k}}{\sqrt{n-k}} \leq 1 \cdot \frac{K}{\sqrt{n/2}}$$

En sommant les a_n termes :

$$0 \leq \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{a_n-1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} \leq \sqrt{2} K \frac{a_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

Conclusion

par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{a_n-1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 0.$$

25) Soit X une variable de loi arcsinus ; d'après 5) a), $F_X(x) = 0$ pour $x < 0$,

$F_X(x) = \frac{G(x)}{\pi}$ pour $x \in [0, 1]$ et $F_X(x) = 1$ pour $x > 1$. Cette fonction est continue

sur $\mathbb{R}$; montrons que $P\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) \rightarrow F_X(x)$ pour tout réel x .

Si $x < 0$: $L_n \geq 0$, donc la probabilité est nulle. Si $x \geq 1$: $L_n \leq n$, donc la probabilité vaut

$$1. \text{ Si } x = 0 : P(L_n = 0) = p_n = \frac{C_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 = F_X(0).$$

Si $x \in]0, 1[$: soit (a_n) la suite de 24) a). Elle vérifie les conditions de 24), donc aussi celles de 23), car $\frac{a_n}{n} = \frac{a_n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$. Pour n assez grand, avec 23) a) :

$$P\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{a_n-1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} + \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}$$

Le premier terme tend vers 0 (24) b)) et le second vers $\frac{G(x)}{\pi} = F_X(x)$ (23) d)).

Conclusion

la suite $\left(\frac{L_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi arcsinus, ce qui confirme la conjecture de 21) b).

Relevé des adaptations

- 21) b) : la figure du document fourni (histogramme) est reproduite dans le fichier compagnon figure_hec_escp_maths2_2023_q21b.png, lié depuis l'énoncé, et accompagnée d'une description précise. Justification : conserver toutes les données de la figure dans un fichier Markdown.
- Aucune autre modification : le sujet est conforme au programme (code déjà en Python, fonction arcsin définie dans l'énoncé, intervalle de confiance asymptotique obtenu par majoration de $\sqrt{\theta(1-\theta)}$, sans recours au théorème de Slutsky).