



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques

2018

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Préliminaire

1. (a) Établir, pour tout entier naturel k , la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$.

On pose alors $A_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et, pour tout entier $k \geq 1$, $A_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$.

1. (b) Calculer A_0 , A_1 et A_2 .
2. Dédire de la question 1(a) la convergence, pour tout x réel, des deux intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt$ et $\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(2xt) dt$.

Partie I. Calcul d'une fonction auxiliaire

On note F et G , respectivement, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(2xt) dt.$$

Dans cette partie, on veut montrer, d'une part, que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, d'autre part, donner l'expression de $F(x)$ pour tout réel x .

3. (a) À l'aide d'une formule de Taylor, établir, pour tout réel u , l'inégalité $|\sin u| \leq |u|$.
3. (b) Pour tous réels u et v , justifier la formule trigonométrique $\cos u - \cos v = 2 \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \sin\left(\frac{v-u}{2}\right)$.
3. (c) En déduire que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Pour tout réel u , justifier, à l'aide d'une formule de Taylor, l'inégalité $|u - \sin u| \leq u^2/2$.

4. (b) Pour tous réels x et h , établir l'inégalité

$$|F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} (|(2ht - \sin(2ht)) \sin(2xt)| + (1 - \cos(2ht)) |\cos(2xt)|) dt.$$

On pourra admettre l'existence de l'intégrale du second membre, qui découle du préliminaire.

4. (c) En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^2$,
 $|F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| \leq Ch^2$.

5. (a) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa fonction dérivée F' à l'aide de la fonction G .

5. (b) En utilisant une intégration par parties, montrer que, pour tout réel x ,
 $F'(x) = -2xF(x)$.

5. (c) En déduire que, pour tout réel x , $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$.

Partie II. Fonction de Dirichlet

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit φ_n la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ par

$$\varphi_n(u) = \frac{\sin((n+1/2)u)}{2 \sin(u/2)}, \quad u \in D.$$

L'ensemble D est l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des multiples de 2π .

6. (a) Montrer que φ_n est continue sur D et prolongeable par continuité en 0.
 6. (b) En déduire que φ_n admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$. On note encore φ_n la fonction ainsi prolongée.

6. (c) Montrer que φ_n est paire.

7. (a) Pour tous $k \geq 1$ et $u \in \mathbb{R}$, établir, à l'aide des formules d'addition du sinus,

$$2 \sin(u/2) \cos(ku) = \sin((k + 1/2)u) - \sin((k - 1/2)u).$$

En sommant ces égalités, calculer

$$2 \sin(u/2) \sum_{k=1}^n \cos(ku)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $u \in \mathbb{R}$. Pour $n = 0$, la somme est nulle.

7. (b) En déduire la relation

$$\sum_{k=1}^n \cos(ku) = \varphi_n(u) - \frac{1}{2}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$.

7. (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} \varphi_n(u) du$.

8. Soit ψ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T > 0$. Établir, pour tout

$$\text{réel } x, \text{ l'égalité } \int_x^{x+T} \psi(u) du = \int_0^T \psi(u) du.$$

Partie III. Formule sommatoire de Poisson

Dans cette partie, on note θ un réel strictement positif fixé et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\theta x^2}$.

9. (a) Montrer que, pour tout réel x , les deux séries

$$\sum_{k \geq 1} f(x + 2k\pi)$$

et

$$\sum_{k \geq 1} f(x - 2k\pi)$$

sont convergentes.

On pose alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(x + 2k\pi) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(x - 2k\pi).$$

On définit ainsi une fonction H sur $\mathbb{R}$ et on admet sans démonstration, dans toute la suite du problème, que H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

9. (b) Préciser la parité de H et de sa fonction dérivée H' .

10. Dans cette question, on note n un entier naturel fixé. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, soit H_N la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H_N(x) = f(x) + \sum_{k=1}^N f(x + 2k\pi) + \sum_{k=1}^N f(x - 2k\pi).$$

10. (a) Établir l'égalité
$$\int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) dx = \int_{-2N\pi}^{2(N+1)\pi} f(u) \cos(nu) du.$$

10. (b) En déduire que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(u) \cos(nu) du.$$

10. (c) Établir, pour tout $x \in [0, 2\pi]$, l'inégalité

$$|H(x) - H_N(x)| \leq 2 \sum_{k=N}^{+\infty} e^{-4\theta\pi^2 k^2}.$$

10. (d) En déduire les égalités

$$\int_0^{2\pi} H(x) \cos(nx) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(u) \cos(nu) du = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right).$$

11. Soit $x \in [0, 2\pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{2\pi} H(u) \cos(nu) du$.

11. (a) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, établir l'égalité

$$a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) = \int_0^{2\pi} H(u) \varphi_N(u+x) du + \int_0^{2\pi} H(u) \varphi_N(u-x) du,$$

où la fonction φ_N a été définie dans la question 6.

11. (b) En déduire l'égalité

$$a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) = \int_0^{2\pi} \frac{H(v+x) + H(v-x)}{2 \sin(v/2)} \sin((N+1/2)v) dv.$$

Aux extrémités $v = 0$ et $v = 2\pi$, l'intégrande est interprété par son prolongement continu, issu des fonctions φ_N .

11. (c) Justifier la continuité sur $[0, 2\pi]$ de la fonction K_x définie par

$$K_x(v) = \begin{cases} \frac{H(v+x) + H(v-x) - 2H(x)}{2 \sin(v/2)} & \text{si } v \in]0, 2\pi[, \\ 0 & \text{si } v = 0 \text{ ou } v = 2\pi. \end{cases}$$

11. (d) À l'aide de la question 7(c), établir l'égalité

$$a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) - 2\pi H(x) = \int_0^{2\pi} K_x(v) \sin((N+1/2)v) dv.$$

12. (a) Soit g une fonction définie et de classe C^1 sur $[0, 1]$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 g(t) \sin(\lambda t) dt$ tend vers 0 lorsque le réel λ tend vers $+\infty$.

Pour chaque $x \in [0, 2\pi]$, on admet le résultat suivant concernant la fonction K_x définie à

la question 11(c) : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} K_x(v) \sin(\lambda v) dv = 0$.

12. (b) Établir, pour tout réel $x \in [0, 2\pi]$ et pour tout réel $\theta > 0$, la relation suivante, appelée formule sommatoire de Poisson :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right) \cos(nx) \right) = e^{-\theta x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\theta(x+2k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\theta(x-2k\pi)^2}.$$

Partie IV. Une application probabiliste de la formule sommatoire de Poisson

Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$. Deux joueurs A et B lancent une pièce de monnaie. Chaque lancer donne « Pile » avec probabilité p et « Face » avec probabilité $1 - p$. Le vainqueur est le joueur qui obtient « Pile » le premier, auquel cas la partie s'arrête.

Le premier lancer, de rang 1, est effectué par A. Si la partie ne s'arrête pas avant, les trois lancers suivants, de rangs 2, 3, 4, sont effectués par B, les cinq suivants, de rangs 5, 6, 7, 8, 9, par A, et ainsi de suite. Après chaque changement de main, le joueur qui reprend la main peut effectuer au maximum deux lancers de plus que ceux que vient d'effectuer l'autre joueur.

Les résultats des lancers successifs sont supposés indépendants.

13. (a) Compléter la fonction Python suivante qui simule une partie selon les règles précédentes et affiche le vainqueur. La commande `print(texte)` affiche le texte fourni ; `np.random.random()` simule une variable uniforme sur $[0, 1[$.

Python

```
import numpy as np

def jeu(p):
    i = 1
    v = 1
    s = 1
    j = 1
    while np.random.random() > p:
        i = i + 1
        j = j + 1
        if j > s:
            v = -v # changement de main
            s = -----
            j = -----
    if v == 1:
        print("A vainqueur")
```

```
else:
    print("B vainqueur")
return v
```

13. (b) Que représente la valeur de i après l'exécution de la fonction `jeu` ?
13. (c) Préciser la signification de la variable v .
13. (d) Compléter le code de `jeu` pour qu'il affiche le nombre de lancers effectués par A.
13. (e) Écrire un code Python permettant d'obtenir une valeur approchée de la probabilité que le vainqueur du jeu soit A.
14. On suppose que l'expérience aléatoire précédente est modélisée à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P_p)$. On note :
- X le nombre de lancers effectués par A et I l'ensemble des rangs possibles de ses lancers, $1, 5, 6, \dots$;
 - Y le nombre de lancers effectués par B et J l'ensemble des rangs possibles de ses lancers, $2, 3, 4, \dots$;
 - H l'événement « le vainqueur est A » ;
 - K l'événement « le vainqueur est B ».
14. (a) Justifier que $P_p(H \cup K) = 1$ et identifier la loi de $X + Y$.
14. (b) Montrer que $\lim_{p \rightarrow 1} P_p(H) = 1$.
15. (a) Justifier que l'ensemble I est inclus dans la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{4n^2 + 1, \dots, 4n^2 + 4n + 1\}$.

15. (b) Démontrer que

$$P_p(H) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((1-p)^{4n^2} - (1-p)^{4n^2+4n+1} \right).$$

Donner une expression similaire de $P_p(K)$.

16. (a) En utilisant le résultat de la question 12(b), établir l'inégalité stricte

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (1-p)^{n^2} > \frac{1}{2}.$$

16. (b) Que peut-on en déduire concernant le jeu considéré ?