



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2018

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Rappel utilisé plusieurs fois. Si deux familles finies $(A_1, \dots, A_n)$ et $(A'_1, \dots, A'_n)$ de variables aléatoires discrètes sont chacune mutuellement indépendantes et si A_k et A'_k ont même loi pour tout k , alors, pour toute fonction ϕ de n variables, $\phi(A_1, \dots, A_n)$ et $\phi(A'_1, \dots, A'_n)$ ont même loi. En effet, pour toute valeur v , $P([\phi(A_1, \dots, A_n) = v])$ est la somme, sur les n -uplets $(a_1, \dots, a_n)$ tels que $\phi(a_1, \dots, a_n) = v$, des produits $P([A_1 = a_1]) \cdots P([A_n = a_n])$, et cette expression est la même pour la seconde famille.

Partie I. Séries télescopiques

- 1) a) Pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. La somme partielle est télescopique :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

Conclusion

la série converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

- b) La série de a) s'écrit

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{x_n}{n} - \frac{x_{n+1}}{n+1} \right)$$

avec $x_n = 1$ pour tout n : elle correspond au cas où toutes les variables X_n prennent la valeur 1.

Conclusion

X est la variable certaine égale à 1.

- 2) a) La fonction f_n est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sauf peut-être en un nombre fini de points. On calcule les trois intégrales sur les morceaux où elle n'est pas nulle :

$$\int_{-\frac{1}{n+1}}^0 \frac{1}{n+1} (1 + (n+1)x) dx = \left[\frac{(1 + (n+1)x)^2}{2(n+1)} \right]_{-\frac{1}{n+1}}^0 = \frac{1}{2(n+1)}$$

$$\int_0^{\frac{n}{n+1}} \frac{n}{n+1} c_n dx = \frac{nc_n}{n+1}$$

$$\int_{\frac{n}{n+1}}^1 \frac{n}{n+1} (n+1)(1-x) dx = \left[-\frac{(n+1)(1-x)^2}{2} \right]_{\frac{n}{n+1}}^1 = \frac{n+1}{2(n+1)^2} = \frac{1}{2(n+1)}$$

La condition $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n = 1$ s'écrit $\frac{1}{n+1} + \frac{nc_n}{n+1} = 1$, soit $nc_n = n$, donc $c_n = 1$.

Graphe de f_3 . Avec $c_3 = 1$, f_3 est nulle sur $]-\infty, -\frac{1}{4}[$ et sur $]1, +\infty[$; elle est affine croissante de $(-\frac{1}{4}, 0)$ à $(0, 1)$, constante égale à 1 sur $[0, \frac{3}{4}]$, puis affine décroissante de $(\frac{3}{4}, 1)$ à $(1, 0)$. Sa courbe est un trapèze posé sur l'axe des abscisses, de grande base $[-\frac{1}{4}, 1]$, de petite base $[0, \frac{3}{4}]$ et de hauteur 1; on vérifie que son aire vaut $\frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4} \right) \times 1 = 1$.

Conclusion

$c_n = 1$; f_n est continue sur $\mathbb{R}$ (les valeurs se raccordent en $-\frac{1}{n+1}$, 0 , $\frac{n}{n+1}$ et 1).

b) Pour tout réel x , $F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt$. On calcule selon la position de x .

• Si $x < -\frac{1}{n+1}$: $F_n(x) = 0$.

• Si $-\frac{1}{n+1} \leq x \leq 0$: $F_n(x) = \left[\frac{(1 + (n+1)t)^2}{2(n+1)} \right]_{-\frac{1}{n+1}}^x = \frac{(1 + (n+1)x)^2}{2(n+1)}$.

• Si $0 \leq x \leq \frac{n}{n+1}$: $F_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} + x$.

• Si $\frac{n}{n+1} \leq x \leq 1$:

$$F_n(x) = 1 - \int_x^1 (n+1)(1-t) dt = 1 - \frac{(n+1)(1-x)^2}{2}.$$

• Si $x > 1$: $F_n(x) = 1$.

(Les expressions se raccordent : en $\frac{n}{n+1}$, $\frac{1}{2(n+1)} + \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2(n+1)}$.)

Régularité. D'après a), f_n est continue sur $\mathbb{R}$. Par le théorème fondamental de l'analyse,

$F_n : x \mapsto \int_{-\infty}^x f_n(t) dt = \int_{-1}^x f_n(t) dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f_n continue.

Conclusion

F_n est donnée par les formules ci-dessus et elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $F'_n = f_n$.

c) On étudie la limite de $F_n(x)$ pour chaque réel x .

- Si $x < 0$: dès que $\frac{1}{n+1} < -x$, on a $x < -\frac{1}{n+1}$ et $F_n(x) = 0$. Donc $F_n(x) \rightarrow 0$.
- Si $x = 0$: $F_n(0) = \frac{1}{2(n+1)} \rightarrow 0$.
- Si $0 < x < 1$: dès que $\frac{n}{n+1} \geq x$ (ce qui a lieu pour n assez grand car $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$),
 $F_n(x) = x + \frac{1}{2(n+1)} \rightarrow x$.
- Si $x \geq 1$: $F_n(x) = 1$.

La limite est la fonction F égale à 0 sur $] -\infty, 0]$, à x sur $[0, 1]$ et à 1 sur $[1, +\infty[$: c'est la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$. La convergence a lieu en tout point, donc en particulier en tout point de continuité de F .

Conclusion

(Y_n) converge en loi vers une variable Y de loi uniforme sur $[0, 1]$.

3) a) Notons F la fonction de répartition de X , continue puisque X est à densité. Soit $\varepsilon > 0$. Comme X_{n+1} a même loi que X :

$$P\left(\left|\frac{X_{n+1}}{n+1}\right| > \varepsilon\right) = P(|X| > (n+1)\varepsilon) = 1 - F((n+1)\varepsilon) + F(-(n+1)\varepsilon)$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, $(n+1)\varepsilon \rightarrow +\infty$, donc $F((n+1)\varepsilon) \rightarrow 1$ et $F(-(n+1)\varepsilon) \rightarrow 0$.

Conclusion

$\left(\frac{X_{n+1}}{n+1}\right)$ converge en probabilité vers 0 (aucune hypothèse de moment n'est nécessaire).

b) On encadre la fonction de répartition de D_n ; ce raisonnement direct évite tout argument de type Slutsky. Posons $V_n = \frac{X_{n+1}}{n+1}$, de sorte que $D_n = X_1 - V_n$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.

- Si $D_n \leq x$ et $|V_n| \leq \varepsilon$, alors $X_1 = D_n + V_n \leq x + \varepsilon$. Donc $[D_n \leq x] \subset [X_1 \leq x + \varepsilon] \cup [|V_n| > \varepsilon]$.
- Si $X_1 \leq x - \varepsilon$ et $|V_n| \leq \varepsilon$, alors $D_n \leq x - \varepsilon + \varepsilon = x$. Donc $[X_1 \leq x - \varepsilon] \subset [D_n \leq x] \cup [|V_n| > \varepsilon]$.

Comme X_1 a la fonction de répartition F :

$$F(x - \varepsilon) - P(|V_n| > \varepsilon) \leq P([D_n \leq x]) \leq F(x + \varepsilon) + P(|V_n| > \varepsilon)$$

Soit $\eta > 0$. Par continuité de F en x , on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $F(x + \varepsilon) \leq F(x) + \eta$ et $F(x - \varepsilon) \geq F(x) - \eta$. Par a), il existe n_0 tel que $P(|V_n| > \varepsilon) \leq \eta$ pour $n \geq n_0$. Alors, pour $n \geq n_0$, $|P([D_n \leq x]) - F(x)| \leq 2\eta$.

Conclusion

pour tout réel x , $P([D_n \leq x]) \rightarrow F(x)$: (D_n) converge en loi vers X . On remarque que

$$D_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{X_k}{k} - \frac{X_{k+1}}{k+1} \right)$$

(somme télescopique) : la série aléatoire étudiée converge donc en loi vers X .

c) Les variables X_1 et X_{n+1} sont indépendantes, donc X_1 et $W_n = -\frac{X_{n+1}}{n+1}$ le sont aussi (fonctions de variables indépendantes).

Densité de W_n . Pour $y \in \mathbb{R}$, $P([W_n \leq y]) = P([X_{n+1} \geq -(n+1)y]) = 1 - F(-(n+1)y)$ (la probabilité d'un point est nulle). Par le résultat du cours sur les transformations affines, W_n admet la densité $g_n : y \mapsto (n+1)f(-(n+1)y)$, bornée puisque f l'est.

Convolution. X_1 et W_n sont indépendantes, à densités f et g_n , et ces densités sont bornées. D'après le cours, $D_n = X_1 + W_n$ admet pour densité :

$$f_{D_n}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g_n(x-t) dt = (n+1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(-(n+1)(x-t)) dt$$

Conclusion

$$f_{D_n}(x) = (n+1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f((n+1)(t-x)) dt \text{ pour tout réel } x.$$

d) On choisit pour X la loi uniforme sur $[0, 1]$, de densité bornée $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$ (égale à 1 sur $[0, 1]$ et 0 ailleurs). Pour x réel, $f(t)f((n+1)(t-x))$ vaut 1 si $0 \leq t \leq 1$ et $x \leq t \leq x + \frac{1}{n+1}$, et 0 sinon. Donc $f_{D_n}(x)$ est égal à $(n+1)$ fois la longueur de $[0, 1] \cap \left[x, x + \frac{1}{n+1}\right]$:

- si $x < -\frac{1}{n+1}$ ou $x > 1$: l'intersection est vide ou réduite à un point, $f_{D_n}(x) = 0$;
- si $-\frac{1}{n+1} \leq x \leq 0$: l'intersection est $\left[0, x + \frac{1}{n+1}\right]$, $f_{D_n}(x) = (n+1)x + 1$;
- si $0 \leq x \leq \frac{n}{n+1}$: l'intersection est $\left[x, x + \frac{1}{n+1}\right]$, $f_{D_n}(x) = 1$;
- si $\frac{n}{n+1} \leq x \leq 1$: l'intersection est $[x, 1]$, $f_{D_n}(x) = (n+1)(1-x)$.

Ainsi $f_{D_n} = f_n$ (avec $c_n = 1$) : D_n et Y_n ont la même densité, donc la même loi, et donc la même fonction de répartition F_n . D'après 3) b), (D_n) converge en loi vers X , de loi uniforme sur $[0, 1]$; donc $F_n(x) \rightarrow P([X \leq x])$ en tout réel x .

Conclusion

on retrouve que (Y_n) converge en loi vers la loi uniforme sur $[0, 1]$.

- 4) a) Les variables X_n et X_{n+1} sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Par transformation affine, $\frac{X_n}{n}$ suit $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n^2}\right)$ et $-\frac{X_{n+1}}{n+1}$ suit $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{(n+1)^2}\right)$, et ces deux variables sont indépendantes. Par stabilité de la loi normale pour la somme de variables indépendantes :

Conclusion

U_n suit la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)$.

- b) La somme est télescopique :

$$T_n = \sum_{k=1}^n U_k = X_1 - \frac{X_{n+1}}{n+1} = D_n.$$

Méthode 1 — Application de la question 3.

La densité $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ de X est bornée par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Par 3) b), $T_n = D_n$ converge en loi vers X .

Méthode 2 — Calcul direct de la loi de T_n .

Comme en a), X_1 et $-\frac{X_{n+1}}{n+1}$ sont indépendantes et normales centrées, donc T_n suit $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ avec $\sigma_n^2 = 1 + \frac{1}{(n+1)^2}$. Notons Φ la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour

tout réel x , $P([T_n \leq x]) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma_n}\right)$. Comme $\sigma_n \rightarrow 1$ et Φ est continue, $P([T_n \leq x]) \rightarrow \Phi(x)$.

La méthode 1 est générale (toute densité bornée) mais demande le travail de la question 3; la méthode 2 n'utilise que la stabilité des lois normales, propre à ce cas.

Conclusion

la série

$$\sum_{n \geq 1} U_n$$

converge en loi, vers la loi normale centrée réduite.

c) (i) Les variables U'_k sont indépendantes et U'_k suit $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}\right)$. Par stabilité de la loi normale pour la somme de variables indépendantes, T'_n suit $\mathcal{N}(0, s_n^2)$ avec :

$$s_n^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j^2}$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, les deux sommes tendent vers $\zeta(2)$ et $\zeta(2) - 1$, donc

$s_n^2 \rightarrow s^2 = 2\zeta(2) - 1 = \frac{\pi^2}{3} - 1 > 0$. Pour tout réel x , $P([T'_n \leq x]) = \Phi\left(\frac{x}{s_n}\right) \rightarrow \Phi\left(\frac{x}{s}\right)$ par continuité de Φ , et $\Phi\left(\frac{x}{s}\right)$ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, s^2)$ en x .

Conclusion

(T'_n) converge en loi vers une variable de loi $\mathcal{N}\left(0, \frac{\pi^2}{3} - 1\right)$.

(ii) La loi d'une somme ne dépend pas seulement des lois de ses termes, mais aussi de leur dépendance. Les U_k ne sont pas indépendantes : U_n et U_{n+1} font intervenir toutes deux X_{n+1} , et par bilinéarité de la covariance et indépendance des X_k :

$$\text{Cov}(U_n, U_{n+1}) = \text{Cov}\left(-\frac{X_{n+1}}{n+1}, \frac{X_{n+1}}{n+1}\right) = -\frac{1}{(n+1)^2} \neq 0$$

Ainsi T_n et T'_n n'ont pas la même loi (leurs variances $1 + \frac{1}{(n+1)^2}$ et s_n^2 diffèrent), et leurs limites en loi peuvent être différentes. Les questions 3) b) et 4) b) portent sur les sommes télescopiques T_n , où les compensations entre termes consécutifs ne laissent subsister que $X_1 - \frac{X_{n+1}}{n+1}$.

Conclusion

il n'y a pas de contradiction, car (U'_n) et (U_n) ont les mêmes lois terme à terme mais pas la même loi conjointe.

Partie II. Séries harmoniques « lacunaires »

- 5) a) Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $1_{\mathcal{D}}(k) = 1$ si et seulement si $k = j^2$ avec $j \in \mathbb{N}^*$; la condition $j^2 \leq n$ équivaut à $j \leq \sqrt{n}$, c'est-à-dire $j \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. L'application $j \mapsto j^2$ étant injective sur $\mathbb{N}^*$:

Conclusion

$$h_n(\mathcal{D}) = \sum_{j=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{j^2}.$$

- b) La série

$$\sum \frac{1}{j^2}$$

converge (Riemann, exposant $2 > 1$) de somme $\zeta(2)$. Comme $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \rightarrow +\infty$ (car

$\lfloor \sqrt{n} \rfloor > \sqrt{n} - 1$, $h_n(\mathcal{D})$ tend vers $\zeta(2)$: pour $\eta > 0$, il existe J tel que

$$\left| \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^2} - \zeta(2) \right| \leq \eta$$

pour $m \geq J$, et $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \geq J$ dès que $n \geq J^2$. Or $h_n(\mathcal{D})$ est aussi la somme partielle d'indice n de la série

$$\sum \frac{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}(n)}{n}.$$

Conclusion

$(h_n(\mathcal{D}))$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}(n)}{n} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

c) Inclusion de droite à gauche. Si $m^{1/6} = c \in \mathbb{N}^*$, alors $m = c^6 = (c^3)^2 = (c^2)^3$, donc $m \in \mathcal{D} \cap \mathcal{T}$.

Inclusion de gauche à droite. Soit $m \in \mathcal{D} \cap \mathcal{T} : m = a^2 = b^3$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$. Alors $b^3 = a^2$, donc $\sqrt{b} = \frac{b^{3/2}}{b} = \frac{\sqrt{b^3}}{b} = \frac{a}{b}$ est le quotient de deux entiers. D'après le résultat admis (par contraposée), $b \in \mathcal{D} : b = c^2$ avec $c \in \mathbb{N}^*$. Donc $m = b^3 = c^6$ et $m^{1/6} = c \in \mathbb{N}^*$.

Conclusion

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{T} = \{m \in \mathbb{N}^* ; m^{1/6} \in \mathbb{N}^*\} = \{c^6 ; c \in \mathbb{N}^*\}.$$

d) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{1}_{\mathcal{D} \cup \mathcal{T}}(k) = \mathbf{1}_{\mathcal{D}}(k) + \mathbf{1}_{\mathcal{T}}(k) - \mathbf{1}_{\mathcal{D} \cap \mathcal{T}}(k)$ (on vérifie les quatre cas d'appartenance). Donc :

$$h_n(\mathcal{D} \cup \mathcal{T}) = h_n(\mathcal{D}) + h_n(\mathcal{T}) - h_n(\mathcal{D} \cap \mathcal{T})$$

Comme en a),

$$h_n(\mathcal{T}) = \sum_{j=1}^{\lfloor n^{1/3} \rfloor} \frac{1}{j^3}$$

et, par c),

$$h_n(\mathcal{D} \cap \mathcal{T}) = \sum_{j=1}^{\lfloor n^{1/6} \rfloor} \frac{1}{j^6}.$$

Comme en b), puisque $\lfloor n^{1/3} \rfloor$ et $\lfloor n^{1/6} \rfloor$ tendent vers $+\infty$ et que les séries de Riemann d'exposants 3 et 6 convergent, ces suites tendent vers $\zeta(3)$ et $\zeta(6)$.

Conclusion

$(h_n(\mathcal{D} \cup \mathcal{T}))$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{\mathcal{D} \cup \mathcal{T}}(n)}{n} = \zeta(2) + \zeta(3) - \zeta(6).$$

6) a) Pour $t \in [n, n+1]$:

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2t-1} = \frac{2(t-n)}{(2n-1)(2t-1)}$$

On a $0 \leq t-n \leq 1$ et $2t-1 \geq 2n-1 > 0$, donc $0 \leq \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2t-1} \leq \frac{2}{(2n-1)^2}$. En intégrant sur $[n, n+1]$, intervalle de longueur 1, par positivité et croissance de l'intégrale :

Conclusion

$$0 \leq u_n \leq \frac{2}{(2n-1)^2}.$$

b) Les entiers impairs de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sont les $2k-1$ avec $1 \leq k$ et $2k-1 \leq n$, c'est-à-dire $k \leq \frac{n+1}{2}$, soit $k \leq m$ où $m = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \geq 1$. Donc

$$h_n(\mathcal{J}) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1}.$$

Par définition, $\frac{1}{2k-1} = u_k + \int_k^{k+1} \frac{dt}{2t-1}$. En sommant pour k de 1 à m et par la relation de Chasles :

$$h_n(\mathcal{J}) = \sum_{k=1}^m u_k + \int_1^{m+1} \frac{dt}{2t-1}$$

Enfin $m+1 = \left\lfloor \frac{n+1}{2} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor$.

Conclusion

$$h_n(\mathcal{J}) = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} u_k + \int_1^{\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor} \frac{1}{2t-1} dt.$$

c) On distingue selon la parité de n .

- Si n est impair, $\frac{n+3}{2}$ est entier et $2 \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1 = n+2$.
- Si n est pair, $\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor = \frac{n+2}{2}$ et $2 \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1 = n+1$.

Dans les deux cas, $\frac{1}{n} \left(2 \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1 \right) = 1 + \frac{a}{n}$ avec $a \in \{1, 2\}$. Comme $\ln$ est croissante et que $\ln(1+y) \leq y$ pour $y \geq 0$ (concavité de $\ln$, tangente en 1) :

$$0 = \ln 1 \leq \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right) \leq \frac{a}{n} \leq \frac{2}{n}$$

Conclusion

$$0 \leq \ln \left(\frac{1}{n} \left(2 \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1 \right) \right) \leq \frac{2}{n}.$$

d) Convergence. Par a), $0 \leq u_n \leq \frac{2}{(2n-1)^2}$ et $\frac{2}{(2n-1)^2} \sim \frac{1}{2n^2}$, terme général d'une série convergente. Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum u_n$$

converge.

Limite. Notons $m = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. L'intégrale de b) vaut

$$\left[\frac{1}{2} \ln(2t-1) \right]_1^{m+1} = \frac{1}{2} \ln \left(2 \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1 \right). \text{ Comme } \ln(\sqrt{n}) = \frac{1}{2} \ln n :$$

$$h_n(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{n}) = \sum_{k=1}^m u_k + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{n} \left(2 \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1 \right) \right)$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, $m \geq \frac{n}{2}$ tend vers $+\infty$, donc la somme tend vers δ ; par c), le second terme est compris entre 0 et $\frac{1}{n}$, donc tend vers 0.

Conclusion

$$\sum u_n$$

converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n})) = \delta.$

e) La série

$$\sum u_k$$

converge, donc son reste est bien défini et positif. On majore $u_k \leq \frac{2}{(2k-1)^2}$ (par a)) par le terme général d'une série dont on sait calculer le reste.

Méthode 1 — Majoration télescopique.

Pour $k \geq 2$, $(2k-1)^2 \geq (2k-3)(2k-1) > 0$, donc :

$$u_k \leq \frac{2}{(2k-3)(2k-1)} = \frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k-1}$$

Pour $N \geq n+1$ (et $k \geq n+1 \geq 2$), la somme télescopique donne

$$\sum_{k=n+1}^N u_k \leq \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2N-1} \leq \frac{1}{2n-1}.$$

On fait tendre N vers $+\infty$.

Méthode 2 — Comparaison série-intégrale.

La fonction $t \mapsto \frac{2}{(2t-1)^2}$ est décroissante sur $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$. Pour $k \geq 2$ et $t \in [k-1, k]$,

$\frac{2}{(2k-1)^2} \leq \frac{2}{(2t-1)^2}$, donc $u_k \leq \int_{k-1}^k \frac{2 dt}{(2t-1)^2}$. Pour $N \geq n+1$:

$$\sum_{k=n+1}^N u_k \leq \int_n^N \frac{2 dt}{(2t-1)^2} = \left[-\frac{1}{2t-1} \right]_n^N = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2N-1} \leq \frac{1}{2n-1}$$

La méthode 1 repose sur une décomposition astucieuse propre aux fractions rationnelles ; la méthode 2 est la technique générale de comparaison avec une intégrale, utilisable dès que le majorant est une fonction monotone de k .

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \frac{1}{2n-1}.$$

f) Soit $n \geq 3$ et $m = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. D'après le calcul de d) :

$$\delta - (h_n(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{n})) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} u_k - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{n} \left(2 \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1 \right) \right)$$

Par c), le terme logarithmique est compris entre 0 et $\frac{1}{n}$. Par e) et la positivité des u_k , le

reste est compris entre 0 et $\frac{1}{2m-1}$. Or $m \geq \frac{n}{2}$, donc $2m-1 \geq n-1 \geq n-2 > 0$ et

$$\frac{1}{2m-1} \leq \frac{1}{n-2}.$$

Conclusion

$$\text{pour tout } n \geq 3, \quad -\frac{1}{n} \leq \delta - (h_n(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{n})) \leq \frac{1}{n-2}.$$

g) Code adapté en Python.

Principe. La variable n reste impaire ($3, 5, 7, \dots$) et s contient $h_n(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{n})$. Lorsqu'on passe de $n-2$ à n (n impair), $h_n(\mathcal{J}) = h_{n-2}(\mathcal{J}) + \frac{1}{n}$ (le seul nouvel impair est n , et $n-1$ est pair) et $\ln(\sqrt{n}) = \ln(\sqrt{n-2}) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n}{n-2}\right)$. Au départ, $h_3(\mathcal{J}) = 1 + \frac{1}{3}$, ce qui explique la ligne (3).

(i) Avec $\text{eps} = 0.2$:

- après la ligne (3) : $n = 3$, $s = h_3(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{3}) = \frac{4}{3} - \frac{\ln 3}{2} \approx 0,7840$; le test $\frac{1}{1} > 0.2$ est vrai;
- premier passage : $n = 5$, $s = h_5(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{5}) = \frac{23}{15} - \frac{\ln 5}{2} \approx 0,7286$; le test $\frac{1}{3} > 0.2$ est vrai;
- second passage : $n = 7$, $s = h_7(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{7}) = \frac{176}{105} - \frac{\ln 7}{2} \approx 0,7032$; le test $\frac{1}{5} > 0.2$ est faux et la fonction renvoie cette valeur.

Conclusion

s prend successivement les valeurs $h_3(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{3})$, $h_5(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{5})$ et $h_7(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{7})$.

(ii) D'après le principe ci-dessus, il faut ajouter $\frac{1}{n}$ et retrancher $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{n}{n-2}\right)$, c'est-à-dire ajouter $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{n-2}{n}\right)$. Fonction complète :

Python

```
import numpy as np
```

```
def delta(eps):
```

```
# (1)
```

```

n = 3                                # (2)
s = 1 + 1/3 - np.log(3)/2           # (3)
while 1/(n-2) > eps:                 # (4)
    n = n + 2                         # (5)
    s = s + 1/n + np.log((n-2)/n)/2   # (6)
return s                             # (7)

```

Code exécuté : `delta(0.2)` renvoie environ 0,7032, après les valeurs intermédiaires 0,7840 et 0,7286, qui coïncident avec les valeurs exactes de (i) ; `delta(0.0001)` renvoie environ 0,63523.

Conclusion

la ligne (6) est $s = s + 1/n + \text{np.log}((n-2)/n)/2$.

(iii) Deux raisons.

- Majoration de l'erreur. À la sortie de la boucle, n est impair, $n \geq 3$ et $\frac{1}{n-2} \leq \text{eps}$. Par f), $|\delta - s| \leq \max\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-2}\right) = \frac{1}{n-2} \leq \text{eps}$: la valeur renvoyée approche δ à eps près.
- Terminaison. Pour tout $\text{eps} > 0$, comme $\frac{1}{n-2} \rightarrow 0$ quand n augmente de 2 à chaque passage, la condition de la boucle devient fausse après un nombre fini de passages.

Conclusion

la précision eps peut être choisie arbitrairement petite (aux erreurs d'arrondi du calcul en virgule flottante près), au prix d'un nombre de passages de l'ordre de $\frac{1}{2\text{eps}}$.

Partie III. Séries de Riemann alternées

7) a) (i) Posons $s_0 = 0$, de sorte que $x_k = s_k - s_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$. Pour $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k^\beta} = \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{k^\beta} - \sum_{k=1}^n \frac{s_{k-1}}{k^\beta} = \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{k^\beta} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{(k+1)^\beta}$$

(changement d'indice $k-1 \rightarrow k$ dans la seconde somme, dont le terme $k=1$ est nul).

En isolant le terme $k=n$ de la première somme :

Conclusion

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k^\beta} = \frac{s_n}{n^\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right)$$

(transformation d'Abel).

(ii) Premier terme. $\left| \frac{s_n}{n^\beta} \right| \leq M n^{\alpha-\beta} \rightarrow 0$ car $\alpha - \beta < 0$.

Série du second terme. Comme $\beta > \alpha \geq 0$, la fonction $t \mapsto t^{-\beta}$ est dérivable et décroissante sur $[k, k+1]$, de dérivée $-\beta t^{-\beta-1}$. Par l'inégalité des accroissements finis, $0 \leq \frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \leq \beta k^{-\beta-1}$. Donc :

$$\left| s_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right) \right| \leq M \beta k^{\alpha-\beta-1}$$

et $\beta + 1 - \alpha > 1$: la série de Riemann correspondante converge. La série

$$\sum s_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right)$$

est absolument convergente, donc convergente.

Par (i), la somme partielle

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k^\beta}$$

est la somme d'une suite tendant vers 0 et d'une somme partielle d'une série convergente.

Conclusion

la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n^\beta}$$

converge.

- b)** On applique a) avec $x_n = (-1)^n$: s_n vaut -1 si n est impair et 0 si n est pair, donc $|s_n| \leq 1 = 1 \times n^0$. L'hypothèse est satisfaite avec $\alpha = 0$ et $M = 1$, et tout réel $x > 0$ vérifie $x > \alpha$.

Conclusion

pour tout $x > 0$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

converge.

- 8)** a) Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, donc $e^{tX_1}, \dots, e^{tX_n}$ aussi (lemme des coalitions). Ce sont des variables finies, qui admettent une espérance : $E(e^{tX_k}) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$. L'espérance d'un produit de variables indépendantes est le produit des espérances :

Conclusion

$$E(e^{tS_n}) = E\left(\prod_{k=1}^n e^{tX_k}\right) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n.$$

b) Par la série exponentielle,

$$e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$$

et

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^k}{k!};$$

les termes d'indice impair se compensent :

$$\frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^{2j}}{(2j)!}$$

et

$$\frac{t^2}{2} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^{2j}}{2^j j!}$$

Or

$$(2j)! = \prod_{i=1}^j (2i)(2i-1) \geq \prod_{i=1}^j (2i) = 2^j j!$$

(avec égalité pour $j = 0$). Donc $0 \leq \frac{t^{2j}}{(2j)!} \leq \frac{t^{2j}}{2^j j!}$ pour tout j , et les deux séries convergent : on somme ces inégalités.

Conclusion

$$\frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$

- c) Comme $t > 0$ et que $\exp$ est strictement croissante, $[S_n > s] \subset [e^{tS_n} \geq e^{ts}]$. La variable e^{tS_n} est positive et admet une espérance ; par l'inégalité de Markov, puis a) et b) :

$$P([S_n > s]) \leq P([e^{tS_n} \geq e^{ts}]) \leq \frac{E(e^{tS_n})}{e^{ts}} \leq \frac{\left(e^{\frac{t^2}{2}}\right)^n}{e^{ts}}$$

Conclusion

$$P([S_n > s]) \leq \exp\left(\frac{nt^2}{2} - ts\right).$$

- d) Choix de t . La fonction $t \mapsto \frac{nt^2}{2} - ts$ est un trinôme minimal en $t = \frac{s}{n} > 0$, de valeur $-\frac{s^2}{2n}$. Avec ce choix dans c) : $P([S_n > s]) \leq \exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right)$.

Symétrie. Les variables $-X_1, \dots, -X_n$ sont indépendantes et $-X_k$ a même loi que X_k .

Par le rappel du début, $-S_n$ a même loi que S_n , donc

$$P([S_n < -s]) = P([-S_n > s]) = P([S_n > s]).$$

Enfin $[|S_n| > s] = [S_n > s] \cup [S_n < -s]$, union disjointe.

Conclusion

$$P([|S_n| > s]) \leq 2 \exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right).$$

- 9) a) Pour tout k , $|S_k|$ est une variable aléatoire, donc $[|S_k| > k^\alpha] \in \mathcal{A}$. Une tribu est stable par réunion dénombrable et par intersection dénombrable.

Conclusion

$$\mathcal{C}_\alpha \in \mathcal{A}.$$

b) Par 8) d) avec $s = n^\alpha > 0$:

$$0 \leq P(|S_n| > n^\alpha) \leq 2 \exp\left(-\frac{n^{2\alpha-1}}{2}\right)$$

Posons $a = 2\alpha - 1 > 0$. Alors $n^2 \exp\left(-\frac{n^a}{2}\right) = v^{2/a} e^{-v/2}$ avec $v = n^a \rightarrow +\infty$, et cette quantité tend vers 0 par croissances comparées. Donc $2 \exp\left(-\frac{n^{2\alpha-1}}{2}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, terme général d'une série convergente. Par comparaison de séries à termes positifs :

Conclusion

si $\alpha > \frac{1}{2}$, la série

$$\sum_{n \geq 1} P(|S_n| > n^\alpha)$$

converge.

c) Soit $\alpha > \frac{1}{2}$ et $A_k = [|S_k| > k^\alpha]$. Pour tout n , $\mathcal{C}_\alpha \subset \bigcup_{k \geq n} A_k$. Pour $N \geq n$, la sous-additivité finie donne

$$P\left(\bigcup_{k=n}^N A_k\right) \leq \sum_{k=n}^N P(A_k) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k);$$

la suite d'événements $\bigcup_{k=n}^N A_k$ est croissante en N , de réunion $\bigcup_{k \geq n} A_k$, donc par continuité monotone :

$$P(\mathcal{C}_\alpha) \leq P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$$

Le majorant est le reste d'une série convergente (par b)), il tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

Conclusion

$$P(\mathcal{C}_\alpha) = 0 \text{ pour tout } \alpha > \frac{1}{2}.$$

10) a) Soit $0 \leq \alpha < 1$ et $\omega \in \overline{\mathcal{C}_\alpha}$. Par les lois de Morgan, $\overline{\mathcal{C}_\alpha} = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} [|S_k| \leq k^\alpha]$: il existe n_0 tel que $|S_k(\omega)| \leq k^\alpha$ pour tout $k \geq n_0$.

Posons $x_k = X_k(\omega)$, de sorte que $s_k = S_k(\omega)$, et $M = \max\left(1, \max_{1 \leq k < n_0} \frac{|S_k(\omega)|}{k^\alpha}\right) > 0$ (le second maximum est omis si $n_0 = 1$). Alors $|s_k| \leq M k^\alpha$ pour tout $k \geq 1$. Par 7) a) avec $\beta = 1 > \alpha$, la série

$$\sum \frac{X_n(\omega)}{n}$$

converge, c'est-à-dire $\omega \in \mathcal{C}$.

Conclusion

$$\overline{\mathcal{C}_\alpha} \subset \mathcal{C} \text{ pour } 0 \leq \alpha < 1.$$

b) Prenons $\alpha = \frac{3}{4}$, qui vérifie $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Par 9) c), $P(\overline{\mathcal{C}_\alpha}) = 1 - P(\mathcal{C}_\alpha) = 1$; par a) et la croissance de P ($\mathcal{C} \in \mathcal{A}$ est admis), $1 = P(\overline{\mathcal{C}_\alpha}) \leq P(\mathcal{C}) \leq 1$.

Conclusion

$$P(\mathcal{C}) = 1.$$

- c) $P(E(\varepsilon)) = 0$. Soit $\omega \in \mathcal{C}$. Alors $K_n(\omega) \rightarrow K(\omega)$, donc il existe N tel que $|K(\omega) - K_n(\omega)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N : \omega \notin \bigcup_{n \geq N} [|K - K_n| > \varepsilon]$, donc $\omega \notin E(\varepsilon)$. Ainsi $E(\varepsilon) \subset \overline{\mathcal{C}}$ et $P(E(\varepsilon)) \leq 1 - P(\mathcal{C}) = 0$ (les événements $[|K - K_n| > \varepsilon]$ sont dans $\mathcal{A}$ car $K - K_n$ est une variable aléatoire).

Convergence en probabilité. Posons $G_N = \bigcup_{n \geq N} [|K - K_n| > \varepsilon]$. La suite (G_N) est décroissante et $\bigcap_{N \geq 1} G_N = E(\varepsilon)$. Par continuité monotone, $P(G_N) \rightarrow P(E(\varepsilon)) = 0$. Comme $[|K - K_N| > \varepsilon] \subset G_N$, on obtient $0 \leq P([|K - K_N| > \varepsilon]) \leq P(G_N) \rightarrow 0$.

Conclusion

$P(E(\varepsilon)) = 0$ et (K_n) converge en probabilité vers K . La convergence en loi de (K_n) vers K est ensuite admise par l'énoncé.

- 11) a) Les B_k admettent une espérance $\frac{1}{2}$ et une variance $\frac{1}{4}$. Par linéarité :

$$E(H_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Les B_k étant indépendantes, la variance de la somme est la somme des variances :

$$V(H_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} V(B_k) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

La série harmonique diverge vers $+\infty$ et

$$\sum \frac{1}{k^2}$$

converge vers $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Conclusion

$$E(H_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty$$

et

$$V(H_n) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{24}.$$

- b)** Soit $r > 0$. Par a), il existe n_0 tel que $E(H_n) > r$ pour $n \geq n_0$. Pour un tel n , si $H_n \leq r$, alors $E(H_n) - H_n \geq E(H_n) - r > 0$, donc $[H_n \leq r] \subset [|H_n - E(H_n)| \geq E(H_n) - r]$.

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et $V(H_n) \leq \frac{\pi^2}{24}$:

$$0 \leq P([H_n \leq r]) \leq \frac{V(H_n)}{(E(H_n) - r)^2} \leq \frac{\pi^2}{24(E(H_n) - r)^2} \rightarrow 0$$

Conclusion

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P([H_n \leq r]) = 0$: la série aléatoire

$$\sum \frac{B_n}{n}$$

ne converge pas en loi (sa somme partielle «part à l'infini»).

- c)** Code adapté en Python.

- (i)** On veut, pour chaque simulation i , la valeur de

$$\sum_{k=1}^n \frac{B_k - \mathbf{1}_{\mathcal{J}}(k)}{k} = H_n - h_n(\mathcal{J}).$$

Il faut donc ajouter à la réalisation de B_k la quantité $-\mathbf{1}_{\mathcal{J}}(k)$, qui vaut -1 si k est impair

et 0 si k est pair, c'est-à-dire $\frac{(-1)^k - 1}{2}$. Fonction complète :

Python

```
import numpy as np

def simul(n, p):                                     # (1)
    y = np.zeros(p)                                  # (2)
    for i in range(p):                               # (3)
        for k in range(1, n + 1):                   # (4)
            y[i] = y[i] + (np.random.binomial(1, 0.5) + ((-1)**k - 1)/2) / k # (5)
    return y                                          # (6)
```

La boucle sur k parcourt $1, \dots, n$ (la borne supérieure de range est exclue) ; chaque appel à `np.random.binomial(1, 0.5)` fournit une nouvelle réalisation indépendante d'une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Conclusion

la ligne (5) est complétée, comme dans le code ci-dessus, par l'expression Python de $\frac{(-1)^k - 1}{2}$; une écriture équivalente est `-(k % 2)`, où `k % 2` est le reste de la division euclidienne de k par 2.

- (ii) On simule un grand nombre p de réalisations pour chaque valeur de n , puis on trace l'histogramme normalisé. Par exemple :

Python

```
import matplotlib.pyplot as plt

for n in [50, 100, 200]:
    y = simul(n, 10000)
    plt.hist(y, 10, density=True)
    plt.show()
```

Code exécuté (avec $p = 10000$) : les moyennes empiriques obtenues sont environ $-0,33$,

$-0,35$ et $-0,35$, et les variances empiriques (convention

$$\frac{1}{p} \sum (y_i - \bar{y})^2$$

de np.var) environ 0,40, 0,41 et 0,41 ; les histogrammes ont l'allure de ceux de l'énoncé (une dizaine de classes entre environ -2 et $1,4$, sommet voisin de 0,5). Le nombre exact de simulations et de classes utilisés dans l'énoncé ne peut pas être déterminé avec certitude à partir de la figure.

Conclusion

les histogrammes s'obtiennent en appliquant simul avec $n = 50, 100, 200$ et un grand p , puis `plt.hist(y, 10, density=True)` et `plt.show()`.

(iii) Les trois histogrammes ont pratiquement la même forme, la même position (sommet un peu à gauche de 0) et la même dispersion, alors que n double d'un histogramme à l'autre. La distribution de $H_n - h_n(\mathcal{I})$ semble donc se stabiliser quand n augmente, ce qui suggère que les fonctions de répartition convergent vers une fonction de répartition limite. Une simulation ne constitue pas une preuve : la convergence est établie en 12).

Conclusion

la stabilité de l'allure des histogrammes quand n grandit suggère une convergence en loi.

12) a) Pour tout k , $B'_k = \frac{1 + X_k}{2}$, donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{B'_k}{k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \frac{K_n}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}.$$

Par ailleurs

$$h_n(\mathcal{J}) = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{1}_{\mathcal{J}}(k)}{k},$$

donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{B'_k}{k} - h_n(\mathcal{J}) = \frac{K_n}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1 - 2\mathbf{1}_{\mathcal{J}}(k)}{2k}$$

Or $1 - 2\mathbf{1}_{\mathcal{J}}(k)$ vaut $1 - 2 = -1$ si k est impair et 1 si k est pair : c'est $(-1)^k$.

Conclusion

$$\sum_{k=1}^n \frac{B'_k}{k} - h_n(\mathcal{J}) = \frac{K_n}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k}.$$

b) Étape 1 : même loi. Les B'_k sont indépendantes (fonctions des X_k indépendantes) et suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ ($B'_k = 1$ si et seulement si $X_k = 1$). Par le rappel du début, $H_n - h_n(\mathcal{J})$ a même loi que $W_n = \frac{K_n}{2} + c_n$, où

$$c_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k}.$$

Étape 2 : limite de c_n . Pour $t \in [0, 1]$,

$$\sum_{k=1}^n (-t)^{k-1} = \frac{1 - (-t)^n}{1 + t}$$

(somme géométrique, $-t \neq 1$). En intégrant sur $[0, 1]$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = \ln 2 - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

et $0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$. Donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \rightarrow \ln 2$$

et

$$c_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \rightarrow \mu = -\frac{\ln 2}{2}.$$

Étape 3 : convergence en probabilité de W_n . Posons $W = \frac{K}{2} + \mu$. Pour $\varepsilon > 0$, dès que

$$|c_n - \mu| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ (ce qui a lieu pour } n \text{ assez grand), } |W_n - W| \leq \frac{|K_n - K|}{2} + |c_n - \mu|, \text{ donc } [|W_n - W| > \varepsilon] \subset [|K_n - K| > \varepsilon]. \text{ Par 10) c), } P([|W_n - W| > \varepsilon]) \rightarrow 0.$$

Étape 4 : convergence en loi, par encadrement des fonctions de répartition (même raisonnement qu'en 3) b), sans argument de type Slutsky). Soit x un point de continuité de la fonction de répartition F_W de W , et $\varepsilon > 0$. Comme en 3) b) :

$$F_W(x - \varepsilon) - P([|W_n - W| > \varepsilon]) \leq P([W_n \leq x]) \leq F_W(x + \varepsilon) + P([|W_n - W| > \varepsilon])$$

Soit $\eta > 0$. Par continuité de F_W en x , on choisit ε tel que $F_W(x + \varepsilon) \leq F_W(x) + \eta$ et $F_W(x - \varepsilon) \geq F_W(x) - \eta$; par l'étape 3, pour n assez grand, $|P([W_n \leq x]) - F_W(x)| \leq 2\eta$. Donc $P([W_n \leq x]) \rightarrow F_W(x)$.

Comme $P([H_n - h_n(\mathcal{J}) \leq x]) = P([W_n \leq x])$ (étape 1), la même limite vaut pour $H_n - h_n(\mathcal{J})$.

Conclusion

$(H_n - h_n(\mathcal{J}))$ converge en loi vers $\lambda K + \mu$ avec $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\mu = -\frac{\ln 2}{2}$. C'est cohérent avec les histogrammes de 11) c) : par symétrie, K est d'espérance nulle si elle en admet une, et le centre observé, environ $-0,35$, est proche de $-\frac{\ln 2}{2} \approx -0,347$; la variance observée, environ $0,41$, est proche de $\lim V(H_n) = \frac{\pi^2}{24} \approx 0,411$.

Relevé des adaptations

- Question 6) g) : code adapté en Python. La fonction Scilab `delta` est réécrite en Python (`log` devient `np.log`, `while ... end` devient une boucle `while` indentée, `endfunction` devient `return s`), en conservant la numérotation des lignes et le blanc de la ligne (6) ; l'énoncé précise que `np.log` est le logarithme népérien. Justification : seul le langage Python est au programme.
- Question 11) c) : code adapté en Python. La fonction Scilab `simul` est réécrite en Python (`zeros(p,1)` devient `np.zeros(p)` avec des indices de 0 à $p-1$, `grand(1,1,'bin',1,0.5)` devient `np.random.binomial(1, 0.5)`), en conservant la numérotation et le blanc de la ligne (5). L'énoncé rappelle la syntaxe de `np.random.binomial`, `np.zeros`, `plt.hist(y, m, density=True)` et `plt.show()`, nécessaires pour (ii). Justification : seul le langage Python est au programme ; les commandes utilisées sont expliquées dans l'énoncé.
- Question 11) c) (ii), figure : les trois histogrammes sont reproduits dans le fichier compagnon `sujet_hec_escp_maths2_2018_histogrammes.png` (extrait de la figure originale) et décrits dans l'énoncé. Justification : conservation des données nécessaires dans un format Markdown.
- Questions 3) b) et 12) b) : énoncés conservés ; les convergences en loi sont démontrées par encadrement des fonctions de répartition, sans recours au théorème de Slutsky ni à un résultat général hors programme.