



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques

2017

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème :

- pour tout entier naturel n , $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n ;
- on identifie

$$P = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$$

à la fonction polynomiale

$$x \mapsto \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k,$$

avec la convention $0^0 = 1$.

Le problème porte sur l'approximation d'une fonction réelle par des fonctions polynomiales. La partie I étudie les polynômes de Bernstein ; les parties II et III sont consacrées aux polynômes d'interpolation de Lagrange et sont indépendantes de la partie I.

Partie I — Quelques propriétés des polynômes de Bernstein

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$, on définit le polynôme

$$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

On pose $A_k = X^k$ pour $0 \leq k \leq n$ et on note $\mathcal{C}_n = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit T_n l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$T_n(P)(X) = \sum_{k=0}^n P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X).$$

1. Dans cette question uniquement, on choisit $n = 2$.

1.a) Déterminer la matrice K_2 de la famille $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ dans la base $\mathcal{C}_2$.

1.b) En déduire que $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

1.c) Calculer $T_2(A_0)$, $T_2(A_1)$ et $T_2(A_2)$; déterminer la matrice H_2 de T_2 dans $\mathcal{C}_2$. Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de T_2 .

2. On revient au cas général où $n \geq 1$.

2.a) Montrer que $(B_{n,0}, B_{n,1}, \dots, B_{n,n})$ est libre; en déduire que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.b) Montrer que T_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.c) Calculer $T_n(A_0)$ et montrer que $T_n(A_1) = A_1$.

2.d) Montrer que, pour tout $0 \leq k \leq n$, le degré de $T_n(A_k)$ est égal à k .

Pour établir ce résultat, on pourra utiliser, sans la démontrer, la propriété suivante : pour $0 \leq k \leq n-1$,

$$T_n(A_{k+1})(X) = \frac{1}{n}X(1-X)(T_n(A_k))'(X) + XT_n(A_k)(X).$$

La notation $(T_n(A_k))'$ désigne la dérivée du polynôme $T_n(A_k)$.

2.e) Pour $0 \leq k \leq n$, soit α_k le coefficient de X^k dans $T_n(A_k)$. Calculer α_k en fonction de k et n . L'automorphisme T_n est-il diagonalisable?

3. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On pose, pour $n \geq 1$ et $z \in [0, 1]$,

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(z).$$

Fixons $z \in [0, 1]$. Sur un même espace probabilisé, soit Z_n une variable suivant la loi binomiale de paramètres n et z . On pose $\bar{Z}_n = Z_n/n$.

3.a) Montrer que $(\bar{Z}_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers z .

3.b) Justifier l'existence de $M = \max_{[0,1]} |f|$.

3.c) Soit $\varepsilon > 0$. On note $U_n = \{|f(\bar{Z}_n) - f(z)| > \varepsilon\}$, $\mathbf{1}_{U_n}$ sa variable indicatrice, et $\overline{U_n}$ l'événement contraire. Établir

$$|f(\bar{Z}_n) - f(z)| \leq 2M\mathbf{1}_{U_n} + \varepsilon\mathbf{1}_{\overline{U_n}}.$$

3.d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(f(\bar{Z}_n)) = f(z)$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) = f(z)$.

4.a) Compléter le code Python suivant afin qu'un appel à `binom(n, z)` renvoie une réalisation d'une loi binomiale de paramètres n et z .

Python

```
import numpy as np

def binom(n, z):
    Z = ...
    return Z
```

4.b) Soient la fonction Python `f` et la variable `z` définies par

Python

```
import numpy as np

def f(x):
    if x == 0:
        return 0.0
    return -x * np.log(x)

z = 0.4
```

On considère le code suivant, utilisant la fonction `binom` de la question 4.a :

Python

```
n = 100
N = 1000
S = 0.0
for k in range(N):
    S = S + f(binom(n, z) / n)
print(S / N)
```

Ce code affiche une valeur approchée d'une certaine quantité. Laquelle ? Cette valeur est le résultat de la mise en œuvre de certaines méthodes. Lesquelles ?

Partie II — Les polynômes d'interpolation de Lagrange

5. Soient $n \geq 1$ et $x_0, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts. On définit $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ par

$$\Phi(P) = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)).$$

5.a) Montrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

5.b) On note $(e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ l'unique polynôme vérifiant $\Phi(L_i) = e_i$. Montrer que

$$L_i(X) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

5.c) Soit Ψ l'application définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ par

$$\Psi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k).$$

Vérifier que Ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On munit cet espace de ce produit scalaire. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ en est une base orthonormée.

5.d) Expliciter la matrice A de passage de $(L_0, \dots, L_n)$ à la base canonique $\mathcal{C}_n$. On adopte la convention selon laquelle les colonnes de la matrice de passage sont les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne.

5.e) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P_f(x_i) = f(x_i)$ pour $0 \leq i \leq n$. Ce polynôme est appelé polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, \dots, x_n$. Exprimer P_f dans la base $(L_0, \dots, L_n)$.

6. Soient $x_0, \dots, x_n$ dans $[a, b]$, avec $a < b$ et $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$. Soit f de classe C^{n+1} sur $[a, b]$ et $\bar{x} \in [a, b]$ distinct des x_i .

On note P_f le polynôme d'interpolation aux points $x_0, \dots, x_n$ et $Q_f \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ celui aux points $x_0, \dots, x_n, \bar{x}$. On pose

$$w(X) = \prod_{k=0}^n (X - x_k).$$

6.a) Établir l'existence de $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $Q_f(t) - P_f(t) = \delta w(t)$ pour tout $t \in [a, b]$.

6.b) Soit $h(t) = f(t) - Q_f(t)$. Montrer que h s'annule aux $n + 2$ points $\bar{x}, x_0, \dots, x_n$. En déduire qu'il existe $\theta \in (a, b)$ tel que $h^{(n+1)}(\theta) = 0$.

6.c) Établir

$$f(\bar{x}) - P_f(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} w(\bar{x}).$$

6.d) En déduire que, pour tout $t \in [a, b]$,

$$|f(t) - P_f(t)| \leq \frac{|w(t)|}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|.$$

Partie III — Exemple d'interpolation et phénomène de Runge

Dans cette partie, $n \in \mathbb{N}^*$ n'est plus fixé. On pose $x_{k,n} = -1 + 2k/n$ pour $0 \leq k \leq n$.

Pour $\rho > 0$, on définit $f_\rho(x) = 1/(x^2 + \rho^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note $P_{f_\rho,n}$ son polynôme d'interpolation aux points $x_{0,n}, \dots, x_{n,n}$ et

$$w_n(X) = \prod_{k=0}^n (X - x_{k,n}).$$

On recherche des conditions suffisantes de convergence de $(P_{f_\rho,n}(x))$ vers $f_\rho(x)$ pour x dans un intervalle de $\mathbb{R}$.

7.a) Justifier que f_ρ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

7.b) Montrer que, pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, $|f_\rho^{(n)}(x)| = |f_\rho^{(n)}(-x)|$.

7.c) Montrer que, si $|x| < \rho$,

$$\frac{1}{x^2 + \rho^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}} x^{2k}.$$

8. Pour $\rho > 0$, on pose $v(x) = \rho^2/(\rho^2 - x^2)$ pour $x \in (-\rho, \rho)$.

On admet les deux identités particulières suivantes : pour tout entier $r \geq 1$ et tout $|x| < \rho$,

$$f_\rho^{(r)}(x) = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ 2k \geq r}} \frac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}} \frac{(2k)!}{(2k-r)!} x^{2k-r},$$

$$v^{(r)}(x) = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ 2k \geq r}} \frac{1}{\rho^{2k}} \frac{(2k)!}{(2k-r)!} x^{2k-r}.$$

Ces deux séries convergent absolument aux points considérés. Pour un terme d'exposant nul, on conserve la convention $0^0 = 1$.

8.a) Déterminer les réels p, q tels que $v(x) = p/(\rho - x) + q/(\rho + x)$ pour tout $x \in (-\rho, \rho)$.

8.b) Comparer $|v^{(n)}(x)|$ et $|v^{(n)}(-x)|$ pour $n \geq 1$ et $|x| < \rho$.

8.c) Montrer que, pour $n \geq 1$ et $|x| < \rho$,

$$|f_\rho^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{\rho^2} |v^{(n)}(x)|.$$

8.d) On suppose $\rho > 1$. Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$ et $n \geq 1$,

$$|f_\rho^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{\rho} \frac{n!}{(\rho - 1)^{n+1}}.$$

9. Soit $x \in [-1, 1]$ distinct des $x_{k,n}$, et soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $x \in (x_{k,n}, x_{k+1,n})$.

9.a) Établir

$$|w_n(x)| \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} (k+1)!(n-k)! \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} n!.$$

9.b) Sans utiliser de formule asymptotique supposée connue pour les factorielles, montrer qu'il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in [-1, 1]$,

$$|w_n(x)| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1}.$$

On pourra poser $s_n = \ln(n!) - (n + \frac{1}{2}) \ln n + n$, établir la convergence de (s_n) par un développement limité de $\ln(1+t)$ en 0, puis en déduire une majoration de $n!$.

9.c) Dédire des questions 6.d, 8.d et 9.b qu'une condition suffisante pour avoir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_\rho(x) - P_{f_\rho, n}(x)| = 0 \text{ pour tout } x \in [-1, 1] \text{ est } \rho > 1 + 2/e.$$

10.a) On pose, pour $\rho > 0$,

$$H(\rho) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \ln(t^2 + \rho^2) dt.$$

À l'aide d'une intégration par parties, calculer $H(\rho)$. Montrer que H est prolongeable par continuité en 0; on note encore H la fonction prolongée.

10.b) Montrer que H réalise une bijection strictement croissante de $[0, +\infty)$ sur un intervalle à déterminer.

10.c) Montrer qu'il existe un unique $\rho_0 > 0$ tel que $H(\rho_0) = \ln 2 - 1$. Montrer que $\rho_0 < 1$. On donne $\ln 2 \simeq 0,693$.

10.d) Pour $\rho > 0$, on définit le nombre réel

$$D_n(\rho) = \prod_{k=0}^n \sqrt{x_{k,n}^2 + \rho^2}.$$

Vérifier que $D_n(\rho) > 0$ et montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln D_n(\rho) = H(\rho).$$

11. La commande `np.arctan(x)` renvoie l'arctangente de x , en radians. Le programme Python suivant renvoie une valeur approchée d'un réel s_0 à 0,001 près.

Python

```
import numpy as np

def G(x):
    return 0.5 * np.log((1 + x**2) / 4) + x * np.arctan(1 / x)

u = 0.25
v = 1.0
while v - u > 0.001:
    if G((u + v) / 2) > 0:
        v = (u + v) / 2
    if G((u + v) / 2) < 0:
        u = (u + v) / 2
    if G((u + v) / 2) == 0:
        v = (u + v) / 2
        u = (u + v) / 2
print((u + v) / 2)
```

11.a) Quelle méthode est mise en œuvre ? Donner une équation vérifiée par s_0 .

11.b) Comparer s_0 et ρ_0 .

12. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n(X) = 1 - (X^2 + \rho^2)P_{f_\rho, n}(X)$.

12.a) Montrer que w_n divise S_n .

12.b) Montrer que $P_{f_\rho, n}$ est pair.

12.c) On pose $y_n = 1 - 1/n$. Exprimer $|w_n(y_n)|$ en fonction de n . Trouver un équivalent, de la forme $\frac{\tau}{n}\sigma^n$, où $\tau, \sigma > 0$ sont à déterminer.

12.d) On admet sans démonstration que, pour chaque $\rho > 0$ fixé,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln D_n(\rho) - nH(\rho)) = \frac{1}{2} \ln(1 + \rho^2).$$

Déduire de ce résultat et de la question 12.c un équivalent de $|w_n(y_n)|/D_n(\rho)$.

Dans les questions 13 et 14, on suppose n impair ; les limites y sont prises le long des entiers impairs.

13.a) Montrer que le reste r_n de la division euclidienne de w_n par $X^2 + \rho^2$ est une constante réelle non nulle, et que

$$r_n = (-1)^{(n+1)/2} D_n(\rho).$$

Exprimer $S_n(X)$ en fonction de $w_n(X)$ et de r_n .

13.b) En déduire que, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$|f_\rho(x) - P_{f_\rho, n}(x)| = f_\rho(x) \frac{|w_n(x)|}{D_n(\rho)}.$$

14. On suppose $0 < \rho < \rho_0$.

14.a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_\rho(y_n) - P_{f_\rho, n}(y_n)|$.

14.b) En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [-1, 1]} |f_\rho(x) - P_{f_\rho, n}(x)| = +\infty.$$

Ce comportement est appelé phénomène de Runge.