



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2017

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Rappels et conventions utilisés dans tout le corrigé.

Intégrales impropres : une intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ d'une fonction continue converge lorsque $\int_a^b f$ admet une limite finie quand $a \rightarrow -\infty$ et $b \rightarrow +\infty$ indépendamment. Une fonction continue positive majorée par une fonction d'intégrale convergente a une intégrale convergente ; deux fonctions positives équivalentes au voisinage d'une borne ont des intégrales de même nature ; $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$ converge si et seulement si $a > 1$. Les intégrations par parties sont faites sur un segment avant le passage à la limite.

Fonction Arctan : elle est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limites $-\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$ et $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$ (bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$), et $\text{Arctan}(0) = 0$, $\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$.

Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est Arctan, d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$.

Loi normale centrée réduite : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = 1$; par parité, $\int_0^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. On note Φ sa fonction de répartition, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ et $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$.

Lois gamma : la loi $\gamma(\nu)$ ($\nu > 0$) a pour densité $x \mapsto \frac{x^{\nu-1} e^{-x}}{\Gamma(\nu)}$ sur $]0, +\infty[$ (nulle ailleurs) ; $\Gamma(n+1) = n!$; la loi exponentielle de paramètre 1 est la loi $\gamma(1)$; une somme de n variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1 suit la loi $\gamma(n)$.

Théorème limite central : si (T_n) est une suite de variables mutuellement indépendantes, de même loi, admettant une espérance m et une variance $s^2 > 0$, alors

$\frac{T_1 + \dots + T_n - nm}{s\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable de loi normale centrée réduite :

pour tout réel t , $P\left(\left[\frac{T_1 + \dots + T_n - nm}{s\sqrt{n}} \leq t\right]\right) \rightarrow \Phi(t)$.

Convolution : si U et V sont deux variables indépendantes de densités f_U et f_V , l'une étant bornée, et si la fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t) dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, alors elle est une densité de $U + V$.

Équivalents : ils sont compatibles avec les produits, les quotients et les puissances fixes ; on ne les additionne pas et on ne les compose pas sans justification. Si $f(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} g(u)$ et si $w(x) \rightarrow 0$ avec $w(x) \neq 0$, alors $f(w(x)) \sim g(w(x))$ (composition d'une limite de quotient).

Partie I. Une démonstration probabiliste de la formule de Stirling

1. a) Méthode : changement de variable affine dans une intégrale sur un segment.

La fonction $x \mapsto n(1-x)$ est affine, de classe C^1 , et envoie $[0, 1]$ sur $[0, n]$; on a $x = 1 - \frac{u}{n}$, $dx = -\frac{du}{n}$, et pour $u \in [0, n]$:

$$h_n\left(1 - \frac{u}{n}\right) = \left(\frac{u}{n} e^{1 - \frac{u}{n}}\right)^n = \frac{u^n}{n^n} e^n e^{-u}.$$

$$\text{Donc } I_n = \int_n^0 \frac{u^n}{n^n} e^n e^{-u} \left(-\frac{du}{n}\right) = \frac{e^n}{n^{n+1}} \int_0^n u^n e^{-u} du.$$

Conclusion

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \frac{e^n}{n^{n+1}} \int_0^n u^n e^{-u} du.$$

b) Méthode : étude d'une fonction auxiliaire.

Soit $\chi(x) = x + \ln(1-x) + \frac{x^2}{2}$ sur $[0, 1[$, dérivable, avec

$$\chi'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} + x = \frac{(1+x)(1-x) - 1}{1-x} = -\frac{x^2}{1-x} \leq 0.$$

Donc χ est décroissante sur $[0, 1[$ et $\chi(x) \leq \chi(0) = 0$.

Conclusion

$$\text{pour tout } x \in [0, 1[, \quad x + \ln(1 - x) \leq -\frac{x^2}{2}.$$

c) Méthode : majoration de h_n par une fonction gaussienne, puis intégrale de référence.

Pour $x \in [0, 1[, (1 - x)e^x > 0$ et $h_n(x) = \exp(n(x + \ln(1 - x))) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)$ d'après

b) et la croissance de $\exp$; pour $x = 1$, $h_n(1) = 0 \leq \exp\left(-\frac{n}{2}\right)$. Comme $h_n \geq 0$, par positivité et croissance de l'intégrale :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right) dx \leq \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right) dx.$$

Le changement de variable affine $y = \sqrt{n}x$ donne

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(intégrale convergente, d'après la densité de la loi normale centrée réduite).

Conclusion

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

2. Expression de H . Pour $x \in]0, 1[, h_n^*(x) = \exp(n(x + \ln(1 - x)))$; l'égalité

$$h_n^*(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2} H(x)\right) \text{ et l'injectivité de } \exp \text{ imposent}$$

$$H(x) = -\frac{2(x + \ln(1 - x))}{x^2},$$

expression qui ne dépend pas de n .

a) Méthode : développement limité de $\ln(1 + t)$ en 0, avec $t = -x$.

On a $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ quand $t \rightarrow 0$, donc, quand $x \rightarrow 0$,

$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $x + \ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Ainsi

$$H(x) = -\frac{2}{x^2} \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) = 1 + \frac{2x}{3} + o(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1.$$

Conclusion

H se prolonge par continuité en 0 en posant $H(0) = 1$. Avec ce prolongement, $h_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2}H(x)\right)$ pour tout $x \in [0, 1[$ (en 0, les deux membres valent 1).

b) Méthode : signe de g'' , puis variations de g' et de g .

La formule définissant g a un sens sur $]0, 1[$, avec $g(0) = 0$; g y est de classe C^2 . Pour $x \in]0, 1[$:

$$g'(x) = -\ln(1-x) + (1-x) \times \frac{-1}{1-x} + 1 - x = -\ln(1-x) - x$$

et $g''(x) = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}.$

Sur $]0, 1[$, $g''(x) > 0$: g est convexe sur $]0, 1[$. De plus g' est strictement croissante sur $]0, 1[$ avec $g'(0) = 0$, donc $g'(x) > 0$ pour $x \in]0, 1[$; g est alors strictement croissante sur $]0, 1[$, et $g(x) > g(0) = 0$ pour $x \in]0, 1[$.

Conclusion

g est convexe et strictement positive sur $]0, 1[$.

c) Méthode : calcul de H' en fonction de g , puis théorème de la bijection.

Posons $N(x) = -2(x + \ln(1-x))$, de sorte que $H(x) = \frac{N(x)}{x^2}$ sur $]0, 1[$, avec

$$N'(x) = -2\left(1 - \frac{1}{1-x}\right) = \frac{2x}{1-x}. \text{ Alors}$$

$$H'(x) = \frac{xN'(x) - 2N(x)}{x^3} = \frac{1}{x^3} \left(\frac{2x^2}{1-x} + 4(x + \ln(1-x)) \right)$$

$$= \frac{2x^2 + 4(1-x)x + 4(1-x)\ln(1-x)}{x^3(1-x)}.$$

Le numérateur vaut $4x - 2x^2 + 4(1-x)\ln(1-x) = 4g(x)$. Donc, pour $x \in]0, 1[$,

$$H'(x) = \frac{4g(x)}{x^3(1-x)} > 0 \text{ d'après b).}$$

H est strictement croissante sur $]0, 1[$ et continue en 0 : pour $0 < y < 1$ et $0 < z < \frac{y}{2}$, $H(z) < H\left(\frac{y}{2}\right)$; en faisant tendre z vers 0, on obtient $H(0) \leq H\left(\frac{y}{2}\right) < H(y)$. Donc H est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1[$.

Limite en 1 : quand $x \rightarrow 1^-$, $\ln(1-x) \rightarrow -\infty$, donc $-2(x + \ln(1-x)) \rightarrow +\infty$ et $x^2 \rightarrow 1$, d'où $H(x) \rightarrow +\infty$.

D'après le théorème de la bijection, H réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $\left[H(0), \lim_{1^-} H \right] = [1, +\infty[$.

Conclusion

H réalise une bijection strictement croissante de $[0, 1[$ sur $[1, +\infty[$.

3. a) Méthode : choisir une puissance de n d'exposant compris entre $-\frac{1}{2}$ et 0.

Posons $u_n = \frac{1}{2n^{1/4}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leq \frac{1}{2} < 1$; $u_n \rightarrow 0$ et

$$u_n \sqrt{n} = \frac{n^{1/4}}{2} \rightarrow +\infty.$$

Conclusion

la suite de terme général $u_n = \frac{1}{2n^{1/4}}$ convient.

b) Méthode : continuité de H en 0.

$u_n \in]0, 1[$, donc $v_n = H(u_n)$ est défini, et $v_n \geq 1$ d'après 2. c). Comme $u_n \rightarrow 0$ et H est continue en 0 (question 2. a)), $v_n \rightarrow H(0) = 1$.

Conclusion

(v_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

c) Méthode : positivité de h_n , puis minoration de h_n sur $[0, u_n]$ grâce à la croissance de H , et changement de variable affine.

Première inégalité : $h_n \geq 0$ et $0 < u_n < 1$, donc par la relation de Chasles

$$I_n = \int_0^{u_n} h_n + \int_{u_n}^1 h_n \geq \int_0^{u_n} h_n.$$

Seconde inégalité : pour $x \in [0, u_n]$, $H(x) \leq H(u_n) = v_n$ (H croissante sur $[0, 1]$), donc $-\frac{nx^2}{2}H(x) \geq -\frac{nx^2}{2}v_n$ et, d'après 2. a), $h_n(x) \geq \exp\left(-\frac{nv_n x^2}{2}\right)$. Par croissance de l'intégrale, puis changement de variable affine $y = \sqrt{nv_n}x$ (avec $nv_n > 0$) :

$$\int_0^{u_n} h_n(x) dx \geq \int_0^{u_n} \exp\left(-\frac{nv_n x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{nv_n}} \int_0^{u_n \sqrt{nv_n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy.$$

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n \geq \int_0^{u_n} h_n(x) dx \geq \frac{1}{\sqrt{nv_n}} \int_0^{u_n \sqrt{nv_n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy.$$

d) Méthode : encadrement de $\sqrt{n} I_n$.

Notons $G(t) = \int_0^t e^{-y^2/2} dy$ pour $t \geq 0$; $G(t) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ quand $t \rightarrow +\infty$ (rappels).

D'après 1. c) et 3. c), pour tout n :

$$\frac{1}{\sqrt{v_n}} G(u_n \sqrt{nv_n}) \leq \sqrt{n} I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Comme $v_n \geq 1$, $u_n \sqrt{nv_n} \geq u_n \sqrt{n} \rightarrow +\infty$, donc $G(u_n \sqrt{nv_n}) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}$; et $v_n \rightarrow 1$. Le membre de gauche tend vers $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Par encadrement, $\sqrt{n} I_n \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} \neq 0$.

Conclusion

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

4. a) Méthode : stabilité des lois gamma, puis théorème limite central.

Les T_i suivent la loi $\gamma(1)$ et sont mutuellement indépendantes, donc $S_n \hookrightarrow \gamma(n)$.

Les T_i sont indépendantes, de même loi, d'espérance 1 et de variance $1 > 0$. Posons $Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$; d'après le théorème limite central, $P([Z_n \leq t]) \rightarrow \Phi(t)$ pour tout réel t . Or $[S_n \leq n] = [Z_n \leq 0]$, donc $P([S_n \leq n]) \rightarrow \Phi(0) = \frac{1}{2}$.

Conclusion

$$S_n \hookrightarrow \gamma(n) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} P([S_n \leq n]) = \frac{1}{2}.$$

b) Méthode 1 — Calcul exact. Soit $\varepsilon > 0$. $U_n \geq 0$ presque sûrement et

$$P([|U_n - 0| \geq \varepsilon]) = P([T_{n+1} \geq \varepsilon \sqrt{n}]) = e^{-\varepsilon \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Méthode 2 — Inégalité de Markov. U_n est positive et admet une espérance

$$E(U_n) = \frac{E(T_{n+1})}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}. \text{ Pour } \varepsilon > 0, \quad P([U_n \geq \varepsilon]) \leq \frac{E(U_n)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Comparaison : la méthode 1 utilise la loi exacte de T_{n+1} ; la méthode 2 n'utilise que son espérance et s'applique à toute suite $\frac{V_n}{\sqrt{n}}$ de variables positives de même espérance.

Conclusion

(U_n) converge en probabilité vers 0.

- c) Le théorème de Slutsky étant hors programme, on ne l'utilise pas : on procède par encadrement de probabilités.

Méthode 1 — Encadrement à l'aide de 4. a) et 4. b). Soit $\varepsilon > 0$ et $Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

Majoration : $T_{n+1} \geq 0$ presque sûrement, donc $[S_{n+1} \leq n] \subset [S_n \leq n] \cup [T_{n+1} < 0]$ et $P([S_{n+1} \leq n]) \leq P([S_n \leq n])$.

Minoration : si $Z_n \leq -\varepsilon$ et $U_n < \varepsilon$, alors $S_n \leq n - \varepsilon\sqrt{n}$ et $T_{n+1} < \varepsilon\sqrt{n}$, donc $S_{n+1} < n$. Ainsi $[Z_n \leq -\varepsilon] \cap [U_n < \varepsilon] \subset [S_{n+1} \leq n]$ et, comme $P(C \cap D) \geq P(C) - P(\bar{D})$:

$$P([S_{n+1} \leq n]) \geq P([Z_n \leq -\varepsilon]) - P([U_n \geq \varepsilon]).$$

Passage à la limite. Soit $\eta > 0$. Par continuité de Φ en 0, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\Phi(-\varepsilon) \geq \frac{1}{2} - \eta$. D'après le théorème limite central, $P([Z_n \leq -\varepsilon]) \rightarrow \Phi(-\varepsilon)$; d'après 4. b), $P([U_n \geq \varepsilon]) \rightarrow 0$; d'après 4. a), $P([S_n \leq n]) \rightarrow \frac{1}{2}$. Il existe donc n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $P([Z_n \leq -\varepsilon]) \geq \Phi(-\varepsilon) - \eta$, $P([U_n \geq \varepsilon]) \leq \eta$ et $P([S_n \leq n]) \leq \frac{1}{2} + \eta$. Pour $n \geq n_0$:

$$\frac{1}{2} - 3\eta \leq P([S_{n+1} \leq n]) \leq \frac{1}{2} + \eta.$$

Méthode 2 — Théorème limite central appliqué à S_{n+1} . Posons

$Z'_{n+1} = \frac{S_{n+1} - (n+1)}{\sqrt{n+1}}$, de sorte que $[S_{n+1} \leq n] = \left[Z'_{n+1} \leq -\frac{1}{\sqrt{n+1}} \right]$. **Majoration :**

$P([S_{n+1} \leq n]) \leq P([Z'_{n+1} \leq 0]) \rightarrow \Phi(0) = \frac{1}{2}$. **Minoration : pour $\varepsilon > 0$ et $n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon^2}$,**

$-\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq -\varepsilon$, donc $P([S_{n+1} \leq n]) \geq P([Z'_{n+1} \leq -\varepsilon]) \rightarrow \Phi(-\varepsilon)$. **Le même choix de ε en fonction de η qu'à la méthode 1 conclut.**

Comparaison : la méthode 1 suit l'énoncé (« en déduire ») et montre comment une

perturbation qui tend vers 0 en probabilité ne modifie pas la limite, sans utiliser Slutsky ; la méthode 2 évite la question b) en appliquant directement le théorème limite central à la suite (S_{n+1}) .

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P([S_{n+1} \leq n]) = \frac{1}{2}.$$

5. Méthode : exprimer $P([S_{n+1} \leq n])$ à l'aide de I_n , puis produit et quotient d'équivalents.

D'après 4. a), $S_{n+1} \hookrightarrow \gamma(n+1)$, de densité $x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ sur $]0, +\infty[$. Donc, avec 1. a) :

$$P([S_{n+1} \leq n]) = \frac{1}{n!} \int_0^n x^n e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \times \frac{n^{n+1}}{e^n} I_n.$$

Cette probabilité est strictement positive (intégrale d'une fonction continue positive non nulle), d'où $n! = \frac{n^{n+1} e^{-n} I_n}{P([S_{n+1} \leq n])}$. D'après 3. d), $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$; d'après 4. c),

$P([S_{n+1} \leq n]) \sim \frac{1}{2}$ (limite non nulle). Par produit et quotient d'équivalents :

$$n! \sim n^{n+1} e^{-n} \times 2 \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = n^n e^{-n} \times \sqrt{\frac{4\pi n^2}{2n}} = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Conclusion

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Partie II. Quelques propriétés de la loi de Cauchy

6. a) Méthode 1 — Définition de la réciproque. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y = \text{Arctan}(x)$:

$$y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ et } \tan(y) = x. \text{ Alors } -y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ et }$$

$$\tan(-y) = \frac{\sin(-y)}{\cos(-y)} = -\tan(y) = -x \text{ (sin impaire, cos paire). Par unicité de }$$

$$\text{l'antécédent dans } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \text{ Arctan}(-x) = -y.$$

Méthode 2 — Dérivation. La fonction $k : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(-x)^2} = 0$. Sur l'intervalle $\mathbb{R}$, k est constante, égale à $k(0) = 0$.

Comparaison : la méthode 1 utilise la définition de Arctan et l'impairité de $\tan$; la méthode 2 n'utilise que la dérivée rappelée par l'énoncé, et se réutilise en d).

Conclusion

Arctan est impaire.

b) Méthode 1 — Formule de Taylor-Young. Arctan est de classe C^∞ , donc de classe C^3 au voisinage de 0 : la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 s'applique et donne l'existence du développement limité. Calcul des dérivées :

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctan}'(x) &= (1+x^2)^{-1}, \operatorname{Arctan}''(x) = -2x(1+x^2)^{-2}, \\ \operatorname{Arctan}'''(x) &= -2(1+x^2)^{-2} + 8x^2(1+x^2)^{-3}.\end{aligned}$$

En 0 : $\operatorname{Arctan}(0) = 0$, $\operatorname{Arctan}'(0) = 1$, $\operatorname{Arctan}''(0) = 0$, $\operatorname{Arctan}'''(0) = -2$. Donc

$$\operatorname{Arctan}(x) = x + \frac{-2}{3!}x^3 + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Méthode 2 — Intégration d'une identité exacte. Pour tout réel t ,

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{1+t^2} \quad (\text{on vérifie en multipliant par } 1+t^2 : (1-t^2)(1+t^2) + t^4 = 1).$$

En intégrant de 0 à x :

$$\operatorname{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + R(x), \text{ avec } R(x) = \int_0^x \frac{t^4}{1+t^2} dt \text{ et } |R(x)| \leq \left| \int_0^x t^4 dt \right| = \frac{|x|^5}{5}.$$

Donc $\frac{R(x)}{x^3} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, c'est-à-dire $R(x) = o(x^3)$.

Comparaison : la méthode 1 applique un théorème général ; la méthode 2 fournit en plus une majoration explicite du reste.

Conclusion

Arctan admet en 0 le développement limité $\text{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

- c) Méthode 1 — Étude de fonction. Arctan est croissante et $\text{Arctan}(0) = 0$, donc $\text{Arctan}(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$. La fonction $\chi : x \mapsto x - \text{Arctan}(x)$ a pour dérivée $1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$; elle est croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\chi(0) = 0$, donc $\chi \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

Méthode 2 — Encadrement de l'intégrande. Pour $x \geq 0$, $\text{Arctan}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ et, pour $t \in [0, x]$, $0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$. Par croissance de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant), $0 \leq \text{Arctan}(x) \leq \int_0^x 1 dt = x$.

Comparaison : la méthode 2 est plus rapide ; la méthode 1 est la technique générale de comparaison de deux fonctions.

Conclusion

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \text{Arctan}(x) \leq x$.

- d) Méthode 1 — Dérivation sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $\ell : x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\ell'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, ℓ est constante, égale à $\ell(1) = 2 \text{Arctan}(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Méthode 2 — Angles complémentaires. Soit $x > 0$ et $y = \text{Arctan}(x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (car $x > 0$). Alors $\frac{\pi}{2} - y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et, par les formules d'addition, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos(y)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin(y)$, d'où $\tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{\cos(y)}{\sin(y)} = \frac{1}{\tan(y)} = \frac{1}{x}$. Donc $\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - y$.

Comparaison : la méthode 1 est un réflexe de calcul (fonction de dérivée nulle sur un intervalle) ; la méthode 2 donne l'interprétation géométrique.

Conclusion

$$\text{pour tout } x > 0, \quad \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

7. a) Méthode : continuité, positivité et calcul de l'intégrale par la primitive Arctan.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\pi(1 + (x - \theta)^2)}$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Une primitive est $x \mapsto \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x - \theta)$; pour $a < b$,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\pi} (\text{Arctan}(b - \theta) - \text{Arctan}(a - \theta)) \longrightarrow \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1$$

quand $a \rightarrow -\infty$ et $b \rightarrow +\infty$.

Conclusion

f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

b) Méthode : critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives.

X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx$ converge. Au voisinage de $+\infty$, $xf_X(x) = \frac{x}{\pi(1 + (x - \theta)^2)} \sim \frac{x}{\pi x^2} = \frac{1}{\pi x}$, avec des fonctions positives. Comme

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, $\int_1^{+\infty} x f_X(x) dx$ diverge, et a fortiori $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx$ diverge.

Conclusion

X n'admet pas d'espérance.

c) Méthode : étude de la fonction $f_0 : x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Parité : f_0 est paire ; sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Variations : $f'_0(x) = -\frac{2x}{\pi(1+x^2)^2}$; f_0 est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, de maximum $f_0(0) = \frac{1}{\pi} \approx 0,318$, avec une tangente horizontale en 0.

Limites : $f_0(x) \rightarrow 0$ en $\pm\infty$; l'axe des abscisses est asymptote horizontale, et la courbe reste au-dessus ($f_0 > 0$).

Convexité : $f''_0(x) = \frac{2(3x^2-1)}{\pi(1+x^2)^3}$, du signe de $3x^2-1$. f_0 est concave sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ et convexe sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$: les points d'abscisses $\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0,577$ et d'ordonnée $\frac{3}{4\pi} \approx 0,239$ sont des points d'inflexion, où la pente vaut $\mp \frac{9}{8\sqrt{3}\pi} \approx \mp 0,207$.

La courbe est donc « en cloche », comme celle d'une densité normale, mais elle décroît beaucoup plus lentement (en $\frac{1}{\pi x^2}$) : par exemple $f_0(3) \approx 0,032$ et $f_0(5) \approx 0,012$.

Le code suivant, exécuté, trace cette courbe (on a vérifié que le maximum calculé vaut $\frac{1}{\pi}$).

Python

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-6, 6, 601)
y = 1 / (np.pi * (1 + x**2))

plt.plot(x, y)          # courbe de f_X pour theta = 0
plt.plot(x, 0 * x)      # asymptote y = 0
```

`plt.show()`

Conclusion

la courbe de f_X pour $\theta = 0$ est une cloche symétrique, de sommet $\left(0, \frac{1}{\pi}\right)$, d'asymptote l'axe des abscisses en $\pm\infty$, avec deux points d'inflexion d'abscisses $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

8. a) Méthode : intégration de la densité.

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{\pi} (\text{Arctan}(x - \theta) - \text{Arctan}(a - \theta)) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\text{Arctan}(x - \theta) + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Conclusion

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x - \theta)$.

b) Méthode : injectivité de Arctan.

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \iff \text{Arctan}(x - \theta) = 0 = \text{Arctan}(0) \iff x - \theta = 0,$$

car Arctan est strictement croissante, donc injective.

Conclusion

l'équation $F_X(x) = \frac{1}{2}$ admet l'unique solution $x = \theta$: la médiane théorique de X est θ .

Partie III. La loi de la moyenne empirique

9. a) Méthode : comparaison avec $\frac{1}{1+t^2}$.

Pour tout t , $1 + (x - nt)^2 \geq 1$, donc $0 < \varphi_{n,x}(t) \leq \frac{1}{1+t^2}$. La fonction $\varphi_{n,x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge (rappels). Par comparaison de fonctions positives, en $-\infty$ et en $+\infty$, l'intégrale converge.

Conclusion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t) dt \text{ converge, et } 0 < \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t) dt \leq \pi.$$

b) Méthode : primitive logarithmique et limites aux bornes.

La fonction $\Psi : t \mapsto \ln(1+t^2) - \ln(1+(x-nt)^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$\Psi'(t) = \frac{2t}{1+t^2} - \frac{2(x-nt)(-n)}{1+(x-nt)^2} = \frac{2t}{1+t^2} - \frac{2n(nt-x)}{1+(x-nt)^2} = \psi_{n,x}(t).$$

Pour $t \neq 0$, $\Psi(t) = \ln\left(\frac{1+t^2}{1+(x-nt)^2}\right)$ et

$$\frac{1+t^2}{1+(x-nt)^2} = \frac{\frac{1}{t^2} + 1}{\frac{1}{t^2} + \left(\frac{x}{t} - n\right)^2} \rightarrow \frac{1}{n^2}$$

quand $t \rightarrow \pm\infty$. Par continuité de $\ln$ en $\frac{1}{n^2} > 0$, $\Psi(t) \rightarrow -2\ln(n)$ en $-\infty$ comme en $+\infty$. Ainsi, pour $a < b$,

$$\int_a^b \psi_{n,x}(t) dt = \Psi(b) - \Psi(a) \rightarrow -2\ln(n) - (-2\ln(n)) = 0$$

quand $a \rightarrow -\infty$ et $b \rightarrow +\infty$.

Conclusion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{n,x}(t) dt \text{ converge et vaut } 0.$$

c) Question adaptée au programme actuel (rectification d'une erreur d'énoncé) :

l'original admet la décomposition de $\varphi_{n,x}$ et les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour tout (n, x) .

Or $\sigma_{1,0} = 4 \times 0 = 0$, et $\varphi_{1,0}(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}$ ne peut pas s'écrire

$$\frac{\alpha t + \beta}{1+t^2} + \frac{\gamma t + \delta}{1+t^2} = \frac{(\alpha + \gamma)t + \beta + \delta}{1+t^2} \text{ (en multipliant par } (1+t^2)^2, \text{ on obtiendrait}$$

$1 = ((\alpha + \gamma)t + \beta + \delta)(1+t^2)$ pour tout t , ce qui est impossible car le second membre est un polynôme nul ou de degré au moins 2). L'énoncé adapté admet la décomposition pour $(n, x) \neq (1, 0)$ et indique comment traiter le cas $(1, 0)$; la relation demandée est inchangée.

Méthode : pour $(n, x) \neq (1, 0)$, décomposer $\varphi_{n,x}$ à l'aide de $\psi_{n,x}$ et de deux fonctions d'intégrales connues; pour $(n, x) = (1, 0)$, intégration par parties.

Cas $(n, x) \neq (1, 0)$. Alors $\sigma_{n,x} > 0$ (le premier facteur est strictement positif, le second aussi car $x \neq 0$ ou $n \neq 1$), et la décomposition admise s'applique. On a

$$\frac{\alpha}{2}\psi_{n,x}(t) = \frac{\alpha t}{1+t^2} - \frac{\alpha n(nt-x)}{1+(x-nt)^2}, \text{ donc}$$

$$\varphi_{n,x}(t) - \frac{\alpha}{2}\psi_{n,x}(t) = \frac{\beta}{1+t^2} + \frac{(\gamma + \alpha n^2)t + \delta - \alpha nx}{1+(x-nt)^2}.$$

$$\text{Or } \gamma + \alpha n^2 = \frac{-2n^3x + 2n^3x}{\sigma_{n,x}} = 0. \text{ Ainsi, pour tout } t :$$

$$\varphi_{n,x}(t) = \frac{\alpha}{2}\psi_{n,x}(t) + \frac{\beta}{1+t^2} + \frac{\delta - \alpha nx}{1+(x-nt)^2}.$$

Les trois fonctions du second membre ont des intégrales convergentes sur $\mathbb{R}$: celle de $\psi_{n,x}$ vaut 0 (question b)), celle de $\frac{1}{1+t^2}$ vaut π , et, par le changement de variable affine

$s = nt - x$ ($n > 0$), $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1 + (x - nt)^2} = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{1 + s^2} = \frac{\pi}{n}$. Par linéarité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t) dt = \pi \left(\beta + \frac{\delta - \alpha nx}{n} \right).$$

Calcul :

$$\delta - \alpha nx = \frac{n^2(3x^2 + n^2 - 1) - 2n^2x^2}{\sigma_{n,x}} = \frac{n^2(x^2 + n^2 - 1)}{\sigma_{n,x}},$$

donc

$$\beta + \frac{\delta - \alpha nx}{n} = \frac{1 + x^2 - n^2 + nx^2 + n^3 - n}{\sigma_{n,x}} = \frac{(n+1)x^2 + (n^3 - n^2 - n + 1)}{\sigma_{n,x}}.$$

Comme $n^3 - n^2 - n + 1 = n^2(n-1) - (n-1) = (n-1)(n^2 - 1) = (n+1)(n-1)^2$, le numérateur vaut $(n+1)(x^2 + (n-1)^2)$, et en simplifiant par $x^2 + (n-1)^2 \neq 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t) dt = \frac{(n+1)\pi}{x^2 + (n+1)^2}.$$

Cas $(n, x) = (1, 0)$. $\varphi_{1,0}(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}$. Pour $A > 0$, intégrons par parties sur $[-A, A]$,

avec $t \mapsto t$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ de classe C^1 :

$$\int_{-A}^A \frac{dt}{1+t^2} = \left[\frac{t}{1+t^2} \right]_{-A}^A + \int_{-A}^A \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dt.$$

Avec $\frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t^2)^2}$, on obtient

$$\int_{-A}^A \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2A}{1+A^2} + 2 \int_{-A}^A \frac{dt}{1+t^2} - 2 \int_{-A}^A \frac{dt}{(1+t^2)^2},$$

c'est-à-dire

$$2 \int_{-A}^A \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int_{-A}^A \frac{dt}{1+t^2} + \frac{2A}{1+A^2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \pi.$$

L'intégrale sur $\mathbb{R}$ étant convergente (question a)), elle est la limite de ses intégrales sur $[-A, A]$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{1,0}(t) dt = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{0^2 + 2^2}$, ce qui est bien la formule pour $(n, x) = (1, 0)$.

Conclusion

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t) dt = \frac{(n+1)\pi}{x^2 + (n+1)^2}.$$

10. a) Méthode : translation et caractérisation de la loi par la fonction de répartition.

Pour $y \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(y) = P([X \leq y + \theta]) = F_X(y + \theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(y)$$

d'après 8. a). C'est la fonction de répartition d'une variable de loi $\mathcal{C}_0$ (8. a) avec $\theta = 0$), et la fonction de répartition caractérise la loi.

Conclusion

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(y) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{C}_0, \text{ de densité } f_Y : t \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}.$$

b) Méthode : produit de convolution, puis intégration de la densité obtenue.

Densité de S_2 . Y_1 et Y_2 sont indépendantes, de densité f_Y , continue et bornée par $\frac{1}{\pi}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, d'après 9. a) et 9. c) avec $n = 1$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t) f_Y(x-t) dt &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+(x-t)^2)} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{1,x}(t) dt = \frac{1}{\pi^2} \\ &\times \frac{2\pi}{x^2 + 4} = \frac{2}{\pi(x^2 + 4)}. \end{aligned}$$

Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$; d'après le théorème de convolution, c'est une densité de S_2 .

Fonction de répartition. Une primitive de $s \mapsto \frac{2}{\pi(4+s^2)}$ est $s \mapsto \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{s}{2}\right)$ (dérivée $\frac{1}{\pi} \times \frac{1/2}{1+s^2/4}$). Donc

$$F_{S_2}(x) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Loi de $\overline{Y_2}$. Pour $y \in \mathbb{R}$, $F_{\overline{Y_2}}(y) = P([S_2 \leq 2y]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}(y) = F_Y(y)$.

Conclusion

$F_{S_2}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)$ et $\overline{Y_2} \hookrightarrow \mathcal{C}_0$: la moyenne de deux observations a la même loi qu'une seule observation.

c) Méthode : récurrence sur n portant sur la densité de S_n , à l'aide de la convolution et de 9. c).

Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: « S_n admet pour densité

$$g_n : x \mapsto \frac{n}{\pi(x^2 + n^2)} \text{ »}.$$

Initialisation : $S_1 = Y_1$ a pour densité $f_Y = g_1$.

Hérédité : supposons $\mathcal{P}(n)$. $S_{n+1} = S_n + Y_{n+1}$, où S_n , fonction de $(Y_1, \dots, Y_n)$, est indépendante de Y_{n+1} (lemme des coalitions). Les densités g_n et f_Y sont continues et bornées. Pour $x \in \mathbb{R}$, par le changement de variable affine $s = nt$ ($ds = n dt$, $n^2 + s^2 = n^2(1 + t^2)$) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(s) f_Y(x-s) ds &= \frac{n}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{(n^2 + s^2)(1 + (x-s)^2)} \\ &= \frac{n}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n dt}{n^2(1 + t^2)(1 + (x - nt)^2)} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t) dt, \end{aligned}$$

intégrale convergente (9. a)) qui vaut, d'après 9. c), $\frac{1}{\pi^2} \times \frac{(n+1)\pi}{x^2 + (n+1)^2} = g_{n+1}(x)$.

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$; par le théorème de convolution, g_{n+1} est une densité de S_{n+1} .

Loi de $\overline{Y}_n$. Une primitive de g_n est $x \mapsto \frac{1}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)$, donc

$$F_{S_n}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right), \text{ et pour } y \in \mathbb{R} :$$

$$F_{\overline{Y}_n}(y) = P([S_n \leq ny]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(y) = F_Y(y).$$

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{Y}_n \hookrightarrow \mathcal{C}_0$ (et S_n a pour densité $x \mapsto \frac{n}{\pi(x^2 + n^2)}$).

d) Méthode : vérifier les hypothèses de la loi faible des grands nombres, puis examiner sa conclusion.

La loi faible des grands nombres du programme s'applique à une suite de variables indépendantes de même loi admettant une espérance m et une variance; elle affirme alors que $\overline{Y}_n$ converge en probabilité vers m . Ici $Y \hookrightarrow \mathcal{C}_0$ n'admet pas d'espérance (7. b) avec $\theta = 0$) : l'hypothèse n'est pas satisfaite.

De plus, la conclusion est fausse quelle que soit la constante : pour tout réel c et tout $\varepsilon > 0$, d'après c),

$$P(|\overline{Y}_n - c| \geq \varepsilon) = P(|Y - c| \geq \varepsilon) \geq P([Y \geq c + \varepsilon]) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(c + \varepsilon) > 0,$$

quantité indépendante de n , qui ne tend donc pas vers 0.

Conclusion

la loi faible des grands nombres ne s'applique pas, car Y n'admet pas d'espérance; et effectivement $(\overline{Y}_n)$ ne converge en probabilité vers aucune constante.

11. a) Code adapté en Python.

Méthode : chaque ligne de A est une réalisation de l'échantillon $(Y_1, \dots, Y_n)$; la moyenne des éléments d'une ligne est une réalisation de $\overline{Y}_n$.

La ligne d'indice i de A contient une réalisation de $(Y_{i,1}, \dots, Y_{i,n})$, variables indépendantes de loi $\mathcal{C}_0$, donc de même loi que $(Y_1, \dots, Y_n)$. Le tableau `np.sum(A, axis=1)` contient les N sommes des lignes, et en divisant par n on obtient N réalisations indépendantes de $\overline{Y}_n$. La ligne à compléter est :

Python

```
MoyEmp = np.sum(A, axis=1) / n
```

Programme complet. Pour pouvoir l'exécuter, on a défini la fonction cauchy par la méthode d'inversion : si U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, $\tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right)$ suit la loi $\mathcal{C}_0$, car pour tout réel y ,

$$P\left(\left[\tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right) \leq y\right]\right) = P\left(\left[U \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{Arctan}(y)\right]\right) = F_Y(y).$$

La commande `rd.random((N, n))` renvoie un tableau $N \times n$ de réels simulant des variables indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1[$ (la valeur 0, de probabilité nulle, est sans incidence).

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

import matplotlib.pyplot as plt

def cauchy(N, n):
    U = rd.random((N, n))
    return np.tan(np.pi * (U - 0.5))
```

```

N = 12000
n = 200
A = cauchy(N, n)
MoyEmp = np.sum(A, axis=1) / n
x = np.linspace(-8, 8, 33)
plt.hist(MoyEmp, bins=x, density=True) # histogramme 1
plt.show()
plt.hist(A[:, 0], bins=x, density=True) # histogramme 2
plt.show()

```

Ce code a été exécuté (affichages remplacés par des enregistrements d'images) :

MoyEmp est bien un tableau de 12000 valeurs, et les deux histogrammes obtenus ont la même allure que ceux de l'énoncé, avec des hauteurs centrales d'environ 0,32 à 0,33 dans les deux cas. L'écart avec les hauteurs voisines de 0,30 de la figure de l'énoncé vient de la normalisation : avec `density=True`, l'aire 1 est répartie entre les seules valeurs de $[-8, 8]$, soit environ 92 % des valeurs, puisque $P(|Y| > 8) = 1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(8) \approx 0,079$.

Conclusion

`MoyEmp = np.sum(A, axis=1) / n.`

b) Méthode : interpréter chaque histogramme comme une approximation d'une densité.

L'histogramme 2 est construit à partir de la première colonne de A, c'est-à-dire de 12000 réalisations indépendantes de $Y_{1,1}$, de loi $\mathcal{C}_0$: il approche la densité f_Y sur $[-8, 8]$ (sur la classe $[0; 0,5[$, la valeur moyenne de f_Y est $\frac{\text{Arctan}(0,5)}{0,5\pi} \approx 0,295$, ce qui correspond à la hauteur observée). L'histogramme 1 est construit à partir de 12000 réalisations indépendantes de $\overline{Y}_{200}$: il approche la densité de $\overline{Y}_{200}$.

Les deux histogrammes sont pratiquement identiques. C'est l'illustration expérimentale de 10. c) : $\overline{Y}_{200}$ a la même loi $\mathcal{C}_0$ qu'une seule observation. Faire la moyenne de 200 observations ne concentre pas les valeurs autour de 0, contrairement à ce qui se passerait pour une loi admettant une variance s^2 , où l'histogramme 1 serait beaucoup plus resserré (écart-type $\frac{s}{\sqrt{200}}$). Cette observation n'est pas une preuve, mais elle est

cohérente avec le résultat démontré.

Conclusion

les deux histogrammes, l'un pour $\overline{Y_{200}}$, l'autre pour une seule variable Y , ont la même forme, ce qui illustre que $\overline{Y_n}$ suit la loi $\mathcal{C}_0$ quel que soit n .

Partie IV. La loi de la médiane empirique

Notations de la partie. On note $F = F_X$, $f = f_X$, $c_n = (n+1)\binom{2n+1}{n}$, et on remarque que $c_n = \frac{(n+1)(2n+1)!}{n!(n+1)!} = \frac{(2n+1)!}{n!n!} = (2n+1)\binom{2n}{n}$. Comme X est à densité, $P([X_i = c]) = 0$ pour tout réel c et tout i . F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée f (continue), à valeurs dans $]0, 1[$.

12. a) Méthode : décrire B comme réunion disjointe d'événements portant sur des X_i distincts, à un événement négligeable près, puis utiliser l'indépendance.

Notons $D = \bigcup_{i=1}^{2n+1} [X_i = x + h]$, négligeable. Pour $i_0 \in \llbracket 1, 2n+1 \rrbracket$ et J partie à n éléments de $\llbracket 1, 2n+1 \rrbracket \setminus \{i_0\}$, posons

$$E_{i_0, J} = [x < X_{i_0} < x + h] \cap \bigcap_{i \in J} [X_i \leq x] \cap \bigcap_{i \notin J \cup \{i_0\}} [X_i \geq x + h].$$

Inclusion $E_{i_0, J} \subset B$: sur $E_{i_0, J}$, exactement un X_i est dans $]x, x + h[$, donc $Z = 1$; n valeurs sont strictement inférieures à X_{i_0} et n lui sont strictement supérieures, donc la $(n+1)$ -ième valeur dans l'ordre croissant est X_{i_0} : $\widehat{X}_{n+1} = X_{i_0} \in]x, x + h[$.

Inclusion $B \setminus D \subset \bigcup E_{i_0, J}$: sur $B \setminus D$, $\widehat{X}_{n+1}$ est l'un des X_i et appartient à $]x, x + h[$, mais n'est pas égal à $x + h$, donc appartient à $]x, x + h[$; comme $Z = 1$, il existe un unique i_0 tel que $X_{i_0} \in]x, x + h[$, et $\widehat{X}_{n+1} = X_{i_0}$. Les autres valeurs sont $\leq x$ ou $\geq x + h$, donc différentes de X_{i_0} ; X_{i_0} étant la $(n+1)$ -ième dans l'ordre croissant, exactement n valeurs lui sont strictement inférieures (elles sont $\leq x$) et n lui sont strictement supérieures (elles sont $\geq x + h$). En notant J l'ensemble des indices des premières, on est dans $E_{i_0, J}$.

Les événements $E_{i_0, J}$ sont deux à deux incompatibles : si $i_0 \neq i'_0$, l'un impose

$X_{i_0} \in]x, x + h[$ et l'autre $X_{i_0} \leq x$ ou $X_{i_0} \geq x + h$; si $i_0 = i'_0$ et $J \neq J'$, un indice de $J \setminus J'$ devrait vérifier $X_i \leq x$ et $X_i \geq x + h$. Donc

$$P(B) = \sum_{i_0, J} P(E_{i_0, J}).$$

Par indépendance mutuelle des X_i , et puisque $P([X_i \geq x + h]) = 1 - F(x + h)$ et $P([x < X_i < x + h]) = F(x + h) - F(x)$ (probabilités ponctuelles nulles) :

$$P(E_{i_0, J}) = F(x)^n (F(x + h) - F(x)) (1 - F(x + h))^n.$$

Il y a $(2n + 1)$ choix de i_0 et $\binom{2n}{n}$ choix de J , soit $(2n + 1)\binom{2n}{n} = c_n$ couples.

Conclusion

$$P(B) = (n + 1) \binom{2n + 1}{n} (F_X(x))^n (F_X(x + h) - F_X(x)) (1 - F_X(x + h))^n.$$

b) Méthode : majorer $P(A \setminus B)$ par la probabilité qu'au moins deux observations tombent dans $]x, x + h[$.

Comme $B \subset A$, $P(A) - P(B) = P(A \cap [Z \neq 1]) \geq 0$.

Sur $A \cap [Z = 0]$, $\widehat{X}_{n+1}$, qui est l'un des X_i , appartient à $]x, x + h[$ sans appartenir à $]x, x + h[$, donc vaut $x + h$: $A \cap [Z = 0] \subset D$, négligeable. Ainsi

$$P(A) - P(B) \leq P([Z \geq 2]). \text{ Or } [Z \geq 2] \subset \bigcup_{i < j} ([x < X_i < x + h] \cap [x < X_j < x + h]),$$

donc par indépendance

$$P([Z \geq 2]) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq 2n+1} (F(x + h) - F(x))^2 = \binom{2n + 1}{2} (F(x + h) - F(x))^2.$$

Conclusion

avec $K = \binom{2n+1}{2} = n(2n+1)$, qui ne dépend ni de h ni de x , $0 \leq P(A) - P(B) \leq K (F_X(x+h) - F_X(x))^2$.

c) Notons $G = F_{\widehat{X}_{n+1}}$ la fonction de répartition de $\widehat{X}_{n+1}$ et $g = c_n F^n (1-F)^n f$, fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$. Il suffit de montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée g : alors $G(x) - G(a) = \int_a^x g$, et en faisant tendre a vers $-\infty$ ($G(a) \rightarrow 0$),

$$G(x) = \int_{-\infty}^x g, \text{ de sorte que } g \text{ est une densité de } \widehat{X}_{n+1}.$$

Méthode 1 — Taux d'accroissement de G , grâce à a) et b). Fixons x et notons

$\Delta(y, h) = F(y+h) - F(y)$ pour $h > 0$. Comme $P(A) = G(x+h) - G(x)$, a) et b) donnent

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = c_n F(x)^n \frac{\Delta(x, h)}{h} (1 - F(x+h))^n + R(h),$$

$$\text{avec } 0 \leq R(h) \leq K \Delta(x, h) \frac{\Delta(x, h)}{h}.$$

Quand $h \rightarrow 0^+$, $\frac{\Delta(x, h)}{h} \rightarrow f(x)$ (F dérivable en x), $\Delta(x, h) \rightarrow 0$ et $F(x+h) \rightarrow F(x)$ (continuité de F). Donc $R(h) \rightarrow 0$ et le taux d'accroissement tend vers $g(x)$: G est dérivable à droite en x , de dérivée $g(x)$.

À gauche, on applique a) et b) au point $x-h$ (ce qui est permis car K ne dépend pas du point) :

$$\frac{G(x) - G(x-h)}{h} = c_n F(x-h)^n \frac{\Delta(x-h, h)}{h} (1 - F(x))^n + R'(h),$$

$$\text{avec } 0 \leq R'(h) \leq K \Delta(x-h, h) \frac{\Delta(x-h, h)}{h}. \text{ Comme}$$

$$\frac{\Delta(x-h, h)}{h} = \frac{F(x) - F(x-h)}{h} \rightarrow f(x) \text{ et } F(x-h) \rightarrow F(x), \text{ ce taux tend aussi vers } g(x).$$

Ainsi G est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée g continue.

Méthode 2 — Fonction de répartition par dénombrement. Pour $x \in \mathbb{R}$, notons N_x le nombre d'indices i tels que $X_i \leq x$. Les variables $1_{[X_i \leq x]}$ sont indépendantes, de loi de Bernoulli de paramètre $F(x)$, donc $N_x \hookrightarrow \mathcal{B}(2n+1, F(x))$. Les $\widehat{X}_k$ étant les X_i rangés dans l'ordre croissant, $\widehat{X}_{n+1} \leq x$ si et seulement si au moins $n+1$ des X_i sont $\leq x$: $[\widehat{X}_{n+1} \leq x] = [N_x \geq n+1]$. Donc $G(x) = Q(F(x))$ avec

$$Q(u) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} u^k (1-u)^{2n+1-k}.$$

Avec $k \binom{2n+1}{k} = (2n+1) \binom{2n}{k-1}$ et $(2n+1-k) \binom{2n+1}{k} = (2n+1) \binom{2n}{k}$, et en notant $a_k(u) = \binom{2n}{k} u^k (1-u)^{2n-k}$ (avec $a_{2n+1} = 0$) :

$$\begin{aligned} Q'(u) &= (2n+1) \sum_{k=n+1}^{2n+1} (a_{k-1}(u) - a_k(u)) = (2n+1) (a_n(u) - a_{2n+1}(u)) \\ &= (2n+1) \binom{2n}{n} u^n (1-u)^n, \end{aligned}$$

somme télescopique. Par composition, G est de classe C^1 et

$$G' = Q'(F)f = c_n F^n (1-F)^n f = g.$$

Comparaison : la méthode 1 est celle de l'énoncé, qui s'étend à des situations où l'on ne sait pas écrire la fonction de répartition ; la méthode 2, plus rapide, donne en plus l'expression de G et sera réutilisée en 14. b).

Conclusion

$$\widehat{X}_{n+1} \text{ admet la densité } f_{\widehat{X}_{n+1}} = (n+1) \binom{2n+1}{n} F_X^n (1-F_X)^n f_X.$$

13. a) Méthode : équivalents de $1 - F_X(x)$ et de $f_X(x)$ en $+\infty$, puis produit d'équivalents.

Pour $x > \theta$, d'après 8. a) et 6. d) :

$$1 - F(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x - \theta) \right) = \frac{1}{\pi} \text{Arctan} \left(\frac{1}{x - \theta} \right).$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $w = \frac{1}{x - \theta} \rightarrow 0^+$ et, d'après 6. b), $\frac{\text{Arctan}(w)}{w} \rightarrow 1$. Donc

$$1 - F(x) \sim \frac{1}{\pi(x - \theta)} \sim \frac{1}{\pi x}.$$

De plus $F(x) \rightarrow 1$, donc $F(x)^n \rightarrow 1$, et $f(x) = \frac{1}{\pi(1 + (x - \theta)^2)} \sim \frac{1}{\pi x^2}$. Par produit d'équivalents :

$$x f_{\widehat{X}_{n+1}}(x) = c_n F(x)^n (1 - F(x))^n x f(x) \sim c_n \times 1 \times \frac{1}{\pi^n x^n} \times \frac{1}{\pi x}.$$

Conclusion

$$x f_{\widehat{X}_{n+1}}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (n+1) \binom{2n+1}{n} \frac{1}{\pi^{n+1}} \times \frac{1}{x^{n+1}}.$$

b) Méthode : critère d'équivalence aux deux bornes.

$\widehat{X}_{n+1}$ admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_{\widehat{X}_{n+1}}(x) dx$ converge. La fonction intégrée est continue et positive.

En $+\infty$: d'après a), elle est équivalente à $\frac{c_n}{\pi^{n+1} x^{n+1}}$, avec $n+1 \geq 2 > 1$: l'intégrale converge (Riemann).

En $-\infty$: pour $x < \theta$, par imparité de Arctan et 6. d),

$$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(\theta - x) = \frac{1}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{1}{\theta - x}\right) \sim \frac{1}{\pi|x|},$$

et $1 - F(x) \rightarrow 1$, $f(x) \sim \frac{1}{\pi x^2}$. Donc $|x|f_{\widehat{X}_{n+1}}(x) \sim \frac{c_n}{\pi^{n+1}|x|^{n+1}}$ et l'intégrale converge aussi.

Conclusion

$\widehat{X}_{n+1}$ admet une espérance.

c) Méthode : symétrie de la densité de $\widehat{X}_{n+1}$ par rapport à θ .

Estimateur : $\widehat{X}_{n+1} = g_{n+1}(X_1, \dots, X_{2n+1})$ est une fonction de l'échantillon (la fonction « $(n+1)$ -ième plus petite valeur ») qui ne dépend pas de θ : c'est un estimateur de θ .

Symétrie : pour $u \in \mathbb{R}$, $F(\theta + u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(u)$ et, par imparité,

$1 - F(\theta + u) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(u) = F(\theta - u)$; de même $1 - F(\theta - u) = F(\theta + u)$ et $f(\theta + u) = f(\theta - u)$. Donc

$$f_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta + u) = c_n F(\theta - u)^n (1 - F(\theta - u))^n f(\theta - u) = f_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta - u).$$

Calcul : par le changement de variable affine $x = \theta + u$,

$$E(\widehat{X}_{n+1} - \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \theta) f_{\widehat{X}_{n+1}}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta + u) du,$$

intégrale convergente (b)) d'une fonction impaire de u ; elle est la limite de ses intégrales sur $[-A, A]$, toutes nulles.

Conclusion

$E(\widehat{X}_{n+1} - \theta) = 0$: $\widehat{X}_{n+1}$ est un estimateur sans biais de θ , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Contrairement à la moyenne empirique, qui n'a pas d'espérance et dont la loi ne dépend pas de la taille de l'échantillon (partie III), la médiane empirique est un estimateur pertinent de θ .

d) Méthode : même critère d'équivalence avec x^2 .

$\widehat{X}_{n+1}$ admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2, c'est-à-dire si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\widehat{X}_{n+1}}(x) dx$ converge. D'après a) et b), $x^2 f_{\widehat{X}_{n+1}}(x) \sim \frac{c_n}{\pi^{n+1}|x|^n}$ en $\pm\infty$, fonctions positives. L'intégrale converge si et seulement si $n > 1$.

Conclusion

$\widehat{X}_{n+1}$ admet une variance si et seulement si $n \geq 2$ (pour $n = 1$, la médiane de 3 observations a une espérance mais pas de variance).

14. a) Méthode : symétrie établie en 13. c), puis changement de variable affine.

Pour $t \in \mathbb{R}$, avec $u = t - \theta$:

$$f_{\widehat{X}_{n+1}}(2\theta - t) = f_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta - u) = f_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta + u) = f_{\widehat{X}_{n+1}}(t).$$

Comme $\varepsilon > 0$, les événements $[\widehat{X}_{n+1} \leq \theta - \varepsilon]$ et $[\widehat{X}_{n+1} \geq \theta + \varepsilon]$ sont incompatibles et leur réunion est $[|\widehat{X}_{n+1} - \theta| \geq \varepsilon]$. Par le changement de variable affine $s = 2\theta - t$:

$$\begin{aligned} P([\widehat{X}_{n+1} \geq \theta + \varepsilon]) &= \int_{\theta+\varepsilon}^{+\infty} f_{\widehat{X}_{n+1}}(t) dt = \int_{-\infty}^{\theta-\varepsilon} f_{\widehat{X}_{n+1}}(2\theta - s) ds = \int_{-\infty}^{\theta-\varepsilon} f_{\widehat{X}_{n+1}}(s) ds \\ &= F_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta - \varepsilon). \end{aligned}$$

Conclusion

$$f_{\widehat{X}_{n+1}}(2\theta - t) = f_{\widehat{X}_{n+1}}(t) \text{ pour tout } t, \text{ et } P\left(|\widehat{X}_{n+1} - \theta| \geq \varepsilon\right) = 2F_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta - \varepsilon).$$

b) D'après a), il suffit de montrer que $F_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta - \varepsilon) \rightarrow 0$. Posons

$$q = F(\theta - \varepsilon) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(\varepsilon); \text{ comme } 0 < \text{Arctan}(\varepsilon) < \frac{\pi}{2}, \quad q \in \left]0, \frac{1}{2}\right[.$$

Méthode 1 — Majoration de la densité. Pour $x \leq \theta - \varepsilon$, $0 < F(x) \leq q < \frac{1}{2}$ et

$u \mapsto u(1 - u)$ est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, donc $F(x)(1 - F(x)) \leq q(1 - q)$ et

$f_{\widehat{X}_{n+1}}(x) \leq c_n (q(1 - q))^n f(x)$. En intégrant sur $]-\infty, \theta - \varepsilon]$:

$$F_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta - \varepsilon) \leq c_n (q(1 - q))^n q.$$

Or

$$\binom{2n+1}{n} \leq \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1},$$

donc $c_n \leq 2(n+1)4^n$ et

$$0 \leq F_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta - \varepsilon) \leq 2q(n+1)(4q(1-q))^n.$$

Comme $4q(1-q) = 1 - (1-2q)^2 \in]0, 1[$, le majorant tend vers 0 par croissances comparées.

Méthode 2 — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. D'après la méthode 2 de 12. c),

$F_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta - \varepsilon) = P([N \geq n+1])$, où $N = N_{\theta-\varepsilon} \hookrightarrow \mathcal{B}(2n+1, q)$, d'espérance $(2n+1)q$ et de variance $(2n+1)q(1-q)$. Or

$$n+1 - (2n+1)q = (2n+1)\left(\frac{1}{2} - q\right) + \frac{1}{2} > (2n+1)\left(\frac{1}{2} - q\right) > 0,$$

donc $[N \geq n+1] \subset \left[|N - (2n+1)q| \geq (2n+1) \left(\frac{1}{2} - q \right) \right]$ et

$$P([N \geq n+1]) \leq \frac{(2n+1)q(1-q)}{(2n+1)^2 \left(\frac{1}{2} - q \right)^2} = \frac{q(1-q)}{(2n+1) \left(\frac{1}{2} - q \right)^2} \rightarrow 0.$$

Comparaison : la méthode 1 utilise la densité obtenue en 12. c) et donne une décroissance géométrique ; la méthode 2 utilise l'interprétation binomiale et un outil général du programme, avec une majoration moins fine mais suffisante.

Conclusion

pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|\widehat{X}_{n+1} - \theta| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$: la suite $(\widehat{X}_{n+1})$ converge en probabilité vers θ .

c) Méthode : étude directe des fonctions de répartition aux points de continuité de la limite.

La variable certaine θ a pour fonction de répartition $x \mapsto 0$ si $x < \theta$ et $x \mapsto 1$ si $x \geq \theta$, continue en tout $x \neq \theta$.

Pour $x < \theta$: avec $\varepsilon = \theta - x > 0$,

$$F_{\widehat{X}_{n+1}}(x) = F_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta - \varepsilon) = \frac{1}{2} P(|\widehat{X}_{n+1} - \theta| \geq \varepsilon) \rightarrow 0.$$

Pour $x > \theta$: avec $\varepsilon = x - \theta > 0$,

$$1 - F_{\widehat{X}_{n+1}}(x) = P(\widehat{X}_{n+1} > x) \leq P(|\widehat{X}_{n+1} - \theta| \geq \varepsilon) \rightarrow 0,$$

donc $F_{\widehat{X}_{n+1}}(x) \rightarrow 1$.

Conclusion

oui, $(\widehat{X}_{n+1})$ converge en loi vers la variable certaine θ (c'est un cas particulier du fait que la convergence en probabilité entraîne la convergence en loi).

15. a) Méthode : transformation affine d'une variable à densité, par la fonction de répartition.

Posons $a = \frac{2\sqrt{2n+1}}{\pi} > 0$, de sorte que $W_{n+1} = a(\widehat{X}_{n+1} - \theta)$. Pour $x \in \mathbb{R}$,
 $F_{W_{n+1}}(x) = P\left(\left[\widehat{X}_{n+1} \leq \theta + \frac{x}{a}\right]\right) = F_{\widehat{X}_{n+1}}\left(\theta + \frac{x}{a}\right)$. Cette fonction est de classe C^1 et sa dérivée $x \mapsto \frac{1}{a} f_{\widehat{X}_{n+1}}\left(\theta + \frac{x}{a}\right)$ est la densité continue de W_{n+1} .

Calcul : notons $y = \frac{x}{a} = \frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}}$ et $A = \text{Arctan}(y)$. On a $F(\theta + y) = \frac{1}{2} + \frac{A}{\pi}$,

$1 - F(\theta + y) = \frac{1}{2} - \frac{A}{\pi}$, donc $F(\theta + y)(1 - F(\theta + y)) = \frac{1}{4} - \frac{A^2}{\pi^2}$; et

$f(\theta + y) = \frac{1}{\pi}(1 + y^2)^{-1} = \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{\pi^2 x^2}{4(2n+1)}\right)^{-1}$. Enfin $\frac{1}{a} \times \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{2n+1}}$.

Conclusion

$$f_{W_{n+1}}(x) = \frac{n+1}{2\sqrt{2n+1}} \binom{2n+1}{n} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \left(\text{Arctan} \left(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}} \right) \right)^2 \right]^n$$

$$\times \left(1 + \frac{\pi^2 x^2}{4(2n+1)} \right)^{-1}$$

pour tout réel x .

b) Méthode : formule de Stirling (démontrée en 5) pour le coefficient, puis passage par l'exponentielle pour la puissance n -ième.

Coefficient.

$$K_n = \frac{n+1}{2\sqrt{2n+1}} \binom{2n+1}{n} = \frac{(2n+1)!}{2\sqrt{2n+1} (n!)^2} = \frac{\sqrt{2n+1} (2n)!}{2 (n!)^2}.$$

D'après la question 5 (appliquée aux rangs n et $2n$) :

$$(2n)! \sim (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n} \text{ et } (n!)^2 \sim n^{2n} e^{-2n} 2\pi n, \text{ donc } \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{4^n \sqrt{4\pi n}}{2\pi n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

$$\text{Ainsi } K_n \sim \frac{4^n}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2n+1}{n}} \sim \frac{4^n \sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} = \frac{4^n}{\sqrt{2\pi}}, \text{ c'est-à-dire } \frac{K_n}{4^n} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$\text{Réécriture. Avec } y_n = \frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}} \text{ et } w_n = \frac{4}{\pi^2} \text{Arctan}(y_n)^2 :$$

$$f_{W_{n+1}}(x) = \frac{K_n}{4^n} (1 - w_n)^n (1 + y_n^2)^{-1}.$$

$$\text{On a } y_n \rightarrow 0, \text{ donc } (1 + y_n^2)^{-1} \rightarrow 1.$$

Puissance n -ième. Si $x = 0$, $w_n = 0$ et $(1 - w_n)^n = 1 = e^{-0^2/2}$. Si $x \neq 0$, $y_n \neq 0$ et $\text{Arctan}(y_n) \sim y_n$ (6. b)), donc $w_n \sim \frac{4y_n^2}{\pi^2} = \frac{x^2}{2n+1}$; en particulier $w_n \rightarrow 0$, avec $0 < w_n < 1$ car $|\text{Arctan}(y_n)| < \frac{\pi}{2}$. Comme $\ln(1 - w) \sim -w$ quand $w \rightarrow 0$:

$$n \ln(1 - w_n) \sim -nw_n \sim -\frac{nx^2}{2n+1} \rightarrow -\frac{x^2}{2},$$

$$\text{donc } n \ln(1 - w_n) \rightarrow -\frac{x^2}{2} \text{ et, par continuité de exp, } (1 - w_n)^n = \exp(n \ln(1 - w_n)) \rightarrow e^{-x^2/2}.$$

Conclusion

$$\text{pour tout réel } x, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{W_{n+1}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Le passage de cette convergence des densités à la convergence en loi de (W_{n+1}) vers $T \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ est admis par l'énoncé.

c) Méthode : convergence en loi admise en b), puis inversion de l'encadrement.

Existence de t_α : Φ est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$ et $1 - \frac{\alpha}{2} \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$, donc t_α existe et $t_\alpha > 0$.

Comme W_{n+1} est à densité, $P([-t_\alpha \leq W_{n+1} \leq t_\alpha]) = F_{W_{n+1}}(t_\alpha) - F_{W_{n+1}}(-t_\alpha)$. Φ étant

continue en tout point, la convergence en loi admise donne

$$P([-t_\alpha \leq W_{n+1} \leq t_\alpha]) \rightarrow \Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) = 2\Phi(t_\alpha) - 1 = 1 - \alpha.$$

Or $-t_\alpha \leq \frac{2\sqrt{2n+1}}{\pi}(\widehat{X}_{n+1} - \theta) \leq t_\alpha$ équivaut à

$\widehat{X}_{n+1} - \frac{\pi t_\alpha}{2\sqrt{2n+1}} \leq \theta \leq \widehat{X}_{n+1} + \frac{\pi t_\alpha}{2\sqrt{2n+1}}$. Les bornes sont des estimateurs : elles ne dépendent que de l'échantillon et de α , pas de θ .

Conclusion

$\left[\widehat{X}_{n+1} - \frac{\pi t_\alpha}{2\sqrt{2n+1}}, \widehat{X}_{n+1} + \frac{\pi t_\alpha}{2\sqrt{2n+1}} \right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de θ au niveau de confiance $1 - \alpha$, centré sur $\widehat{X}_{n+1}$ (pour $\alpha = 0,05$, $t_\alpha \approx 1,96$ et la demi-largeur vaut environ $\frac{3,08}{\sqrt{2n+1}}$).

16. Code adapté en Python.

Méthode : chaque ligne de **A** est une réalisation du $(2n + 1)$ -échantillon ; en triant chaque ligne par ordre croissant, l'élément de rang $n + 1$, c'est-à-dire d'indice n puisque les indices commencent à 0, est une réalisation de la médiane empirique ; on applique ensuite la transformation affine définissant W_{n+1} avec $\theta = 0$.

Les lignes à compléter sont :

Python

```
S = np.sort(A, axis=1)
MedianeEmp = S[:, n]
W = 2 * np.sqrt(2*n+1) / np.pi * MedianeEmp
```

Explications : `np.sort(A, axis=1)` trie chaque ligne (chaque échantillon) indépendamment des autres ; `S[:, n]` extrait, pour chacune des p lignes, la $(n + 1)$ -ième

plus petite valeur, soit p réalisations indépendantes de $\widehat{X}_{n+1}$; comme $\theta = 0$,

$W_{n+1} = \frac{2\sqrt{2n+1}}{\pi} \widehat{X}_{n+1}$, et l'opération est faite coefficient par coefficient sur le tableau `MedianeEmp`.

Programme complet exécuté, avec la fonction cauchy de la question 11 :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def cauchy(N, n):
    U = rd.random((N, n))
    return np.tan(np.pi * (U - 0.5))

p = 10000
n = 50
A = cauchy(p, 2*n+1)
S = np.sort(A, axis=1)
MedianeEmp = S[:, n]
W = 2 * np.sqrt(2*n+1) / np.pi * MedianeEmp
print(np.mean(W), np.var(W), np.mean(np.abs(W) <= 1.96))
```

Lors de l'exécution, on a obtenu une moyenne empirique de W proche de 0 (environ 0,003), une variance empirique (convention de `np.var` : division par p) proche de 1 (environ 1,01) et une proportion de valeurs dans $[-1,96; 1,96]$ d'environ 0,950 : ces observations sont cohérentes avec la convergence en loi de W_{n+1} vers la loi normale centrée réduite (15. b)), sans en constituer une preuve.

Conclusion

`S = np.sort(A, axis=1)`, `MedianeEmp = S[:, n]` et `W = 2 * np.sqrt(2n+1) / np.pi * MedianeEmp`.

Relevé des adaptations

9. (préambule) et 9. c) L'original admet la décomposition de $\varphi_{n,x}$ et les formules donnant $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$. Erreur d'énoncé : pour $(n, x) = (1, 0)$, $\sigma_{1,0} = 0$ et la décomposition n'existe pas. L'énoncé adapté admet ces résultats pour $(n, x) \neq (1, 0)$ et ajoute en 9. c) l'indication « Pour $(n, x) = (1, 0)$, on pourra intégrer par parties $\int_{-A}^A \frac{dt}{1+t^2}$ pour $A > 0$ ». Justification : ne jamais admettre un énoncé faux, tout en conservant la relation de 9. c), vraie pour tout (n, x) et utilisée en 10. b) et 10. c).
11. Code adapté en Python. Les commandes Scilab `sum(M)`, `sum(M,'r')`, `sum(M,'c')`, `linspace(a : l : b)` et `histplot` sont remplacées par `np.sum(M)`, `np.sum(M, axis=0)`, `np.sum(M, axis=1)`, `np.linspace` et `plt.hist(data, bins=y, density=True)`, présentées dans l'énoncé avec leur syntaxe, leur rôle et leurs conventions (indices commençant à 0, classes de l'histogramme fermées à gauche) ; le programme est traduit en conservant la ligne à compléter. La figure des deux histogrammes est reproduite à partir de l'original dans le fichier compagnon `sujet_hec_escp_maths2_2017_histogrammes.png`, accompagnée d'une description. Justification : seul Python est au programme.
16. Code adapté en Python. La commande Scilab `gsort` (tri décroissant par colonnes ou par lignes) est remplacée par `np.sort(A, axis=0)` et `np.sort(A, axis=1)` (tri croissant), présentées dans l'énoncé ; les trois lignes à compléter sont conservées. Justification : seul Python est au programme ; la médiane est l'élément d'indice n de chaque ligne triée.

Choix de méthode sans modification de l'énoncé : en 4. c), la limite est obtenue par encadrement de probabilités, sans le théorème de Slutsky (hors programme) ; la formule de Stirling n'est jamais supposée connue, elle est démontrée en 5 avant d'être utilisée en 15. b).