



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**HEC**

Mathématiques

**2016**

*Sujet de mathématiques approfondies*

---

**Mathématiques approfondies — Prépa ECG**

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème :

- $n$  et  $k$  sont deux entiers vérifiant  $2 \leq k \leq n$ . L'espace  $E$  est un espace vectoriel réel de dimension  $n$ , muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$  qui en fait un espace euclidien.
- On note  $0_E$  le vecteur nul,  $0_{\mathcal{L}(E)}$  l'endomorphisme nul et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $E$ . L'endomorphisme identité est noté  $\text{id}_E$ .
- Pour tout sous-espace  $F$  de  $E$ , on note  $F^\perp$  son orthogonal et  $p_F$  le projecteur orthogonal d'image  $F$  : il vérifie  $p_F(x) = x$  pour  $x \in F$  et  $p_F(x) = 0_E$  pour  $x \in F^\perp$ .
- On note  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices réelles à  $n$  lignes et  $m$  colonnes. La transposée de  $A$  est notée  ${}^tA$ .
- Pour  $(\rho_1, \dots, \rho_k) \in \mathbb{R}^k$ , on note  $\text{Diag}(\rho_1, \dots, \rho_k)$  la matrice diagonale de taille  $k$  ayant ces coefficients dans cet ordre.
- On note  $I_n$  la matrice identité de taille  $n$ .

La somme de  $k$  sous-espaces  $F_1, \dots, F_k$  de  $E$  est

$$\sum_{i=1}^k F_i = \left\{ \sum_{i=1}^k x_i \mid x_i \in F_i \text{ pour tout } i \right\}.$$

Ces sous-espaces sont en somme directe si chaque vecteur de leur somme admet une unique décomposition sous cette forme. On note alors leur somme  $\bigoplus_{i=1}^k F_i$ .

## Partie I — Partitions de l'identité

Soient  $u_1, \dots, u_k$  des endomorphismes de  $E$ . On dit qu'ils constituent une partition de l'identité de  $E$  si  $u_1 + \dots + u_k = \text{id}_E$ .

1. Exemple 1. Dans cette question,  $n = 3$  et  $E = \mathbb{R}^3$ . Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et  $f$  l'endomorphisme de matrice  $A$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

1. (a) Préciser le spectre de  $A$  et montrer que  $A$  n'est pas diagonalisable.
  1. (b) Montrer que le polynôme  $Q(X) = X^3 + X^2$  est un polynôme annulateur de  $A$ .
  1. (c) Existe-t-il un polynôme de degré 2 annulateur de  $A$ ?
  1. (d) Trouver deux polynômes  $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$  pour lesquels les endomorphismes  $Q_1(f)$  et  $Q_2(f)$  sont des projecteurs et constituent une partition de l'identité de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Exemple 2. On considère un endomorphisme  $f$  de  $E$ , diagonalisable, possédant  $k$  valeurs propres distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .

Pour  $1 \leq i \leq k$ , on note

$$L_i(X) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq k \\ j \neq i}} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j},$$

$$E_{\lambda_i}(f) = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{id}_E), \quad v_i = L_i(f).$$

2. (a) Justifier  $E = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}(f)$ . En déduire que

$$\prod_{j=1}^k (X - \lambda_j)$$

est un polynôme annulateur de  $f$ .

2. (b) Établir, pour tout  $1 \leq i \leq k$ , l'inclusion  $\text{Im}(v_i) \subset E_{\lambda_i}(f)$ .

2. (c) Pour tout  $1 \leq j \leq k$ , calculer

$$\sum_{i=1}^k L_i(\lambda_j).$$

En déduire que  $v_1, \dots, v_k$  constituent une partition de l'identité de  $E$ .

2. (d) Établir, pour tout  $1 \leq i \leq k$ , l'égalité  $\text{Im}(v_i) = E_{\lambda_i}(f)$ . Identifier l'endomorphisme  $v_i$ .

3. Soient  $u_1, \dots, u_k$  des endomorphismes constituant une partition de l'identité de  $E$ . On note  $r_i = \text{rg}(u_i)$ .

3. (a) Établir

$$E = \sum_{i=1}^k \text{Im}(u_i)$$

et

$$n \leq \sum_{i=1}^k r_i.$$

3. (b) Montrer que les sous-espaces  $\text{Im}(u_1), \dots, \text{Im}(u_k)$  sont en somme directe si et seulement si

$$n = \sum_{i=1}^k r_i.$$

3. (c) On cherche à montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

$$(1) \quad n = \sum_{i=1}^k r_i;$$

- (2)  $u_1, \dots, u_k$  sont des projecteurs ;

- (3)  $u_i \circ u_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$  pour  $i \neq j$ .

3. (c) i. En utilisant la trace des matrices de projecteurs, justifier  $(2) \Rightarrow (1)$ . On établira au préalable que la trace de la matrice d'un projecteur est égale à son rang, en utilisant une base adaptée à son image et à son noyau.

3. (c) ii. À l'aide de 3. (b), et en écrivant les vecteurs  $u_1(x), \dots, u_k(x)$  comme des sommes de  $k$  vecteurs, établir  $(1) \Rightarrow (3)$ .

3. (c) iii. Conclure en établissant une troisième implication.

## Partie II — Représentation matricielle d'un projecteur orthogonal

---

4. (a) Soit  $p$  un endomorphisme de  $E$  et  $P$  sa matrice dans  $\mathcal{B}$ . Montrer que  $p$  est un projecteur orthogonal si et seulement si  $P^2 = P$  et  ${}^tP = P$ .

4. (b) Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  et  $M$  sa matrice dans  $\mathcal{B}$ . Établir l'existence d'un réel  $\alpha$  et d'un projecteur orthogonal  $p$  tels que  $f = \alpha p$  si et seulement si

$$\text{Tr}(M)M^2 = \text{Tr}(M^2)M \quad \text{et} \quad {}^tM = M.$$

5. (a) Écrire en Python une fonction  $\text{tr}(A)$  qui calcule la trace d'une matrice carrée réelle  $A$  fournie sous la forme d'un tableau NumPy.
5. (b) La fonction suivante teste si une matrice carrée réelle  $A$  de taille  $n$  est symétrique.

### Python

```
def issym(n, A):
    b = True
    for i in range(n - 1):
        for j in range(i + 1, n):
            b = b and (A[i, j] == A[j, i])
    return b
```

Préciser la signification de la ligne  $b = b \text{ and } (A[i, j] == A[j, i])$ . Donner un exemple d'utilisation en précisant les entrées et la sortie.

Les indices Python commencent à 0. La commande  $A.\text{shape}[0]$  renvoie le nombre de lignes d'un tableau NumPy. Le produit matriciel s'écrit  $\text{np.dot}(A, B)$ ; le produit  $A * B$  de deux tableaux est un produit coefficient par coefficient. Les tests d'égalité du code sont des tests exacts, conformément aux identités mathématiques étudiées.

5. (c) La fonction suivante teste si une matrice carrée réelle  $M$  de taille  $n$  représente un endomorphisme de la forme  $\alpha p$ , où  $p$  est un projecteur orthogonal, dans une base orthonormale. Elle utilise les deux fonctions précédentes et la condition de 4. (b).

### Python

```
import numpy as np

def orthoproj(n, M):
    M2 = np.dot(M, M)
    A = tr(M) * M2
    B = tr(M2) * M
    b = issym(n, M)
```

```

if b:
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            b = ...
return b

```

Compléter la ligne incomplète. Donner les sorties pour

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les définitions suivantes concernent les questions 6 à 9. Pour  $x \in E$ , on note  $X$  la colonne de ses coordonnées dans  $\mathcal{B}$ . Soit  $\mathcal{F} = (s_1, \dots, s_k)$  une famille de vecteurs de  $E$  et  $F = \text{Vect}(s_1, \dots, s_k)$ . On note  $S \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$  la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de  $s_1, \dots, s_k$  dans cet ordre.

6. (a) Montrer que  $S$  et  ${}^tSS$  ont le même rang.
6. (b) Soit  $y \in E$ . Montrer que  $y \in F$  si et seulement s'il existe  $Z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$  tel que  $Y = SZ$ .
6. (c) Soit  $y \in E$ . Montrer que  $y \in F^\perp$  si et seulement si  ${}^tSY = 0$ .
6. (d) Soient  $x \in E$  et  $y = p_F(x)$ . Établir l'existence de  $Z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$  tel que  $Y = SZ$  et  ${}^tSX = {}^tSSZ$ .
6. (e) En déduire l'expression de la matrice de  $p_F$  dans  $\mathcal{B}$  en fonction de  $S$ , lorsque  $\mathcal{F}$  est libre.
7. Soit  $M \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$  une matrice symétrique. On appelle inverse de Penrose-Moore de  $M$

toute matrice  $N \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$  vérifiant

$$MNM = M, \quad NMN = N, \quad {}^t(MN) = MN, \quad {}^t(NM) = NM.$$

7. (a) Établir l'existence d'une matrice  $Q \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$  vérifiant  ${}^tQQ = Q{}^tQ = I_k$  et de réels  $\rho_1, \dots, \rho_k$  tels que

$$M = Q \operatorname{Diag}(\rho_1, \dots, \rho_k) {}^tQ.$$

7. (b) On définit  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $h(t) = 1/t$  si  $t \neq 0$ , et  $h(0) = 0$ . On pose

$$M^{(-)} = Q \operatorname{Diag}(h(\rho_1), \dots, h(\rho_k)) {}^tQ.$$

Montrer que  $M^{(-)}$  est une inverse de Penrose-Moore de  $M$ .

7. (c) Soit  $N$  une inverse de Penrose-Moore de  $M$ .

7. (c) i. Justifier  $N = M{}^tNN$  et  $M^2N = M$ .

7. (c) ii. Soit  $U \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ . Si  $M^2U = 0$ , montrer que  $MU = 0$ .

7. (c) iii. On pose  $U = N - M^{(-)}$ . Justifier que  $M^{(-)}$  est l'unique inverse de Penrose-Moore de  $M$ .

8. On note  $({}^tSS)^{(-)}$  l'unique inverse de Penrose-Moore de  ${}^tSS$  et on pose

$$P = S({}^tSS)^{(-)} {}^tS.$$

8. (a) Montrer que  $P$  et  $S$  ont le même rang.

8. (b) Justifier que  $P$  est la matrice de  $p_F$  dans  $\mathcal{B}$ , et que son expression généralise celle de 6. (e) lorsque  $\mathcal{F}$  est libre.

9. Exemple. On suppose  $k = 2$ ,  $s_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $s_2 = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  dans  $\mathcal{B}$ ,  $s_1 \neq 0_E$  et  ${}^tSS$  non inversible.
9. (a) Établir l'existence d'un réel  $\theta$  tel que  $\beta_i = \theta\alpha_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .
9. (b) Déterminer une matrice orthogonale  $Q$  pour laquelle  ${}^tQ{}^tSSQ$  est diagonale.
9. (c) En déduire l'inverse de Penrose-Moore de  ${}^tSS$ .
9. (d) Soit

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E.$$

Calculer  $p_F(x)$ .

### Partie III — Application probabiliste

Dans cette partie,  $E = \mathbb{R}^n$ . Toutes les variables et tous les vecteurs aléatoires sont définis sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Pour tout entier  $d \geq 1$ , on dit qu'une variable  $C$  suit la loi du khi-deux de paramètre  $d$ , notée  $\chi^2(d)$ , lorsque  $C/2$  suit la loi gamma  $\gamma(d/2)$  de forme  $d/2$  et de taux 1. Aucune propriété de cette loi, autre que cette définition, n'est supposée connue.

On appelle variable gaussienne toute variable qui suit une loi normale ou qui est certaine. On note sa loi  $\mathcal{G}(\mu, \sigma^2)$ , où  $\mu$  est son espérance et  $\sigma$  son écart-type. Si  $\sigma > 0$ , il s'agit de  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ; si  $\sigma = 0$ , on a  $P(X = \mu) = 1$ .

10. Soient  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  et  $X_1, \dots, X_n$  des variables mutuellement indépendantes de même loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$$

suit la loi  $\chi^2(n)$ .

On dit qu'un vecteur  $(G_1, \dots, G_n)$  est un vecteur gaussien centré si, pour tout  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , la variable

$$\sum_{i=1}^n a_i G_i$$

est une variable gaussienne centrée. On note  $G$  la colonne de ses composantes.

**11.** Soient  $(G_1, \dots, G_n)$  un vecteur gaussien centré,  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $H = MG$ .

**11.** (a) Montrer que  $(H_1, \dots, H_n)$  est un vecteur gaussien centré.

**11.** (b) Justifier que chaque produit  $G_i G_j$  admet une espérance.

On note alors  $\Lambda(G) = (E(G_i G_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ . On admet le résultat particulier suivant : deux vecteurs gaussiens centrés  $G$  et  $R$  vérifiant  $\Lambda(G) = \Lambda(R)$  ont la même loi. Autrement dit, pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$P \left( \bigcap_{i=1}^n \{G_i \leq x_i\} \right) = P \left( \bigcap_{i=1}^n \{R_i \leq x_i\} \right).$$

**12.** On suppose  $G_1, \dots, G_n$  mutuellement indépendantes de même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**12.** (a) Montrer que  $(G_1, \dots, G_n)$  est un vecteur gaussien centré. Déterminer  $\Lambda(G)$ .

**12.** (b) Soit  $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  ${}^tQQ = Q{}^tQ = I_n$  et soit  $H = QG$ . Montrer que  $H_1, \dots, H_n$  sont mutuellement indépendantes de même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**13.** Soit  $(G_1, \dots, G_n)$  un vecteur gaussien centré dont les composantes sont mutuellement indépendantes et de variance 1. Soient  $P_1, \dots, P_k$  des matrices

symétriques réelles de taille  $n$ , de rangs respectifs  $r_1, \dots, r_k$ . On suppose

$$\sum_{i=1}^k P_i = I_n, \quad \sum_{i=1}^k r_i = n.$$

13. (a) Justifier que  $P_1, \dots, P_k$  représentent des projecteurs orthogonaux dont les images sont deux à deux orthogonales.
13. (b) En déduire l'existence d'une matrice  $Q$  vérifiant  ${}^tQQ = Q{}^tQ = I_n$ , pour laquelle toutes les matrices  $QP_i{}^tQ$  sont diagonales.
13. (c) On suppose  $r_1 \neq 0$ . Montrer que  ${}^tGP_1G$  suit la loi  $\chi^2(r_1)$ .
13. (d) Montrer que  ${}^tGP_1G, \dots, {}^tGP_kG$  sont mutuellement indépendantes.
14. Soient  $q, m \geq 2$  des entiers et  $(X_{i,j})_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq m}$  une famille de variables mutuellement indépendantes de même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . On pose

$$\bar{X} = \frac{1}{qm} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^m X_{i,j}, \quad Z_j = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q X_{i,j} \quad (1 \leq j \leq m).$$

14. (a) Déterminer les lois de  $\bar{X}$  et

$$\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^m (X_{i,j} - \bar{X})^2$$

et établir leur indépendance.

14. (b) Déterminer les lois de

$$\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^m (X_{i,j} - Z_j)^2$$

et

$$q \sum_{j=1}^m (Z_j - \bar{X})^2$$

et établir leur indépendance.