



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2016

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Partie I : Simulation d'une variable aléatoire à densité

1) a) La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$: l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.

En 0 : $g(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$, et l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ converge car $\frac{1}{2} < 1$.

En $+\infty$: $g(x) \sim \frac{1}{x^{3/2}}$, et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge car $\frac{3}{2} > 1$.

Par le critère d'équivalence pour les fonctions positives, $\int_0^1 g$ et $\int_1^{+\infty} g$ convergent.

Conclusion

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ converge.

b) Comme $V(\Omega) = [0, \pi/2[$, $X = \tan^2(V)$ est bien défini et à valeurs dans $[0, +\infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x < 0$: $[X \leq x] = \emptyset$, donc $F_X(x) = 0$.

Si $x \geq 0$: pour $t \in [0, \pi/2[$, on a $\tan(t) \geq 0$, donc $\tan^2(t) \leq x \iff \tan(t) \leq \sqrt{x}$. La fonction $\tan$ réalise une bijection strictement croissante de $[0, \pi/2[$ sur $[0, +\infty[$, de réciproque $\arctan$, donc $\tan(t) \leq \sqrt{x} \iff t \leq \arctan \sqrt{x}$. Ainsi $[X \leq x] = [V \leq \arctan \sqrt{x}]$ et, comme $\arctan \sqrt{x} \in [0, \pi/2[$:

$$F_X(x) = \frac{\arctan \sqrt{x}}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{x}$$

La fonction F_X est continue sur $] -\infty, 0[$ (nulle) et sur $[0, +\infty[$ (composée de fonctions continues), avec $F_X(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} F_X(x)$: elle est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe C^1

sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ (la racine carrée est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et $\arctan$ sur $\mathbb{R}$).

Conclusion

F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf peut-être en 0, donc X est une variable aléatoire à densité, avec $F_X(x) = \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$ et $F_X(x) = 0$ pour $x < 0$.

- c) D'après b), une densité de X s'obtient en dérivant F_X là où elle est dérivable et en choisissant une valeur arbitraire en 0. Pour $x < 0$, $F'_X(x) = 0$. Pour $x > 0$:

$$F'_X(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\pi\sqrt{x}(1+x)} = f(x)$$

En prenant la valeur 0 en 0, on obtient exactement f . La fonction f est donc une densité de X ; en particulier elle est positive, continue sauf en 0, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$.

Remarque : on retrouve directement $\int f = 1$, car $x \mapsto \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{x}$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$; pour $0 < \varepsilon < A$, $\int_{\varepsilon}^A f = \frac{2}{\pi} (\arctan \sqrt{A} - \arctan \sqrt{\varepsilon})$, qui tend vers $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$. On en déduit aussi la valeur de l'intégrale de 1) a) : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \pi$.

Conclusion

f est une densité de probabilité (c'est une densité de X).

- 2) a) Code adapté en Python. La fonction Scilab de l'énoncé d'origine est remplacée par une fonction Python `simulX(N)`.

Si U suit la loi uniforme sur $[0, 1[$, alors $V = \frac{\pi}{2}U$ suit la loi uniforme sur $[0, \pi/2[$ (transformation affine croissante), et d'après 1) b), $\tan^2(V)$ suit la loi de X . On simule donc N variables uniformes indépendantes, puis on applique $t \mapsto \tan^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ à chacune. La tangente est calculée comme quotient du sinus par le cosinus.

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd

def simulX(N):
    u = rd.random(N)
    x = np.zeros(N)          # tableau de même taille que u
    for i in range(N):
        v = np.pi / 2 * u[i]
        t = np.sin(v) / np.cos(v)
        x[i] = t * t
    return x
```

Les composantes de x sont des fonctions de composantes indépendantes de u : ce sont des simulations indépendantes de X .

Conclusion

il faut écrire $u = \text{rd.random}(N)$ et $x[i] = \tan^2(\pi u[i]/2)$, par exemple sous la forme ci-dessus.

b) Code adapté en Python (même boucle que dans l'énoncé d'origine, écrite en Python).

En fin de boucle, y est le nombre d'indices i tels que $x[i] > 1$. Notons $X_1, \dots, X_N$ des variables indépendantes de même loi que X dont les $x[i]$ sont des simulations ; y simule

$$Y_N = \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{[X_i > 1]},$$

somme de N variables de Bernoulli indépendantes de paramètre :

$$P([X > 1]) = 1 - F_X(1) = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan(1) = 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

Donc Y_N suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(N, \frac{1}{2}\right)$.

Ensuite q simule $\frac{Y_N}{N}$, moyenne empirique de N variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$, qui admettent une variance. Par la loi faible des grands nombres, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{Y_N}{N} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow +\infty$. (Un essai avec $N = 10^5$ donne $q \approx 0,50$.)

Conclusion

y simule une variable de loi $\mathcal{B}\left(N, \frac{1}{2}\right)$, et pour N grand on s'attend à ce que q soit proche de $\frac{1}{2} = P([X > 1])$, par la loi faible des grands nombres.

3) a) Comme X est à densité, F_X est continue et croissante sur $\mathbb{R}$, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. Comme $0 < p < 1$, il existe x_0 tel que $F_X(x_0) < p$ (limite 0) et x_1 tel que $F_X(x_1) > p$ (limite 1). Ainsi $x_0 \in J_p$, et par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à F_X continue entre x_0 et x_1 , il existe b tel que $F_X(b) = p$, donc $K_p \neq \emptyset$.

Soit $a \in J_p$ et $b \in K_p$. Si on avait $a \geq b$, la croissance de F_X donnerait $F_X(a) \geq F_X(b) = p$, ce qui contredit $F_X(a) < p$.

Conclusion

J_p et K_p sont non vides et tout élément de J_p est strictement inférieur à tout élément de K_p .

b) K_p est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par n'importe quel élément de J_p (d'après a)) : elle admet une borne inférieure $G_X(p)$.

Par caractérisation de la borne inférieure, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $b_n \in K_p$ tel que $G_X(p) \leq b_n < G_X(p) + \frac{1}{n}$. La suite (b_n) converge vers $G_X(p)$ et $F_X(b_n) = p$ pour tout n . Par continuité de F_X en $G_X(p)$, $F_X(G_X(p)) = \lim F_X(b_n) = p$.

Conclusion

$G_X(p)$ existe et $F_X(G_X(p)) = p$ (autrement dit $G_X(p)$ est le plus petit élément de K_p).

c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x < G_X(p)$: par croissance, $F_X(x) \leq F_X(G_X(p)) = p$. Si on avait $F_X(x) = p$, alors $x \in K_p$, donc $x \geq \inf K_p = G_X(p)$, contradiction. Donc $F_X(x) < p$.

Si $F_X(x) < p$: $x \in J_p$ et $G_X(p) \in K_p$ d'après b), donc $x < G_X(p)$ d'après a).

Conclusion

pour tout réel x , $x < G_X(p) \iff F_X(x) < p$.

d) Comme $U(\Omega) =]0, 1[$, $G_X(U)$ est bien défini. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, la question c) appliquée avec $p = U(\omega) \in]0, 1[$ donne : $x < G_X(U(\omega)) \iff F_X(x) < U(\omega)$. En passant aux contraires :

$$[G_X(U) \leq x] = [U \leq F_X(x)]$$

C'est un événement, donc $G_X(U)$ est une variable aléatoire, et comme $F_X(x) \in [0, 1]$ et U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$:

$$P([G_X(U) \leq x]) = P([U \leq F_X(x)]) = F_X(x)$$

Conclusion

$G_X(U)$ a la même fonction de répartition que X , donc la même loi.

e) D'après 1), $F_X(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et $F_X(x) = \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$. Soit $p \in]0, 1[$.
Un réel $x \leq 0$ n'est pas dans K_p car $F_X(x) = 0 \neq p$. Pour $x > 0$:

$$F_X(x) = p \iff \arctan \sqrt{x} = \frac{\pi p}{2} \iff \sqrt{x} = \tan\left(\frac{\pi p}{2}\right) \iff x = \tan^2\left(\frac{\pi p}{2}\right)$$

car $\frac{\pi p}{2} \in]0, \pi/2[$ et $\tan\left(\frac{\pi p}{2}\right) > 0$. Donc $K_p = \left\{ \tan^2\left(\frac{\pi p}{2}\right) \right\}$.

Conclusion

pour tout $p \in]0, 1[$, $G_X(p) = \tan^2\left(\frac{\pi p}{2}\right)$. On retrouve la méthode de simulation de 2) a) : $G_X(U) = \tan^2\left(\frac{\pi}{2}U\right)$.

Partie II : Fonction de répartition conjointe de deux variables aléatoires de lois uniformes

- 4) a) Soit $y \leq y'$. Alors $[Y \leq y] \subset [Y \leq y']$, donc $[X \leq x] \cap [Y \leq y] \subset [X \leq x] \cap [Y \leq y']$ et, par croissance de P , $F(x, y) \leq F(x, y')$.

Conclusion

$y \mapsto F(x, y)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

- b) Chaque $[X \leq x] \cap [Y \leq n]$ est inclus dans $[X \leq x]$, donc la réunion aussi. Réciproquement, soit $\omega \in [X \leq x]$; $Y(\omega)$ est un réel, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq Y(\omega)$ (par exemple $n = \max(1, \lfloor Y(\omega) \rfloor + 1)$), et alors $\omega \in [X \leq x] \cap [Y \leq n]$.

Conclusion

$$[X \leq x] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} ([X \leq x] \cap [Y \leq n]).$$

- c) Les événements $A_n = [X \leq x] \cap [Y \leq n]$ forment une suite croissante pour l'inclusion. Par le théorème de la limite monotone et b) :

$$F(x, n) = P(A_n) \rightarrow P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = P([X \leq x])$$

Soit maintenant $y \geq 1$ et $m = \lfloor y \rfloor \in \mathbb{N}^*$, de sorte que $m \leq y < m + 1$. D'après a) : $F(x, \lfloor y \rfloor) \leq F(x, y) \leq F(x, \lfloor y \rfloor + 1)$. Lorsque $y \rightarrow +\infty$, $\lfloor y \rfloor \rightarrow +\infty$ en prenant des valeurs entières, donc les deux membres extrêmes tendent vers $P([X \leq x])$, et on conclut par encadrement.

Conclusion

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = P([X \leq x]).$$

- d) Pour tout y , $[X \leq x] \cap [Y \leq y] \subset [Y \leq y]$, donc $0 \leq F(x, y) \leq F_Y(y)$, et $F_Y(y) \rightarrow 0$ lorsque $y \rightarrow -\infty$.

Conclusion

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0, \text{ par encadrement.}$$

- e) (i) Comme $a \leq a'$, $[X \leq a'] = [X \leq a] \cup [a < X \leq a']$, réunion disjointe. En intersectant avec B , on obtient une réunion disjointe $[X \leq a'] \cap B = ([X \leq a] \cap B) \cup (A \cap B)$, d'où par additivité :

$$P(A \cap B) = P([X \leq a'] \cap B) - P([X \leq a] \cap B)$$

- (ii) De même, pour tout réel c ,

$$[X \leq c] \cap [Y \leq b'] = ([X \leq c] \cap [Y \leq b]) \cup ([X \leq c] \cap B),$$

réunion disjointe, donc $P([X \leq c] \cap B) = F(c, b') - F(c, b)$. En appliquant ceci à $c = a'$ et $c = a$ dans (i) :

$$P(A \cap B) = F(a', b') - F(a', b) - (F(a, b') - F(a, b))$$

Conclusion

$$P(A \cap B) = F(a', b') - F(a', b) - F(a, b') + F(a, b).$$

5) a) D'après les lois de De Morgan,

$$\overline{[U > u] \cup [V > v]} = \overline{[U > u]} \cap \overline{[V > v]} = [U \leq u] \cap [V \leq v],$$

et cet événement est inclus dans $[U \leq u]$.

Conclusion

$$\overline{[U > u] \cup [V > v]} = [U \leq u] \cap [V \leq v] \subset [U \leq u].$$

b) Par a) et croissance de P , $C(u, v) \leq P([U \leq u]) = u$, car U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$ et $u \in [0, 1]$.

Par a), puis par la sous-additivité $P(E \cup E') \leq P(E) + P(E')$:

$$\begin{aligned} C(u, v) &= 1 - P([U > u] \cup [V > v]) \geq 1 - P([U > u]) - P([V > v]) = 1 - (1 - u) \\ &\quad - (1 - v) = u + v - 1 \end{aligned}$$

Conclusion

$$u + v - 1 \leq C(u, v) \leq u.$$

c) En échangeant les rôles de U et V dans b) (on a aussi $[U \leq u] \cap [V \leq v] \subset [V \leq v]$), on obtient $C(u, v) \leq v$, donc $C(u, v) \leq \min\{u, v\}$. Par ailleurs $C(u, v) \geq 0$ (c'est une probabilité) et $C(u, v) \geq u + v - 1$, donc $C(u, v) \geq \max\{u + v - 1, 0\}$.

Conclusion

$$C_-(u, v) \leq C(u, v) \leq C_+(u, v) \text{ pour tout } (u, v) \in [0, 1]^2.$$

6) a) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $[U \leq x] \cap [U \leq y] = [U \leq \min\{x, y\}]$. Donc

$$F_{(U, U)}(x, y) = F_U(\min\{x, y\}).$$

Conclusion

$$F_{(U, U)}(x, y) = 0 \text{ si } \min\{x, y\} < 0, F_{(U, U)}(x, y) = \min\{x, y\} \text{ si } 0 \leq \min\{x, y\} \leq 1, \text{ et } F_{(U, U)}(x, y) = 1 \text{ si } \min\{x, y\} > 1.$$

b) Soit $c \in]0, 1[$. D'après a), $F_{(U, U)}(x, y) = c \iff \min\{x, y\} = c$. La ligne de niveau c est donc l'équerre formée des deux demi-droites issues du point (c, c) :

$$\{(c, y) ; y \geq c\} \cup \{(x, c) ; x \geq c\}$$

c'est-à-dire la demi-droite verticale d'abscisse c dirigée vers le haut et la demi-droite horizontale d'ordonnée c dirigée vers la droite.

Cherchons l'ensemble E des (x, y) tels que $F_{(U, U)}(x, y) = x$.

Si $\min\{x, y\} < 0$: il faut $x = 0$, et alors $\min\{0, y\} < 0$ impose $y < 0$.

Si $0 \leq \min\{x, y\} \leq 1$: il faut $\min\{x, y\} = x$, c'est-à-dire $x \leq y$, avec $0 \leq x \leq 1$.

Si $\min\{x, y\} > 1$: il faudrait $x = 1$, ce qui contredit $x > 1$.

Donc $E = \{(0, y) ; y < 0\} \cup \{(x, y) ; 0 \leq x \leq 1, y \geq x\}$: c'est la demi-droite $\{x = 0, y < 0\}$ réunie avec la région non bornée située entre les droites $x = 0$ et $x = 1$ et au-dessus de la diagonale $y = x$ (elle contient la demi-droite $\{x = 0, y \geq 0\}$, donc E contient tout l'axe des ordonnées). Le code suivant trace la figure pour $c = \frac{1}{2}$.

Python

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

c = 0.5

plt.plot([c, c], [c, 3], 'b')      # demi-droite verticale
plt.plot([c, 3], [c, c], 'b')      # demi-droite horizontale

t = np.linspace(0, 1, 100)

plt.fill_between(t, t, 3, hatch='///', alpha=0.3)  # 0 <= x <= 1, y >= x

plt.plot([0, 0], [-1, 0], 'r')      # demi-droite x = 0, y < 0

plt.axis([-1, 3, -1, 3])

plt.show()
```

Conclusion

la ligne de niveau c est l'équerre $\{x = c, y \geq c\} \cup \{y = c, x \geq c\}$, et l'ensemble à hachurer est $\{(0, y) ; y < 0\} \cup \{(x, y) ; 0 \leq x \leq 1, y \geq x\}$.

- c) Notons ϕ la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$: $\phi(t) = 0$ si $t < 0$, $\phi(t) = t$ si $0 \leq t \leq 1$, $\phi(t) = 1$ si $t > 1$. On a $\phi(t) \in [0, 1]$ et ϕ est croissante.

Lemme. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F_{(U,V)}(x, y) = C(\phi(x), \phi(y))$.

En effet, si $x < 0$, $0 \leq F_{(U,V)}(x, y) \leq P([U \leq x]) = 0$ et $C(0, \phi(y)) \leq \min\{0, \phi(y)\} = 0$ d'après 5) c) : les deux valent 0. Si $x > 1$, l'événement $[U \leq x]$ est de probabilité 1, ainsi que $[U \leq 1]$; pour tout événement E , $P(E) = P(E \cap D) + P(E \cap \overline{D})$ avec $P(\overline{D}) = 0$ lorsque $P(D) = 1$, donc $P(E \cap D) = P(E)$. D'où $F_{(U,V)}(x, y) = P([V \leq y]) = F_{(U,V)}(1, y)$. Enfin, si $0 \leq x \leq 1$, $\phi(x) = x$. On traite y de la même façon, ce qui donne le lemme.

Si $U = V$ presque sûrement : pour $(u, v) \in [0, 1]^2$, les événements $[U \leq u] \cap [V \leq v]$ et $[U \leq u] \cap [U \leq v]$ coïncident en dehors de l'événement négligeable $[U \neq V]$, donc ont même probabilité. Avec a) : $C(u, v) = P([U \leq \min\{u, v\}]) = \min\{u, v\} = C_+(u, v)$.

Réciproquement, si $C = C_+$: d'après le lemme, puis la croissance de ϕ , pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$F_{(U,V)}(x, y) = \min\{\phi(x), \phi(y)\} = \phi(\min\{x, y\}) = F_U(\min\{x, y\}) = F_{(U,U)}(x, y)$$

Les vecteurs (U, V) et (U, U) ont donc même loi. La fonction $g : (x, y) \mapsto |x - y|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc $|U - V|$ a même loi que $|U - U| = 0$. Ainsi $P(|U - V| = 0) = 1$.

Conclusion

$C = C_+$ si et seulement si $U = V$ presque sûrement.

d) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : [U \leq x] \cap [1 - U \leq y] = [1 - y \leq U \leq x]$. Si $1 - y > x$, cet événement est vide. Sinon, comme U est à densité :

$$P([1 - y \leq U \leq x]) = P([U \leq x]) - P([U < 1 - y]) = \phi(x) - \phi(1 - y) = \phi(x) + \phi(y) - 1$$

car $\phi(1 - y) = 1 - \phi(y)$ (vérification immédiate sur les trois cas $y < 0, 0 \leq y \leq 1, y > 1$). Si $1 - y > x$, alors $\phi(1 - y) \geq \phi(x)$ par croissance, donc $\phi(x) + \phi(y) - 1 \leq 0$. Dans tous les cas :

$$F_{(U, 1-U)}(x, y) = \max\{\phi(x) + \phi(y) - 1, 0\} = C_-(\phi(x), \phi(y))$$

Explicitement : $F_{(U, 1-U)}(x, y) = 0$ si $x < 0$ ou $y < 0$; $\max\{x + y - 1, 0\}$ si $(x, y) \in [0, 1]^2$; x si $0 \leq x \leq 1 < y$; y si $0 \leq y \leq 1 < x$; 1 si $x > 1$ et $y > 1$.

Condition : $C = C_-$ si et seulement si $V = 1 - U$ presque sûrement. En effet, si $V = 1 - U$ presque sûrement, $[U \leq u] \cap [V \leq v]$ et $[U \leq u] \cap [1 - U \leq v]$ ne diffèrent que sur un événement négligeable, donc $C(u, v) = F_{(U, 1-U)}(u, v) = C_-(u, v)$ pour $(u, v) \in [0, 1]^2$. Réciproquement, si $C = C_-$, le lemme de c) donne $F_{(U,V)}(x, y) = C_-(\phi(x), \phi(y)) = F_{(U, 1-U)}(x, y)$ pour tout $(x, y) : (U, V)$ et $(U, 1 - U)$ ont même loi. Avec la fonction continue $g : (x, y) \mapsto |x + y - 1|$, $|U + V - 1|$ a même loi que $|U + (1 - U) - 1| = 0$, donc $V = 1 - U$ presque sûrement.

Conclusion

$F_{(U, 1-U)}(x, y) = \max\{\phi(x) + \phi(y) - 1, 0\}$, et $C = C_-$ si et seulement si $V = 1 - U$ presque sûrement.

Partie III : Copules

- 7) a) Soit $u \in [0, 1]$. $C(u, 0) = P([U \leq u] \cap [V \leq 0]) \leq P([V \leq 0]) = 0$, donc $C(u, 0) = 0$; de même $C(0, u) = 0$.

L'événement $[V \leq 1]$ est de probabilité 1, donc (comme dans le lemme de 6) c))

$C(u, 1) = P([U \leq u]) = u$; de même $C(1, u) = u$.

Soit $(u, u', v, v') \in [0, 1]^4$ avec $u \leq u'$ et $v \leq v'$. La question 4) e) (ii), appliquée à $F = F_{(U, V)}$, donne :

$$C(u', v') - C(u', v) - C(u, v') + C(u, v) = P([u < U \leq u'] \cap [v < V \leq v']) \geq 0$$

Conclusion

C est une copule.

- b) D'après 6) a), la fonction C associée au couple (U, U) (les deux composantes suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$) est $(u, v) \mapsto \min\{u, v\} = C_+(u, v)$: par a), C_+ est une copule.

La variable $1 - U$ suit aussi la loi uniforme sur $[0, 1]$ (pour $t \in [0, 1]$,

$P([1 - U \leq t]) = P([U \geq 1 - t]) = t$). D'après 6) d), la fonction C associée au couple $(U, 1 - U)$ est C_- : par a), C_- est une copule.

Pour Π , on vérifie directement les trois propriétés : $\Pi(u, 0) = \Pi(0, u) = 0$,

$\Pi(u, 1) = \Pi(1, u) = u$, et pour $u \leq u', v \leq v'$:

$$\Pi(u', v') - \Pi(u', v) - \Pi(u, v') + \Pi(u, v) = u'v' - u'v - uv' + uv = (u' - u)(v' - v) \geq 0$$

(C'est aussi la fonction C associée à un couple de variables uniformes indépendantes, lorsqu'un tel couple existe.)

Conclusion

C_+ , C_- et Π sont des copules.

8) a) Fixons h . Comme Φ est de classe C^2 sur $]0, 1[^2$, la fonction

$\psi : t \mapsto \Phi(a + h, t) - \Phi(a, t)$ est dérivable sur $]0, 1[$, de dérivée

$\psi'(t) = \partial_2(\Phi)(a + h, t) - \partial_2(\Phi)(a, t)$. Pour $k \neq 0$ avec $b + k \in]0, 1[$:

$$G(h, k) = \frac{1}{h} \cdot \frac{\psi(b + k) - \psi(b)}{k} \rightarrow \frac{\psi'(b)}{h} \quad \text{lorsque } k \rightarrow 0$$

Conclusion

$$H(h) = \frac{\partial_2(\Phi)(a + h, b) - \partial_2(\Phi)(a, b)}{h}.$$

b) La fonction $s \mapsto \partial_2(\Phi)(s, b)$ est dérivable en a , de dérivée $\partial_1(\partial_2(\Phi))(a, b)$, qui est une dérivée partielle seconde croisée de Φ en (a, b) ; d'après le rappel, c'est $\partial_{1,2}^2(\Phi)(a, b)$.

Le taux d'accroissement $H(h)$ tend donc vers $\partial_{1,2}^2(\Phi)(a, b)$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Signe : pour $h > 0$ et $k > 0$ (avec $a + h < 1, b + k < 1$), la troisième propriété des copules appliquée à $u = a, u' = a + h, v = b, v' = b + k$ montre que le numérateur de $G(h, k)$ est positif ou nul, et $hk > 0$, donc $G(h, k) \geq 0$. En faisant tendre k vers 0 par valeurs positives, $H(h) \geq 0$ pour tout $h > 0$ convenable, puis en faisant tendre h vers 0 par valeurs positives, la limite est positive ou nulle.

Conclusion

$$\lim_{h \rightarrow 0} H(h) = \partial_{1,2}^2(\Phi)(a, b) \text{ et } \partial_{1,2}^2(\Phi)(a, b) \geq 0.$$

9) a) Soit $(u, u', v, v') \in]0, 1[^4$ et $y \in]0, 1[$. La fonction $x \mapsto \partial_2(\varphi)(x, y)$ est de classe C^1 sur $]0, 1[$, de dérivée $x \mapsto \partial_1(\partial_2(\varphi))(x, y) = \partial_{1,2}^2(\varphi)(x, y)$ (égalité des dérivées croisées,

φ étant de classe C^2). Donc :

$$\int_u^{u'} \partial_{1,2}^2(\varphi)(x, y) dx = \partial_2(\varphi)(u', y) - \partial_2(\varphi)(u, y)$$

Le membre de droite est, comme fonction de y , continu sur $]0, 1[$ et c'est la dérivée de $y \mapsto \varphi(u', y) - \varphi(u, y)$. Donc :

$$\begin{aligned} \int_v^{v'} \left(\int_u^{u'} \partial_{1,2}^2(\varphi)(x, y) dx \right) dy &= [\varphi(u', y) - \varphi(u, y)]_v^{v'} = \varphi(u', v') - \varphi(u, v') - \varphi(u', v) \\ &+ \varphi(u, v) \end{aligned}$$

Conclusion

$$\Psi(u, u', v, v') = \int_v^{v'} \left(\int_u^{u'} \partial_{1,2}^2(\varphi)(x, y) dx \right) dy.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $1 - \frac{1}{n} \geq 0$ et $u \geq 0$, donc $u_n \geq \frac{1}{3n} > 0$. Ensuite :

$$u'_n - u_n = \frac{1}{3n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(u' - u) \geq \frac{1}{3n} > 0$$

Enfin $u' \leq 1$ donne $u'_n \leq \frac{2}{3n} + 1 - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{3n} < 1$.

Conclusion

$$0 < u_n < u'_n < 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

c) Soit $(u, u', v, v') \in T$. On définit u_n, u'_n comme en b), et v_n, v'_n de la même façon à partir de v et v' . D'après b), $(u_n, u'_n, v_n, v'_n) \in T_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\Psi(u_n, u'_n, v_n, v'_n) \geq 0$.

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $u_n \rightarrow u$, $u'_n \rightarrow u'$, $v_n \rightarrow v$, $v'_n \rightarrow v'$. Comme φ est continue sur $[0, 1]^2$, chacun des quatre termes de $\Psi(u_n, u'_n, v_n, v'_n)$ converge, par exemple $\varphi(u'_n, v'_n) \rightarrow \varphi(u', v')$, d'où $\Psi(u_n, u'_n, v_n, v'_n) \rightarrow \Psi(u, u', v, v')$. Par passage à la limite dans l'inégalité large, $\Psi(u, u', v, v') \geq 0$.

Conclusion

Ψ est positive ou nulle sur T .

d) Supposons que φ vérifie les trois propriétés. Soit $(u, u', v, v') \in T_0$. Pour tout $y \in]0, 1[$, la fonction $x \mapsto \partial_{1,2}^2(\varphi)(x, y)$ est continue et positive, et $u < u'$, donc l'intégrale intérieure de 9) a) est positive ou nulle ; c'est une fonction continue de y (d'après le calcul de a)), et $v < v'$, donc l'intégrale extérieure est positive ou nulle. Ainsi $\Psi \geq 0$ sur T_0 , puis sur T d'après c). Or $\Psi \geq 0$ sur T est exactement la troisième propriété des copules, et les deux premières sont supposées.

Conclusion

ces trois propriétés suffisent pour que φ soit une copule.

Partie IV : Familles de copules et simulation

10) a) Méthode 1 — Par un argument affine.

Pour $(u, v) \in [0, 1]^2$, $S(u, v) = (1 - u)v + u(1 - v)$. Comme $1 - u \geq 0$, $u \geq 0$ et $(1 - u) + u = 1$, $S(u, v)$ est une moyenne pondérée de v et $1 - v$, deux réels de $[0, 1]$: donc $0 \leq S(u, v) \leq 1$. De plus $S(0, 0) = 0$ et $S(1, 0) = 1$.

Méthode 2 — Par les points critiques et la hessienne.

S est polynomiale, donc continue sur le fermé borné $[0, 1]^2$: elle y admet un minimum et un maximum globaux. Sur l'ouvert $]0, 1[^2$, $\nabla S(u, v) = (1 - 2v, 1 - 2u)$ s'annule

seulement en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. La hessienne y vaut $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, de valeurs propres 2 et -2

(vecteurs propres $(1, -1)$ et $(1, 1)$) : c'est un point selle, qui n'est pas un extremum local. Un extremum global atteint dans l'ouvert serait un point critique, donc les extrema sont atteints sur le bord. Sur le bord : $S(0, v) = v$, $S(1, v) = 1 - v$, $S(u, 0) = u$, $S(u, 1) = 1 - u$, qui décrivent $[0, 1]$. Le minimum vaut 0 et le maximum 1.

La méthode 1 est plus courte et élémentaire ; la méthode 2 est systématique et s'applique à des fonctions qui ne sont pas affines en chaque variable.

Conclusion

$$c = \min_{[0,1]^2} S = 0 \text{ et } d = \max_{[0,1]^2} S = 1.$$

b) $M(u, v) = u^2v + uv^2 - u^2v^2$ est polynomiale, donc continue sur $[0, 1]^2$ et de classe C^2 sur $]0, 1[^2$. Pour $u \in [0, 1]$: $M(u, 0) = M(0, u) = 0$, $M(u, 1) = u(u + 1 - u) = u$ et $M(1, u) = u(1 + u - u) = u$. Enfin :

$$\partial_2(M)(u, v) = u^2 + 2uv - 2u^2v \quad \text{et} \quad \partial_{1,2}^2(M)(u, v) = 2u + 2v - 4uv = 2S(u, v) \geq 0$$

d'après a). Par 9) d), M est une copule, et sa restriction à $]0, 1[^2$ est de classe C^2 .

Conclusion

M est une copule à densité.

c) M_θ est polynomiale, donc continue sur $[0, 1]^2$ et de classe C^2 sur $]0, 1[^2$. Pour $u \in [0, 1]$: $M_\theta(u, 0) = M_\theta(0, u) = 0$ et $M_\theta(u, 1) = M_\theta(1, u) = (1 - \theta)u + \theta u = u$. De plus, avec b) :

$$\partial_{1,2}^2(M_\theta)(u, v) = (1 - \theta) + 2\theta S(u, v) = 1 + \theta(2S(u, v) - 1)$$

Si $\theta \in [-1, 1]$: d'après a), $2S(u, v) - 1 \in [-1, 1]$, donc $|\theta(2S(u, v) - 1)| \leq 1$ et $\partial_{1,2}^2(M_\theta) \geq 0$. Par 9) d), M_θ est une copule.

Réciproquement, si M_θ est une copule, c'est une copule à densité, et 8) b) donne $1 + \theta(2S - 1) \geq 0$ sur $]0, 1[^2$. Pour $t \in]0, 1[$:

$$S(t, t) = 2t - 2t^2 \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad S(t, 1 - t) = 1 - 2t(1 - t) \rightarrow 1 \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0$$

Si $\theta > 1$: $1 + \theta(2S(t, t) - 1) \rightarrow 1 - \theta < 0$, donc cette quantité est strictement négative pour t assez petit, contradiction. Si $\theta < -1$: $1 + \theta(2S(t, 1 - t) - 1) \rightarrow 1 + \theta < 0$, même contradiction.

Conclusion

M_θ est une copule si et seulement si $\theta \in [-1, 1]$.

11) a) Notons C_0 et C_1 les copules associées à (U_0, V_0) et (U_1, V_1) , et prenons $N(\Omega) = \{0, 1\}$, de sorte que $[N = 0] = [N \leq 0]$ et $[N = 1] = [N \leq 1] \setminus [N \leq 0]$.

Étape 1. Pour tout $(u_0, v_0, u_1, v_1) \in \mathbb{R}^4$:

$$P([U_0 \leq u_0] \cap [V_0 \leq v_0] \cap [N = 0]) = (1 - p)F_{(U_0, V_0)}(u_0, v_0)$$

et

$$P([U_1 \leq u_1] \cap [V_1 \leq v_1] \cap [N = 1]) = pF_{(U_1, V_1)}(u_1, v_1)$$

Pour la première égalité, on applique l'hypothèse avec $u_1 = v_1 = n \in \mathbb{N}^*$ et $x = 0$. Les événements $[U_0 \leq u_0] \cap [V_0 \leq v_0] \cap [U_1 \leq n] \cap [V_1 \leq n] \cap [N \leq 0]$ croissent avec n , de réunion $[U_0 \leq u_0] \cap [V_0 \leq v_0] \cap [N \leq 0]$ (même argument qu'en 4) b)). Par ailleurs $F_{(U_1, V_1)}(n, n) = 1$ pour $n \geq 1$, car $[U_1 \leq n]$ et $[V_1 \leq n]$ sont de probabilité 1. Le théorème

de la limite monotone donne la première égalité, puisque $P([N \leq 0]) = 1 - p$. De même (avec $u_0 = v_0 = n$),

$$P([U_1 \leq u_1] \cap [V_1 \leq v_1] \cap [N \leq x]) = F_{(U_1, V_1)}(u_1, v_1)P([N \leq x]);$$

la différence entre $x = 1$ et $x = 0$ donne la seconde égalité.

Étape 2. Pour tout u réel,

$$[U_N \leq u] = ([U_0 \leq u] \cap [N = 0]) \cup ([U_1 \leq u] \cap [N = 1]).$$

C'est un événement (réunion d'intersections d'événements), donc U_N est une variable aléatoire. La réunion est disjointe, et on applique l'étape 1 avec $v_0 = v_1 = 1$ (pour lequel $F_{(U_i, V_i)}(u, 1) = P([U_i \leq u]) = \phi(u)$, comme en 7) a)) :

$$P([U_N \leq u]) = (1 - p)\phi(u) + p\phi(u) = \phi(u)$$

où ϕ est la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$. On traite V_N de même, avec $u_0 = u_1 = 1$.

Conclusion

U_N et V_N sont des variables aléatoires de loi uniforme sur $[0, 1]$.

b) Pour $(u, v) \in [0, 1]^2$, $[U_N \leq u] \cap [V_N \leq v]$ est la réunion disjointe de $[U_0 \leq u] \cap [V_0 \leq v] \cap [N = 0]$ et $[U_1 \leq u] \cap [V_1 \leq v] \cap [N = 1]$. L'étape 1 de a) donne :

$$P([U_N \leq u] \cap [V_N \leq v]) = (1 - p)C_0(u, v) + pC_1(u, v)$$

Conclusion

la copule associée à (U_N, V_N) est $(1 - p)C_0 + pC_1$.

12) a) Méthode 1 — Vérification directe.

$C_p(u, 0) = C_p(0, u) = 0$ et $C_p(u, 1) = C_p(1, u) = pu + (1 - p)u = u$. Pour $u \leq u'$ et $v \leq v'$, l'expression $\Delta_\Phi = \Phi(u', v') - \Phi(u', v) - \Phi(u, v') + \Phi(u, v)$ est linéaire en Φ , donc $\Delta_{C_p} = p \Delta_\Pi + (1 - p) \Delta_{C_+} \geq 0$, car Π et C_+ sont des copules (7) b)) et $p, 1 - p$ sont positifs.

Méthode 2 — Par la question 11).

On utilise l'existence (admise) de variables U_0, V_0, U_1, V_1, N comme en 11), avec cette fois N de loi de Bernoulli de paramètre $1 - p$, (U_0, V_0) de copule Π (par exemple deux uniformes indépendantes) et (U_1, V_1) de copule C_+ (par exemple $V_1 = U_1$, d'après 6) c)). D'après 11) b), avec $P([N = 0]) = p$ et $P([N = 1]) = 1 - p$, la copule associée à (U_N, V_N) est $p \Pi + (1 - p)C_+ = C_p$, qui est donc une copule par 7) a).

La méthode 1 est autonome ; la méthode 2 utilise l'existence admise de variables indépendantes, mais elle fournit directement le procédé de simulation de b).

Remarque : C_p n'est pas une copule à densité (min n'est pas de classe C^2 au voisinage de la diagonale), donc 9) d) ne s'applique pas ici.

Conclusion

C_p est une copule.

b) Code adapté en Python. La fonction Scilab de l'énoncé d'origine est remplacée par une fonction Python `simulc(p)`.

D'après la méthode 2 de a) : on simule N (qui vaut 0 avec probabilité p) ; si $N = 0$, on renvoie deux simulations indépendantes de la loi uniforme (copule Π) ; sinon, on simule

une seule uniforme u et on renvoie (u, u) (copule C_+). Le test `rd.random() < p` est vrai avec probabilité p .

Python

```
import numpy.random as rd

def simulc(p):
    if rd.random() < p:
        u = rd.random()
        v = rd.random()
    else:
        u = rd.random()
        v = u
    return u, v
```

(Un essai sur 10^5 appels avec $p = 0,5$ donne une fréquence de l'événement $u \leq 0,4$ et $v \leq 0,6$ égale à 0,320, pour une valeur théorique $C_p(0,4; 0,6) = 0,5 \times 0,24 + 0,5 \times 0,4 = 0,32$.)

Conclusion

avec probabilité p on tire u et v indépendamment selon la loi uniforme, et avec probabilité $1 - p$ on tire u uniforme et on pose $v = u$; la fonction `simulc` ci-dessus réalise ce procédé.

13) Notons $U' = F_X(X)$ et $V' = F_Y(Y)$.

Étape 1 : U' suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit $u \in]0, 1[$. D'après 3) c) appliqué avec $p = u$ et $x = X(\omega) : [F_X(X) < u] = [X < G_X(u)]$. Comme X est à densité et par 3) b) :

$$P([U' < u]) = P([X < G_X(u)]) = F_X(G_X(u)) = u$$

Pour $u \in [0, 1[$, $[U' \leq u] = \bigcap_n \left[U' < u + \frac{1}{n} \right]$ (intersection décroissante, n assez grand

pour que $u + \frac{1}{n} < 1$), donc $P([U' \leq u]) = \lim \left(u + \frac{1}{n}\right) = u$ par limite monotone. Comme U' est à valeurs dans $[0, 1]$, $P([U' \leq u]) = 0$ pour $u < 0$ et 1 pour $u \geq 1$. De même pour V' .

Étape 2 : C est la copule associée à (U', V') . Soit $u \in]0, 1[$. On a $[X \leq G_X(u)] \subset [F_X(X) \leq F_X(G_X(u))] = [U' \leq u]$ par croissance de F_X , et ces deux événements ont la même probabilité u (par 3) b) et l'étape 1). Leur différence est donc négligeable. De même pour $[Y \leq G_Y(v)]$ et $[V' \leq v]$. Ainsi, pour $(u, v) \in]0, 1[^2$:

$$\begin{aligned} P([U' \leq u] \cap [V' \leq v]) &= P([X \leq G_X(u)] \cap [Y \leq G_Y(v)]) = F_{(X,Y)}(G_X(u), G_Y(v)) \\ &= C(u, v) \end{aligned}$$

Sur le bord de $[0, 1]^2$, la copule associée à (U', V') vaut 0 si $uv = 0$, u si $v = 1$ et v si $u = 1$ (7) a)), comme C . La fonction C coïncide donc sur $[0, 1]^2$ avec la copule associée au couple (U', V') , dont les composantes suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$. Par 7) a), C est une copule.

Étape 3 : simulation. Soit (U, V) un couple de variables uniformes sur $[0, 1]$ de copule C . Les événements $[U \in \{0, 1\}]$ et $[V \in \{0, 1\}]$ sont négligeables ; quitte à les écarter, on suppose U et V à valeurs dans $]0, 1[$. Comme en 3) d), pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $[G_X(U) \leq x] = [U \leq F_X(x)]$ et $[G_Y(V) \leq y] = [V \leq F_Y(y)]$, donc :

$$P([G_X(U) \leq x] \cap [G_Y(V) \leq y]) = C(F_X(x), F_Y(y)) = P([U' \leq F_X(x)] \cap [V' \leq F_Y(y)])$$

d'après l'étape 2. Or $[X \leq x] \subset [U' \leq F_X(x)]$, et ces événements ont la même probabilité $F_X(x)$ (étape 1) : leur différence est négligeable. De même pour Y . Donc :

$$P([G_X(U) \leq x] \cap [G_Y(V) \leq y]) = P([X \leq x] \cap [Y \leq y]) = F_{(X,Y)}(x, y)$$

Le couple $(G_X(U), G_Y(V))$ a la même fonction de répartition conjointe que (X, Y) , donc la même loi.

Conclusion

C est une copule (celle du couple $(F_X(X), F_Y(Y))$), et si (u, v) est une simulation d'un couple de copule C , alors $(G_X(u), G_Y(v))$ est une simulation de (X, Y) . Par exemple, avec la loi de densité f de 1) c), $G_X(u) = \tan^2\left(\frac{\pi u}{2}\right)$ d'après 3) e).

Relevé des adaptations

- 2) a) : Code adapté en Python. La fonction Scilab simulX devient une fonction Python; les instructions `rd.random(N)` et `np.zeros(N)` sont rappelées dans l'énoncé, et la tangente est calculée par `np.sin` et `np.cos`. Justification : seul Python est autorisé, et `np.tan` ne figure pas dans la liste des commandes du référentiel.
- 2) b) : Code adapté en Python. La boucle Scilab de comptage devient une boucle Python. Justification : seul Python est autorisé.
- 12) b) : Code adapté en Python. La fonction Scilab demandée devient une fonction Python `simulc(p)` renvoyant le couple (u, v) ; l'instruction `rd.random()` est rappelée dans l'énoncé. Justification : seul Python est autorisé.