



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques

2016

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

On reprend les notations du sujet. Tous les espaces vectoriels et toutes les matrices sont réels. Les coordonnées dans $\mathcal{B}$ utilisent une base orthonormale.

Partie I — Partitions de l'identité

1. (a)

La matrice A est triangulaire. Ses valeurs propres sont donc les coefficients de sa diagonale : 0 et -1 .

Pour $X = {}^t(x, y, z)$, on a $AX = {}^t(y, 0, -z)$. Ainsi $AX = 0$ équivaut à $y = z = 0$, donc

$$E_0(A) = \text{Vect}((1, 0, 0)), \quad \dim E_0(A) = 1.$$

Le système $AX = -X$ s'écrit $y = -x$, $0 = -y$ et $-z = -z$. Il impose $x = y = 0$, et laisse z libre. Ainsi

$$E_{-1}(A) = \text{Vect}((0, 0, 1)), \quad \dim E_{-1}(A) = 1.$$

La somme des dimensions des espaces propres vaut $2 < 3$. Elle ne peut fournir une base de $\mathbb{R}^3$, donc A n'est pas diagonalisable.

1. (b)

La multiplication matricielle donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $A^3 + A^2 = 0$, c'est-à-dire $Q(A) = 0$ pour $Q(X) = X^3 + X^2$. Ce polynôme non nul est donc annulateur de A .

1. (c)

Méthode 1 — Identification des coefficients.

Supposons $P(X) = aX^2 + bX + c$ et $P(A) = 0$. Les matrices précédentes donnent

$$P(A) = \begin{pmatrix} c & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a - b + c \end{pmatrix}.$$

L'annulation de ses coefficients impose $c = 0$, $b = 0$, puis $a = 0$. Le seul polynôme de degré au plus 2 annulateur est donc le polynôme nul. Il n'existe aucun polynôme de degré 2 annulateur de A .

Méthode 2 — Utilisation des valeurs propres.

Toute valeur propre est racine d'un polynôme annulateur : si $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors $P(A)X = P(\lambda)X$. Ainsi un polynôme annulateur de degré 2 doit s'annuler en 0 et en -1 .

Il serait donc de la forme $P(X) = aX(X + 1)$ avec $a \neq 0$. Or

$$A^2 + A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Par conséquent $P(A) = a(A^2 + A) \neq 0$, contradiction. Cette méthode exploite les racines imposées par le spectre ; l'identification directe fonctionne sans connaître le spectre.

1. (d)

On peut choisir

$$Q_1(X) = X^2, \quad Q_2(X) = 1 - X^2.$$

Méthode 1 — Lecture des matrices.

Les matrices des deux endomorphismes sont

$$Q_1(A) = \text{Diag}(0, 0, 1), \quad Q_2(A) = \text{Diag}(1, 1, 0).$$

Leurs carrés sont égaux à elles-mêmes ; elles représentent donc des projecteurs. Leur somme est I_3 , donc les endomorphismes constituent une partition de l'identité.

Le premier projette sur $\text{Vect}(e_3)$ parallèlement à $\text{Vect}(e_1, e_2)$; le second réalise la projection complémentaire.

Méthode 2 — Utilisation du polynôme annulateur.

L'égalité $A^3 = -A^2$ de 1. (b) donne $A^4 = -A^3 = A^2$. Par conséquent $(A^2)^2 = A^2$ et

$$(I_3 - A^2)^2 = I_3 - 2A^2 + A^4 = I_3 - A^2.$$

Les deux matrices sont donc idempotentes. Leur somme vaut I_3 , ce qui prouve à nouveau la conclusion. Cette seconde méthode construit les projecteurs à partir d'une relation polynomiale, sans utiliser leur forme diagonale.

2. (a)

La diagonalisation de f signifie qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres. En regroupant les vecteurs de cette base selon leur valeur propre, on obtient

$$E = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}(f).$$

Posons

$$P(X) = \prod_{j=1}^k (X - \lambda_j).$$

Pour un vecteur $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$, l'action d'un polynôme sur un vecteur propre donne $P(f)x_i = P(\lambda_i)x_i = 0_E$.

Tout $x \in E$ s'écrit

$$x = \sum_i x_i$$

avec $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$. Par linéarité,

$$P(f)x = \sum_i P(f)x_i = 0_E.$$

Ainsi $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et P est annulateur de f .

2. (b)

Les nombres λ_i étant distincts, tous les dénominateurs de L_i sont non nuls. On a

$$L_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Méthode 1 — Décomposition en vecteurs propres.

Pour

$$x = \sum_j x_j$$

avec $x_j \in E_{\lambda_j}(f)$, l'action polynomiale donne

$$v_i(x) = \sum_j L_i(\lambda_j)x_j = x_i.$$

Ainsi $v_i(x) \in E_{\lambda_i}(f)$ pour tout x , ce qui prouve $\text{Im}(v_i) \subset E_{\lambda_i}(f)$.

Méthode 2 — Annulation d'un produit polynomial.

Posons

$$d_i = \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j),$$

qui est non nul. L'identité polynomiale $(X - \lambda_i)L_i(X) = P(X)/d_i$ et 2. (a) donnent

$$(f - \lambda_i \text{id}_E) \circ v_i = \frac{1}{d_i} P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Pour tout x , le vecteur $v_i(x)$ appartient donc au noyau de $f - \lambda_i \text{id}_E$, soit $E_{\lambda_i}(f)$. La première méthode décrit la composante obtenue; la seconde transforme une identité polynomiale en une inclusion de noyaux.

2. (c)

Pour chaque j , exactement un des nombres $L_i(\lambda_j)$ vaut 1 et les autres valent 0. Ainsi

$$\sum_{i=1}^k L_i(\lambda_j) = 1.$$

Méthode 1 — Action sur les espaces propres.

Pour

$$x = \sum_j x_j$$

comme en 2. (b), on a $v_i(x) = x_i$. Donc

$$\sum_i v_i(x) = \sum_i x_i = x.$$

Cela prouve

$$\sum_{i=1}^k v_i = \text{id}_E.$$

Méthode 2 — Identité d'interpolation polynomiale.

Le polynôme

$$H(X) = \sum_i L_i(X) - 1$$

a degré au plus $k - 1$ et s'annule aux k réels distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Un polynôme non nul de degré au plus $k - 1$ ne peut avoir k racines distinctes. Donc $H = 0$.

En évaluant cette identité en f , on obtient

$$\sum_i L_i(f) = \text{id}_E.$$

Les endomorphismes v_i forment donc une partition de l'identité. Cette seconde preuve établit une identité valable pour tous les réels avant de l'appliquer à f .

2. (d)

L'inclusion $\text{Im}(v_i) \subset E_{\lambda_i}(f)$ a été prouvée en 2. (b). Réciproquement, pour $x \in E_{\lambda_i}(f)$, on a $v_i(x) = L_i(\lambda_i)x = x$. Donc x appartient à l'image de v_i .

Ainsi $\text{Im}(v_i) = E_{\lambda_i}(f)$. La décomposition de 2. (a) montre aussi que v_i annule tous les espaces propres associés aux autres valeurs.

On en déduit

$$\text{Ker}(v_i) = \bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}(f).$$

L'endomorphisme v_i est le projecteur sur $E_{\lambda_i}(f)$ parallèlement à cette somme. Il vérifie $v_i^2 = v_i$. Il n'est pas nécessairement orthogonal, car aucune symétrie de f n'est supposée ici.

3. (a)

Pour tout $x \in E$, la partition de l'identité donne

$$x = \sum_i u_i(x).$$

Chaque terme appartient à $\text{Im}(u_i)$, donc

$$E \subset \sum_i \text{Im}(u_i).$$

L'inclusion réciproque est acquise puisque ces images sont des sous-espaces de E .

Ainsi

$$E = \sum_i \text{Im}(u_i).$$

En réunissant une base de chacune des images, on obtient une famille génératrice de E de cardinal

$$\sum_i r_i.$$

Toute famille génératrice a un cardinal au moins égal à la dimension, d'où

$$n \leq \sum_{i=1}^k r_i.$$

3. (b)

Si les images sont en somme directe, la dimension de leur somme est la somme de leurs dimensions. La question précédente donne alors

$$n = \sum_i r_i.$$

Réciproquement, supposons

$$n = \sum_i r_i.$$

Réunissons une base de chaque image. Cette famille engendre E par 3. (a) et contient exactement n vecteurs ; c'est donc une base de E .

Si

$$\sum_i y_i = 0_E$$

avec $y_i \in \text{Im}(u_i)$, l'écriture de chacun des y_i dans sa base fournit une combinaison nulle de cette base réunie. Tous les coefficients sont nuls, donc chaque $y_i = 0_E$.

C'est la caractérisation de la somme directe. On a donc l'équivalence demandée.

3. (c)

On établit le cycle $(2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$, ce qui suffit à prouver l'équivalence des trois propriétés.

3. (c) i.

Question adaptée au programme actuel : le lien entre trace et rang d'un projecteur est établi avant son utilisation.

Soit p un projecteur de rang r . Puisque $p^2 = p$, tout vecteur x s'écrit $x = p(x) + (x - p(x))$, avec $p(x) \in \text{Im}(p)$ et $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$. L'intersection de ces deux sous-espaces est nulle : si $y = p(z)$ et $p(y) = 0_E$, alors $y = p^2(z) = p(y) = 0_E$.

Ainsi $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$. Dans une base adaptée, la matrice de p est $\text{Diag}(I_r, 0_{n-r})$ et sa trace vaut r . La trace étant invariante par changement de base, toute matrice de p a trace r .

Sous la propriété (2), on obtient $\text{Tr}(u_i) = r_i$. Ici la trace d'un endomorphisme désigne celle de sa matrice, indépendante de la base. Par linéarité de la trace,

$$\sum_i r_i = \text{Tr} \left(\sum_i u_i \right) = \text{Tr}(\text{id}_E) = n.$$

Cela prouve (2) $\Rightarrow$ (1).

3. (c) ii.

Sous (1), la question 3. (b) donne $E = \bigoplus_i \text{Im}(u_i)$. Fixons $x \in E$ et un indice j . Le vecteur $u_j(x)$ possède la décomposition

$$u_j(x) = \sum_{i=1}^k u_i(u_j(x))$$

par la partition de l'identité. Dans cette somme, le terme d'indice i appartient à $\text{Im}(u_i)$.

Mais le même vecteur appartient à $\text{Im}(u_j)$; il possède donc aussi la décomposition dont la composante d'indice j est $u_j(x)$ et dont toutes les autres composantes sont nulles.

L'unicité de la décomposition en somme directe donne

$$u_i(u_j(x)) = 0_E \quad (i \neq j), \quad u_j(u_j(x)) = u_j(x).$$

Comme x est quelconque, $u_i \circ u_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ pour $i \neq j$. Cela établit (1) $\Rightarrow$ (3).

3. (c) iii.

Sous (3), pour chaque i ,

$$u_i = u_i \circ \text{id}_E = u_i \circ \left(\sum_j u_j \right) = u_i^2 + \sum_{j \neq i} u_i \circ u_j = u_i^2.$$

Chaque u_i est donc un projecteur : (3) $\Rightarrow$ (2). Le cycle des trois implications prouve l'équivalence.

Partie II — Représentation matricielle d'un projecteur orthogonal

4. (a)

Méthode 1 — Image, noyau et symétrie.

Si p est un projecteur orthogonal sur F , alors $p^2 = p$. Dans la décomposition $E = F \oplus F^\perp$, pour $x = x_F + x_\perp$ et $y = y_F + y_\perp$, on a

$$\langle p(x), y \rangle_E = \langle x_F, y_F \rangle_E = \langle x, p(y) \rangle_E.$$

L'endomorphisme est donc symétrique. Sa matrice dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ est symétrique : ${}^tP = P$. On a aussi $P^2 = P$.

Réciproquement, si $P^2 = P$, alors p est un projecteur et $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$. Si de plus ${}^tP = P$, la base étant orthonormale, p est symétrique. Pour $x = p(z) \in \text{Im}(p)$ et $y \in \text{Ker}(p)$,

$$\langle x, y \rangle_E = \langle p(z), y \rangle_E = \langle z, p(y) \rangle_E = 0.$$

Ainsi $\text{Ker}(p) \subset \text{Im}(p)^\perp$. Ces sous-espaces ont la même dimension $n - \text{rg}(p)$, donc ils sont égaux. Le projecteur est orthogonal.

Méthode 2 — Théorème spectral.

Si P est symétrique et $P^2 = P$, le théorème spectral fournit une base orthonormale propre. Pour une valeur propre λ , l'idempotence impose $\lambda^2 = \lambda$, donc $\lambda \in \{0, 1\}$.

Dans cette base, p conserve les coordonnées associées à 1 et annule celles associées à 0.

Les deux espaces propres sont orthogonaux, donc il réalise la projection orthogonale sur l'espace propre associé à 1.

Réciproquement, en choisissant une base orthonormale de F , puis de $F^\perp$, la matrice d'un projecteur orthogonal est $\text{Diag}(I_r, 0)$. Elle est symétrique et idempotente ; ces propriétés se conservent dans toute base orthonormale.

La première preuve caractérise géométriquement le noyau. La seconde lit la projection dans une base orthonormale propre.

4. (b)

Supposons $f = \alpha p$ avec p projecteur orthogonal. Si P est sa matrice, alors $M = \alpha P$, $P^2 = P$ et ${}^tP = P$. Donc ${}^tM = M$ et $M^2 = \alpha M$. En prenant la trace, $\text{Tr}(M^2) = \alpha \text{Tr}(M)$, d'où

$$\text{Tr}(M)M^2 = \alpha \text{Tr}(M)M = \text{Tr}(M^2)M.$$

Pour la réciproque, supposons les deux conditions du sujet. Si $M = 0$, on peut prendre $\alpha = 0$ et le projecteur nul.

Supposons $M \neq 0$. Puisque M est symétrique,

$$\text{Tr}(M^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}m_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}^2 > 0.$$

Si $\text{Tr}(M) = 0$, la condition impose $\text{Tr}(M^2)M = 0$, donc $M = 0$, contradiction. Ainsi $\text{Tr}(M) \neq 0$.

Posons

$$\alpha = \frac{\text{Tr}(M^2)}{\text{Tr}(M)} \neq 0, \quad P = \frac{1}{\alpha}M.$$

La condition donne $M^2 = \alpha M$. Par conséquent $P^2 = P$ et ${}^tP = P$. La question 4. (a) montre que P représente un projecteur orthogonal p , et $f = \alpha p$.

Le cas nul a été traité séparément ; les deux divisions du cas non nul sont donc justifiées.

5. (a)

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

La trace est la somme des coefficients diagonaux. On peut la calculer par

Python

```
import numpy as np

def tr(A):
    n = A.shape[0]
    t = 0
    for i in range(n):
        t = t + A[i, i]
    return t
```

Le tableau A est supposé carré. La variable t accumule les coefficients d'indices $(0, 0), \dots, (n - 1, n - 1)$. Après la boucle, elle vaut exactement la trace.

La fonction a été exécutée sur M_1 et M_2 de 5. (c) : les résultats sont respectivement 1 et 2.

5. (b)

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Le code complet pour l'exemple est

Python

```
import numpy as np

def issym(n, A):
    b = True
    for i in range(n - 1):
        for j in range(i + 1, n):
            b = b and (A[i, j] == A[j, i])
    return b
```

```
A = np.array([[1, 2], [2, 3]])
resultat = issym(2, A)
```

La ligne étudiée remplace b par la conjonction de sa valeur précédente et du test d'égalité entre deux coefficients symétriques par rapport à la diagonale.

Les boucles parcourent chaque paire $0 \leq i < j < n$ exactement une fois. Les coefficients diagonaux n'ont pas besoin d'être comparés à eux-mêmes. La variable b reste vraie exactement lorsque toutes les égalités $A[i, j] = A[j, i]$ sont satisfaites.

Pour l'entrée $n = 2$ et le tableau A donné, la sortie est `True`. Pour `np.array([[1, 2], [0, 3]])`, elle est `False`. Ces deux exemples ont été exécutés.

5. (c)

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python. La ligne manquante est

Python

```
b = b and (A[i, j] == B[i, j])
```

Le code complet, avec ses fonctions auxiliaires, est

Python

```
import numpy as np

def tr(A):
    n = A.shape[0]
    t = 0
    for i in range(n):
        t = t + A[i, i]
    return t

def issym(n, A):
    b = True
    for i in range(n - 1):
        for j in range(i + 1, n):
```

```

        b = b and (A[i, j] == A[j, i])

    return b

def orthoproj(n, M):
    M2 = np.dot(M, M)
    A = tr(M) * M2
    B = tr(M2) * M
    b = issym(n, M)
    if b:
        for i in range(n):
            for j in range(n):
                b = b and (A[i, j] == B[i, j])
    return b

M1 = np.array([[1, 1], [1, 0]])
M2 = np.array([[1, 1], [1, 1]])
r1 = orthoproj(2, M1)
r2 = orthoproj(2, M2)

```

La multiplication matricielle est bien `np.dot(M, M)`. Le code teste d'abord la symétrie, puis l'égalité des deux matrices de la condition de 4. (b), coefficient par coefficient. L'utilisation de `and` conserve tout échec détecté auparavant.

Pour M_1 , on a

$$M_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Tr}(M_1) = 1, \quad \text{Tr}(M_1^2) = 3.$$

Les deux matrices à comparer sont donc M_1^2 et $3M_1$. Leurs coefficients d'indice (1, 1) en numérotation mathématique sont 2 et 3 ; elles sont différentes. La sortie est `False`.

Pour M_2 , on a $M_2^2 = 2M_2$, $\text{Tr}(M_2) = 2$ et $\text{Tr}(M_2^2) = 4$. Les deux matrices valent $4M_2$. La sortie est `True`. On peut d'ailleurs écrire $M_2 = 2P$ avec $P = M_2/2$, qui est un projecteur

orthogonal.

Le code a été exécuté et renvoie les deux sorties annoncées. Il teste les égalités exactes prévues dans le sujet ; ses exemples utilisent des matrices à coefficients entiers.

6. (a)

On considère les applications linéaires de matrices S et tSS , toutes deux de domaine $\mathbb{R}^k$. Si $SZ = 0$, alors ${}^tSSZ = 0$. Réciproquement, si ${}^tSSZ = 0$, alors

$$0 = {}^tZ{}^tSSZ = {}^t(SZ)(SZ) = \|SZ\|^2.$$

Une norme n'est nulle que pour le vecteur nul, donc $SZ = 0$. Ainsi

$$\text{Ker}(S) = \text{Ker}({}^tSS).$$

Le théorème du rang, appliqué avec le même domaine de dimension k , donne

$$\text{rg}(S) = k - \dim \text{Ker}(S) = k - \dim \text{Ker}({}^tSS) = \text{rg}({}^tSS).$$

6. (b)

Par définition de F , le vecteur y appartient à F si et seulement s'il existe des réels $z_1, \dots, z_k$ tels que

$$y = \sum_{i=1}^k z_i s_i.$$

En coordonnées dans $\mathcal{B}$, cette égalité est exactement $Y = SZ$ avec $Z = {}^t(z_1, \dots, z_k)$. C'est l'équivalence demandée, sans supposer la famille libre.

6. (c)

Un vecteur y appartient à $F^\perp$ si et seulement s'il est orthogonal à tous les générateurs s_i de F . Puisque $\mathcal{B}$ est orthonormale, les coordonnées de tSY sont précisément $\langle s_i, y \rangle_E$.

Ainsi $y \in F^\perp$ équivaut à ${}^tSY = 0$.

6. (d)

Pour $y = p_F(x)$, on a $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$. Par 6. (b), il existe Z tel que $Y = SZ$. Par 6. (c), l'orthogonalité du résidu donne ${}^tS(X - Y) = 0$.

En remplaçant Y par SZ , on obtient

$$Y = SZ, \quad {}^tSX = {}^tSSZ.$$

L'existence de Z est suffisante ; sa valeur peut ne pas être unique si les colonnes de S sont liées.

6. (e)

Si $\mathcal{F}$ est libre, S a rang k . Par 6. (a), la matrice carrée tSS a aussi rang k , donc elle est inversible.

L'égalité de 6. (d) donne alors

$$Z = ({}^tSS)^{-1}{}^tSX,$$

puis

$$Y = S({}^tSS)^{-1}{}^tSX.$$

La matrice du projecteur orthogonal est donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = S({}^tSS)^{-1}{}^tS.$$

L'inverse n'est utilisé qu'après avoir établi l'indépendance des colonnes et l'égalité des rangs.

7. (a)

Question adaptée au programme actuel : le choix d'une matrice de passage orthogonale est explicité dans l'énoncé.

La matrice M est symétrique réelle. Le théorème spectral fournit une base orthonormale de $\mathbb{R}^k$ formée de vecteurs propres, de valeurs propres réelles $\rho_1, \dots, \rho_k$, répétées selon les dimensions des espaces propres.

Si Q contient ces vecteurs en colonnes, ${}^tQQ = I_k$, donc $Q^{-1} = {}^tQ$ et $Q{}^tQ = I_k$. L'égalité de changement de base est

$${}^tQM = \text{Diag}(\rho_1, \dots, \rho_k).$$

En multipliant par Q et tQ , on obtient la représentation demandée de M .

7. (b)

Posons $D = \text{Diag}(\rho_1, \dots, \rho_k)$ et $H = \text{Diag}(h(\rho_1), \dots, h(\rho_k))$. Pour tout réel t , la définition de h donne

$$t^2h(t) = t, \quad th(t)^2 = h(t).$$

Ces égalités sont vraies pour $t = 0$, car les deux membres valent alors 0, et pour $t \neq 0$ par $h(t) = 1/t$. Ainsi $DHD = D$ et $HDH = H$.

Avec $M = QD{}^tQ$ et $M^{(-)} = QH{}^tQ$, l'orthogonalité de Q donne

$$MM^{(-)}M = Q(DHD){}^tQ = M,$$

$$M^{(-)}MM^{(-)} = Q(HDH){}^tQ = M^{(-)}.$$

De plus, $DH = HD$ est diagonale, avec un coefficient égal à 1 lorsque $\rho_i \neq 0$ et à 0 lorsque $\rho_i = 0$. Elle est symétrique, donc $MM^{(-)}$ et $M^{(-)}M$ sont symétriques.

Les quatre propriétés de la définition sont vérifiées. Ainsi $M^{(-)}$ est une inverse de Penrose-Moore de M . Sa construction montre aussi que $M^{(-)}$ est symétrique et que

$$\text{Im}(M^{(-)}) \subset \text{Im}(M),$$

car seules les directions propres correspondant à des valeurs non nulles contribuent à ces deux images.

7. (c)

On utilise les quatre propriétés imposées à N afin de montrer qu'elles déterminent une unique matrice.

7. (c) i.

Comme NM est symétrique et ${}^tM = M$, on a $NM = {}^t(NM) = M{}^tN$. En utilisant $NMN = N$,

$$N = (NM)N = M{}^tNN.$$

D'autre part, la symétrie de MN donne $MN = {}^tNM$. On en déduit

$$M^2N = M(MN) = M{}^tNM = {}^t(MNM) = {}^tM = M.$$

Ce sont les deux égalités demandées.

7. (c) ii.

Méthode 1 — Positivité d'une norme.

Si $M^2U = 0$, alors, puisque M est symétrique,

$${}^t(MU)(MU) = {}^tU{}^tMMU = {}^tUM^2U = 0.$$

Le coefficient diagonal d'indice j de ce produit est la norme au carré de la colonne d'indice j de MU . Il est nul ; toutes ces colonnes sont donc nulles. Ainsi $MU = 0$.

Méthode 2 — Base orthonormale propre.

Écrivons $M = QD{}^tQ$ comme en 7. (a) et $V = {}^tQU$. L'égalité $M^2U = 0$ donne $D^2V = 0$.

Pour chaque ligne i et colonne j , $\rho_i^2 v_{ij} = 0$.

Si $\rho_i \neq 0$, on a $v_{ij} = 0$, donc $\rho_i v_{ij} = 0$; si $\rho_i = 0$, cette dernière égalité est aussi satisfaite.

Ainsi $DV = 0$, puis $MU = QDV = 0$.

La première preuve repose uniquement sur la symétrie et une norme. La seconde montre que le noyau ne change pas lorsque l'on élève au carré une matrice symétrique.

7. (c) iii.

Méthode 1 — Images et noyau.

La première identité de 7. (c) i donne $\text{Im}(N) \subset \text{Im}(M)$. La construction de 7. (b) donne la même inclusion pour $M^{(-)}$. Donc les colonnes de $U = N - M^{(-)}$ appartiennent à $\text{Im}(M)$.

Comme N et $M^{(-)}$ sont tous deux des inverses au sens de la définition, la seconde identité de 7. (c) i s'applique aux deux :

$$M^2N = M, \quad M^2M^{(-)} = M.$$

Ainsi $M^2U = 0$. Par 7. (c) ii, $MU = 0$, donc les colonnes de U appartiennent aussi à $\text{Ker}(M)$.

L'intersection $\text{Im}(M) \cap \text{Ker}(M)$ est nulle. En effet, si $w = Mz$ et $Mw = 0$, alors

$$\|w\|^2 = {}^t(Mz)w = {}^tzMw = 0,$$

car M est symétrique. Donc $w = 0$.

Toutes les colonnes de U sont ainsi nulles ; $N = M^{(-)}$. Cela prouve l'unicité.

Méthode 2 — Détermination des coefficients dans la base propre.

Posons $K = {}^tQ N Q$. L'identité $M^2N = M$ devient $D^2K = D$. Donc

$$\rho_i^2 k_{ij} = \rho_i \delta_{ij},$$

où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon. Si $\rho_i \neq 0$, cela impose $k_{ii} = 1/\rho_i$ et $k_{ij} = 0$ pour $j \neq i$.

L'autre identité de 7. (c) i, $N = M^t N N$, devient $K = D^t K K$. Si $\rho_i = 0$, la ligne d'indice i du membre de droite est nulle ; la même ligne de K est donc nulle.

Toutes les lignes de K sont ainsi déterminées : $K = H$. D'où $N = Q H^t Q = M^{(-)}$. La première méthode exploite la géométrie des images ; la seconde détermine chaque coefficient dans une base adaptée.

8. (a)

Posons $M = {}^t S S$ et $N = M^{(-)}$. Ces deux matrices sont symétriques, et $P = S N^t S$.

Méthode 1 — Encadrement du rang.

Comme P est un produit commençant par S , $\text{Im}(P) \subset \text{Im}(S)$; donc $\text{rg}(P) \leq \text{rg}(S)$.

Les relations de Penrose-Moore donnent

$${}^t S P S = {}^t S S N^t S S = M N M = M.$$

Le rang d'un produit d'applications linéaires ne dépasse pas celui de chacun de ses facteurs : l'image se trouve dans celle du facteur de gauche, et l'application d'un facteur à un sous-espace ne peut augmenter sa dimension. Ainsi $\text{rg}(M) \leq \text{rg}(P)$.

La question 6. (a) donne $\text{rg}(M) = \text{rg}(S)$. L'encadrement conclut

$$\text{rg}(P) = \text{rg}(S).$$

Méthode 2 — Action sur les colonnes de S .

On a $M(I_k - N M) = M - M N M = 0$. Les colonnes de $I_k - N M$ appartiennent donc à $\text{Ker}(M) = \text{Ker}(S)$ par 6. (a). Ainsi $S(I_k - N M) = 0$, soit $S N M = S$.

Par conséquent $P S = S N^t S S = S N M = S$. La matrice P fixe chaque vecteur de l'image de S . Cela donne $\text{Im}(S) \subset \text{Im}(P)$, tandis que l'inclusion inverse découle de $P = S N^t S$.

Les images sont donc égales, et les rangs aussi. Cette preuve donne en plus l'action de P sur l'espace engendré par les colonnes.

8. (b)

La symétrie de N donne ${}^tP = S^tN^tS = P$. Les relations de Penrose-Moore donnent aussi $P^2 = SN^tSSN^tS = SNMN^tS = SN^tS = P$.

Par 4. (a), P représente un projecteur orthogonal. Son image est incluse dans $\text{Im}(S)$ et possède la même dimension par 8. (a) ; elle est donc égale à $\text{Im}(S)$, qui correspond au sous-espace F .

Ainsi P est la matrice du projecteur orthogonal p_F .

Si $\mathcal{F}$ est libre, $M = {}^tSS$ est inversible par 6. (e). Son inverse ordinaire satisfait les quatre relations de Penrose-Moore : $MM^{-1}M = M$, $M^{-1}MM^{-1} = M^{-1}$ et les deux produits valent I_k , matrice symétrique. Par unicité, $M^{(-)} = M^{-1}$.

L'expression devient donc $S({}^tSS)^{-1}{}^tS$, exactement celle de 6. (e).

9. (a)

La matrice tSS est de taille 2 et non inversible ; son rang est strictement inférieur à 2. Par 6. (a), S a le même rang. Comme $s_1 \neq 0_E$, le rang de S est au moins 1, donc il vaut exactement 1.

Les vecteurs s_1, s_2 sont liés et s_1 est non nul. Il existe donc un réel θ tel que $s_2 = \theta s_1$. En coordonnées,

$$\beta_i = \theta \alpha_i \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

Ce réel est unique, puisque $(\theta - \theta')s_1 = 0_E$ impose $\theta = \theta'$.

9. (b)

Question adaptée au programme actuel : la matrice de changement de base choisie est explicitement orthogonale, afin d'utiliser la construction de 7. (b).

Posons

$$\tau = \|s_1\|^2 = \sum_i \alpha_i^2 > 0.$$

Comme $s_2 = \theta s_1$,

$$M = {}^tSS = \tau \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & \theta^2 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur ${}^t(1, \theta)$ est propre pour $\tau(1 + \theta^2)$, car la multiplication donne $\tau(1 + \theta^2){}^t(1, \theta)$. Le vecteur ${}^t(-\theta, 1)$ appartient au noyau : le produit vaut ${}^t(0, 0)$.

Ces deux vecteurs sont orthogonaux, non nuls, et ont la même norme $\sqrt{1 + \theta^2}$. On peut donc prendre

$$Q = \frac{1}{\sqrt{1 + \theta^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix}.$$

Ses colonnes sont orthonormales ; ${}^tQQ = Q{}^tQ = I_2$. On obtient

$${}^tQM = \text{Diag}(\tau(1 + \theta^2), 0).$$

Toutes les divisions sont justifiées par $\tau > 0$ et $1 + \theta^2 > 0$.

9. (c)

La question 7. (b) donne

$$M^{(-)} = Q \text{Diag} \left(\frac{1}{\tau(1 + \theta^2)}, 0 \right) {}^tQ.$$

Seule la première colonne de Q contribue à ce produit. Ainsi

$$({}^tSS)^{(-)} = \frac{1}{\tau(1 + \theta^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & \theta^2 \end{pmatrix}.$$

Cette expression reste valable pour $\theta = 0$: elle vaut alors $\text{Diag}(1/\tau, 0)$.

9. (d)

Méthode 1 — Formule matricielle générale.

Notons $a = {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $w = {}^t(1, \theta)$. On a $S = a{}^tw$ et ${}^tw w = 1 + \theta^2$. Par 8 et 9. (c),

$$P = S({}^tSS)^{(-)}{}^tS = a{}^tw \frac{w{}^tw}{\tau(1 + \theta^2)^2} w{}^ta = \frac{1}{\tau} a{}^ta.$$

Donc

$$p_F(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} s_1.$$

Méthode 2 — Projection sur une droite.

Puisque $s_2 = \theta s_1$ et $s_1 \neq 0_E$, on a $F = \text{Vect}(s_1)$. Le vecteur $u = s_1 / \|s_1\|$ constitue une base orthonormale de cette droite. La formule du projecteur dans une base orthonormale donne

$$p_F(x) = \langle x, u \rangle_E u = \frac{\langle x, s_1 \rangle_E}{\|s_1\|^2} s_1.$$

La base $\mathcal{B}$ étant orthonormale, cette expression est exactement celle de la première méthode. La formule matricielle gère les générateurs liés ; la formule géométrique simplifie le calcul lorsqu'on identifie directement la droite.

Partie III — Application probabiliste

10.

La loi $\chi^2(d)$ est définie dans le sujet par la loi gamma de $C/2$. On ne suppose aucune propriété préalable de la loi χ^2 .

Posons $T_i = (X_i - \mu)/\sigma$. Comme $\sigma > 0$ et $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on a $T_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Les variables T_i sont mutuellement indépendantes, car chaque transformation porte sur une seule des variables indépendantes X_i .

Étudions $U_i = T_i^2/2$ à partir de sa fonction de répartition. Si $u < 0$, $P(U_i \leq u) = 0$. Pour $u \geq 0$, avec Φ la fonction de répartition de la normale centrée réduite,

$$P(U_i \leq u) = P(-\sqrt{2u} \leq T_i \leq \sqrt{2u}) = 2\Phi(\sqrt{2u}) - 1.$$

La normale a une densité, donc les égalités aux bornes ne changent pas cette probabilité. Pour $u > 0$, la dérivée de cette expression est

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} u^{-1/2} e^{-u}.$$

On peut prendre $f_U(u) = 0$ pour $u \leq 0$. Cette densité est positive et intégrable : près de 0, elle est dominée par une constante fois $u^{-1/2}$, dont l'intégrale converge ; pour $u \geq 1$, elle est dominée par $e^{-u}/\sqrt{\pi}$.

La fonction de répartition tend vers 0 à gauche et vers 1 à droite ; cette densité a donc une intégrale égale à 1. Il en résulte

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} u^{-1/2} e^{-u} du = \sqrt{\pi}.$$

Ainsi U_i a la densité de $\gamma(1/2)$, de taux 1. Les variables U_i sont indépendantes par transformation des T_i . La stabilité par somme des lois gamma indépendantes de même

taux donne

$$\sum_{i=1}^n U_i \sim \gamma(n/2).$$

Si

$$C = \sum_i T_i^2,$$

alors

$$C/2 = \sum_i U_i.$$

Par la définition du sujet,

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n).$$

La propriété des sommes de carrés de normales a donc été démontrée à partir des fonctions de répartition et des lois gamma du programme.

11. (a)

Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, écrit en colonne, on a

$$\sum_{i=1}^n a_i H_i = {}^t a H = {}^t a M G = {}^t ({}^t M a) G.$$

Le vecteur ${}^t M a$ appartient à $\mathbb{R}^n$. Par la définition d'un vecteur gaussien centré, la dernière expression est une variable gaussienne centrée.

Toutes les combinaisons linéaires des H_i sont donc gaussiennes centrées, ce qui prouve que H est un vecteur gaussien centré.

11. (b)

En prenant pour a les vecteurs de la base canonique dans la définition, chaque G_i est une variable gaussienne centrée. Elle admet donc un moment d'ordre 2 fini, qu'elle soit normale ou certaine.

L'inégalité élémentaire $2|xy| \leq x^2 + y^2$ donne

$$|G_i G_j| \leq \frac{1}{2}(G_i^2 + G_j^2).$$

Le membre de droite admet une espérance finie ; par domination, $G_i G_j$ admet une espérance absolue. Ainsi $E(G_i G_j)$ existe pour chaque paire d'indices, sans hypothèse d'indépendance.

Résultat admis dans le sujet : deux vecteurs gaussiens centrés ayant la même matrice Λ ont la même loi. Ce résultat est utilisé en 12. (b) pour comparer un vecteur transformé à un vecteur de composantes indépendantes. Aucune démonstration par une densité multivariée n'est nécessaire.

12. (a)

Fixons $a \in \mathbb{R}^n$. Si tous ses coefficients sont nuls, la somme

$$\sum_i a_i G_i$$

est la variable certaine égale à 0, donc une variable gaussienne centrée.

Sinon, les termes $a_i G_i$ correspondant aux coefficients non nuls sont des normales centrées de variances a_i^2 . Ils sont mutuellement indépendants, par transformation de variables indépendantes. La stabilité par somme des normales indépendantes donne

$$\sum_{i=1}^n a_i G_i \sim \mathcal{N} \left(0, \sum_{i=1}^n a_i^2 \right).$$

Les termes de coefficient nul n'affectent pas la somme. Toutes les combinaisons sont donc gaussiennes centrées, et G est un vecteur gaussien centré.

Pour $i = j$, $E(G_i^2) = V(G_i) + (E(G_i))^2 = 1$. Pour $i \neq j$, l'indépendance et l'existence des espérances donnent

$$E(G_i G_j) = E(G_i)E(G_j) = 0.$$

Ainsi $\Lambda(G) = I_n$.

12. (b)

Par 11. (a), $H = QG$ est un vecteur gaussien centré. Écrivons les coefficients de Q sous la forme $q_{i\ell}$. Les produits admettent une espérance par 11. (b), et les sommes sont finies.

La linéarité donne

$$E(H_i H_j) = \sum_{\ell=1}^n \sum_{r=1}^n q_{i\ell} q_{jr} E(G_\ell G_r) = \sum_{\ell=1}^n q_{i\ell} q_{j\ell}.$$

Par orthogonalité, la dernière expression est le coefficient d'indices (i, j) de $Q^t Q = I_n$.

Donc $\Lambda(H) = I_n = \Lambda(G)$.

Le résultat admis après 11. (b) implique que H et G ont la même loi. Les composantes de H ont donc les mêmes lois marginales que celles de G , soit $\mathcal{N}(0, 1)$.

De plus, pour tous réels $x_1, \dots, x_n$,

$$P(H_1 \leq x_1, \dots, H_n \leq x_n) = P(G_1 \leq x_1, \dots, G_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^n \Phi(x_i).$$

Les fonctions de répartition conjointes se factorisent en celles des marginales : les H_i sont mutuellement indépendantes. L'indépendance est obtenue par la loi jointe admise, et non par la seule annulation des covariances.

13. (a)

Notons p_i les endomorphismes de matrices P_i dans la base canonique, qui est orthonormale. Les hypothèses donnent

$$\sum_i p_i = \text{id}$$

et

$$\sum_i \text{rg}(p_i) = n.$$

Par l'équivalence de 3. (c), chaque p_i est un projecteur et $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$. Ainsi $P_i^2 = P_i$ et $P_i P_j = 0$ pour $i \neq j$.

Comme chaque P_i est symétrique, 4. (a) montre qu'il s'agit de projecteurs orthogonaux.

Pour $x = P_i a \in \text{Im}(P_i)$ et $y = P_j b \in \text{Im}(P_j)$, avec $i \neq j$,

$$\langle x, y \rangle = {}^t a {}^t(P_i) P_j b = {}^t a P_i P_j b = 0.$$

Les images sont donc deux à deux orthogonales.

13. (b)

Choisissons une base orthonormale de chaque $F_i = \text{Im}(P_i)$. Pour $r_i = 0$, cette base est vide. La réunion de ces bases est orthonormale par 13. (a). Elle contient

$$\sum_i r_i = n$$

vecteurs et constitue donc une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Chaque P_i agit comme l'identité sur F_i et comme zéro sur les autres F_j , car $P_i P_j = 0$. Ainsi sa matrice dans la base réunie est diagonale, avec r_i coefficients égaux à 1 et tous les autres égaux à 0.

Notons V la matrice contenant cette base en colonnes. Elle vérifie ${}^tVV = V{}^tV = I_n$. En posant $Q = {}^tV$, on obtient une matrice orthogonale telle que

$$QP_i{}^tQ = {}^tVP_iV$$

soit diagonale pour chaque i .

Les positions des coefficients 1 de ces matrices diagonales forment des ensembles d'indices disjoints $I_1, \dots, I_{k'}$, de cardinaux $r_1, \dots, r_{k'}$, dont la réunion est $\{1, \dots, n\}$.

13. (c)

Chaque composante G_i est gaussienne centrée, puisque le vecteur G l'est. Sa variance vaut 1, donc elle suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Les composantes sont mutuellement indépendantes par hypothèse.

Posons $H = QG$ avec la matrice de 13. (b). Par 12. (b), les composantes de H sont encore mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Comme $G = {}^tQH$,

$${}^tGP_1G = {}^tH(QP_1{}^tQ)H = \sum_{\ell \in I_1} H_\ell^2.$$

L'ensemble I_1 contient r_1 indices et $r_1 \geq 1$ par hypothèse. La question 10, avec $\mu = 0$, $\sigma = 1$ et r_1 variables, donne

$${}^tGP_1G \sim \chi^2(r_1).$$

Les coefficients diagonaux égaux à 1 déterminent exactement le nombre de carrés dans la somme.

13. (d)

Dans les mêmes coordonnées,

$${}^tGP_iG = \sum_{\ell \in I_i} H_\ell^2 \quad (1 \leq i \leq k).$$

Les ensembles I_i sont disjoints et les H_ℓ sont mutuellement indépendantes. Par le lemme des coalitions, les sous-familles correspondantes sont indépendantes. Les fonctions de ces sous-familles, ici les sommes de carrés, sont donc mutuellement indépendantes.

Si $r_i = 0$, la somme est vide et vaut la constante 0, ce qui ne compromet pas l'indépendance. On ne lui attribue pas une loi $\chi^2(0)$, puisque la définition du sujet porte sur les paramètres strictement positifs.

Ainsi toutes les variables tGP_iG sont mutuellement indépendantes, et celles dont $r_i > 0$ ont les lois $\chi^2(r_i)$ établies en 13. (c).

14. (a)

Posons $d = qm$. On rassemble les variables $X_{i,j}$ en une colonne $G \in \mathbb{R}^d$, en plaçant successivement les q coordonnées de la colonne $j = 1$, puis celles de $j = 2$, et ainsi de suite. Ses composantes sont mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Base orthonormale adaptée au vecteur constant.

Le vecteur $u = {}^t(1, \dots, 1)/\sqrt{d}$ est unitaire. Complétons-le en une base orthonormale $(u, u_2, \dots, u_d)$ de $\mathbb{R}^d$ et notons Q la matrice dont les lignes sont leurs transposées. Alors Q est orthogonale.

Posons $H = QG$. La question 12. (b) donne des composantes indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et

$$H_1 = {}^tuG = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i,j} X_{i,j} = \sqrt{d} \bar{X}.$$

Ainsi

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{qm}\right).$$

Le vecteur résiduel de coordonnées $X_{i,j} - \bar{X}$ est $G - ({}^t u G)u$. Dans la base choisie, sa première coordonnée est nulle et les autres sont $H_2, \dots, H_d$. La norme euclidienne se conserve lors du changement de base orthonormale, donc

$$\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^m (X_{i,j} - \bar{X})^2 = \sum_{\ell=2}^d H_{\ell}^2 \sim \chi^2(d-1)$$

par 10. Comme $d \geq 4$, le paramètre $d-1$ est strictement positif.

La moyenne est une fonction de H_1 ; la somme résiduelle est une fonction de $H_2, \dots, H_d$. Le lemme des coalitions prouve leur indépendance. On obtient donc les lois $\mathcal{N}(0, 1/(qm))$ et $\chi^2(qm-1)$, avec indépendance.

14. (b)

On conserve $d = qm$ et le rangement des coordonnées de 14. (a). Considérons le sous-espace C des vecteurs qui, dans chaque colonne j , ont leurs q coordonnées égales entre elles.

Pour chaque j , soit a_j le vecteur ayant $1/\sqrt{q}$ aux q positions de la colonne j et 0 ailleurs. Les vecteurs $a_1, \dots, a_m$ sont orthonormaux et forment une base de C ; donc $\dim C = m$.

Le projecteur orthogonal sur C est

$$P_C = \sum_{j=1}^m a_j {}^t(a_j).$$

La coordonnée du vecteur $P_C G$ à la position (i, j) vaut

$$\frac{1}{q} \sum_{h=1}^q X_{h,j} = Z_j.$$

Ainsi la somme des carrés des résidus à l'intérieur des colonnes est

$$W = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^m (X_{i,j} - Z_j)^2 = \|(I_d - P_C)G\|^2.$$

La droite constante $D = \text{Vect}(u)$ est incluse dans C . Son projecteur est $P_0 = u^t u$, comme en 14. (a). Puisque $u \in C$, on a $P_C u = u$, d'où $P_C P_0 = P_0$; en transposant, $P_0 P_C = P_0$.

On peut donc définir trois projecteurs orthogonaux

$$P_W = I_d - P_C, \quad P_B = P_C - P_0, \quad P_0.$$

Leur symétrie résulte de celle de P_C et P_0 . Leurs carrés se calculent avec $P_C^2 = P_C$, $P_0^2 = P_0$ et $P_C P_0 = P_0 P_C = P_0$:

$$P_W^2 = I_d - P_C = P_W,$$

$$P_B^2 = P_C - 2P_0 + P_0 = P_C - P_0 = P_B.$$

Leurs produits deux à deux sont nuls, et leur somme vaut I_d . Leurs images sont respectivement $C^\perp$, $C \cap D^\perp$ et D . Leurs rangs sont donc

$$r_W = d - m = m(q - 1), \quad r_B = m - 1, \quad r_0 = 1.$$

Pour l'image de P_B , on peut vérifier directement que $P_B G \in C$ et est orthogonal à u , et que P_B fixe tout vecteur de $C \cap D^\perp$. La dimension $m - 1$ résulte de la décomposition orthogonale $C = D \oplus (C \cap D^\perp)$.

La coordonnée de $(P_C - P_0)G$ à la position (i, j) est $Z_j - \bar{X}$. Chaque différence est répétée q fois, donc

$$B = \|(P_C - P_0)G\|^2 = q \sum_{j=1}^m (Z_j - \bar{X})^2.$$

Comme P_W et P_B sont symétriques et idempotents, leurs normes au carré s'écrivent $W = {}^tGP_WG$ et $B = {}^tGP_BG$.

Les trois matrices vérifient les hypothèses de 13 : leur somme est l'identité et la somme de leurs rangs vaut d . Les composantes de G sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Les conclusions de 13. (c) et 13. (d) donnent donc

$$\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^m (X_{i,j} - Z_j)^2 \sim \chi^2(m(q-1)),$$

$$q \sum_{j=1}^m (Z_j - \bar{X})^2 \sim \chi^2(m-1),$$

et ces deux variables sont indépendantes. Les paramètres sont positifs puisque $q, m \geq 2$.

En cohérence avec 14. (a), l'orthogonalité des composantes donne aussi

$$\sum_{i,j} (X_{i,j} - \bar{X})^2 = W + B.$$

Les degrés de liberté s'additionnent : $m(q-1) + (m-1) = qm - 1$. Cette identité suit de la décomposition orthogonale, sans utiliser un résultat statistique supplémentaire.

Relevé des adaptations

- 3. (c) i : ajout de la demande d'établir la relation entre trace et rang d'un projecteur dans une base adaptée, car cette propriété supplémentaire de la trace ne doit pas être supposée connue.
- 5. (a)–(c) : code adapté en Python, indices convertis de $1, \dots, n$ à $0, \dots, n-1$, produit matriciel écrit avec `np.dot`, boucle de test de symétrie conservée et blanc à compléter maintenu dans 5. (c). Les commandes et conventions nécessaires sont précisées.

- 7. (a) : orthogonalité de Q explicitée afin que la représentation spectrale et la construction de 7. (b) soient immédiatement utilisables avec $Q^{-1} = {}^tQ$.
- 9. (b) : choix d'une matrice Q orthogonale explicitement demandé, conformément à la construction de l'inverse en 7. (b).
- Préambule de la partie III et 10 : précision qu'aucune propriété de la loi du khi-deux n'est supposée connue ; la définition d'origine par une loi gamma est conservée et la loi des sommes de carrés est démontrée à partir de cette définition.