



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2015

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème :

- on note $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$;
- toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A})$ qui est, sauf mention contraire, muni de la probabilité P ;
- on note S_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, S_X(x) = P([X > x]) ;$$
- on admet que, pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et toute fonction g continue et croissante sur $[0, 1]$, la fonction $x \mapsto g(S_X(x))$ est intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}_+$, et que les propriétés usuelles de l'intégrale sur un segment (linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance, changement de variable affine) s'appliquent à ces fonctions et à leurs combinaisons linéaires ; leurs intégrales sur $[0, +\infty[$ sont définies, comme les intégrales impropres usuelles, par passage à la limite.

Dans le cadre de l'évaluation des risques encourus par des établissements financiers, il est nécessaire de retrancher à la valeur moyenne attendue des investissements (espérance mathématique « pure ») un terme correctif d'autant plus important que le risque est plus grand.

L'objet du problème est de déterminer grâce à une « fonction de distorsion », une « espérance corrigée » qui prend en compte cette notion de risque et qui possède les propriétés requises pour une évaluation cohérente de risques financiers, en particulier, une propriété de sous-additivité nécessaire pour valoriser équitablement les avantages éventuels de la diversification.

Partie I. Probabilité de surpassement et espérance

- 1) On suppose uniquement dans cette question que X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ (avec $\lambda > 0$).

a) Vérifier l'égalité : $E(X) = \int_0^{+\infty} S_X(x) dx.$

- b) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction de répartition F de X et interpréter $E(X)$ en terme d'aire grâce à la formule précédente.

2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $h(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}.$

a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(x) dx.$

- b) Déterminer deux réels c et d vérifiant pour tout réel $x \geq 0$, la relation :

$$h(x) = \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2}.$$

En déduire une primitive de h sur $\mathbb{R}_+.$

- c) Montrer que la fonction f_0 suivante est une densité de probabilité :

$$f_0 : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{(x+1)(x+2) \ln 2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- 3) On suppose dans cette question que X admet pour densité la fonction f_0 définie à la question 2) c).

- a) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

b) Pour tout x réel, calculer $S_X(x)$ et en trouver un équivalent lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$.

4) a) Justifier la monotonie de la fonction S_X et trouver la limite de $S_X(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Montrer que la fonction S_X est continue à droite. À quelle condition est-elle continue en 0?

5) Dans cette question, on suppose que X admet une densité f nulle sur $] -\infty, 0]$, continue sur $]0, +\infty[$ mais non nécessairement en 0.

a) Montrer que la fonction S_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

b) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 xf(x) dx$.

c) Établir pour tout réel $A \geq 0$, l'égalité : $\int_0^A S_X(x) dx = AS_X(A) + \int_0^A xf(x) dx$.

d) En déduire que si l'intégrale $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ est convergente, alors X admet une espérance.

e) Montrer que si X admet une espérance, alors on a pour tout réel $A \geq 0$:

$$\int_A^{+\infty} xf(x) dx \geq AS_X(A).$$

f) Dédurre des résultats précédents que X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ est convergente, et que dans ce cas, on a :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} S_X(x) dx \quad [1]$$

6) Dans cette question, on suppose que X est discrète et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Établir pour tout entier naturel n , l'égalité :

$$\sum_{k=0}^n S_X(k) = (n+1)P([X \geq n+1]) + \sum_{k=0}^n kP([X = k]).$$

b) En déduire que si la série de terme général $S_X(n)$ est convergente, alors X admet une espérance.

c) Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $S_X(n)$ est convergente, et que dans ce cas, on a :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_X(n).$$

d) On suppose que X admet une espérance.

(i) Exprimer pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^N S_X(x) dx$ à l'aide d'une somme partielle de la série de terme général $S_X(n)$.

(ii) En déduire que $E(X) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A S_X(x) dx$.

Ainsi, la relation [1] reste applicable dans le cas des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$; on admet qu'elle reste applicable à toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ pour laquelle l'intégrale $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ est convergente : une telle variable admet une

espérance, égale à $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ (pour une variable qui n'est ni discrète ni à densité, cette égalité sert de définition de $E(X)$).

Partie II. Fonctions de distorsion et espérances corrigées : un exemple

On appelle fonction de distorsion toute fonction g définie, continue et croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ qui vérifie les trois propriétés supplémentaires suivantes : $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ et g est concave sur $]0, 1[$.

Pour toute fonction de distorsion g , on dit que X admet une espérance corrigée par g , si la fonction composée $g \circ S_X$ admet une intégrale convergente sur $[0, +\infty[$.

Cette intégrale, notée $E_g(X)$, est appelée espérance de X corrigée par g . Ainsi :

$$E_g(X) = \int_0^{+\infty} g(S_X(x)) dx$$

7) Exemple. Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite dont la

dérivée, notée φ , est telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

a) Justifier que Φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$. On note Ψ la bijection réciproque de Φ .

Soit $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et w_α la fonction définie sur $[0, 1]$ telle que :

$$w_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \Phi(\Psi(x) - \Psi(\alpha)) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

b) Montrer que la fonction w_α est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.

c) On note w'_α la dérivée de w_α . Établir pour tout $x \in]0, 1[$, la relation :

$$w'_\alpha(x) = \exp \left(\Psi(\alpha)\Psi(x) - \frac{(\Psi(\alpha))^2}{2} \right)$$

d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction w_α au point d'abscisse α .

e) Vérifier que w_α est une fonction de distorsion.

8) On considère à nouveau la fonction de distorsion w_α définie dans la question 7).

Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi normale d'écart-type égal à 1, dont l'espérance est notée μ , et soit X une variable aléatoire qui suit la même loi que $\exp(Y)$.

a) Justifier l'existence de l'espérance de X et la calculer.

b) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $w_\alpha(S_X(x)) = P([Xe^{-\Psi(\alpha)} > x])$.

c) En déduire l'existence et la valeur de $E_{w_\alpha}(X)$.

9) Pour faire tracer par Python la courbe représentative de w_α , on utilise les fonctions `ndtr` et `ndtri` de la bibliothèque `scipy.special`, qui permettent de calculer les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et de sa réciproque.

Si une variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite et si x et p sont deux réels reliés par l'égalité $P([Z \leq x]) = p$, avec $0 < p < 1$, alors :

- p est calculable en Python par `ndtr(x)` ;

- x est calculable en Python par `ndtri(p)`.

Appliquées à un tableau numpy, ces deux fonctions renvoient le tableau de même taille obtenu en les appliquant à chaque coefficient. On rappelle que `np.linspace(a, b, n)` renvoie un tableau de n valeurs régulièrement espacées de a à b (les deux bornes étant incluses), et qu'à un tableau numpy `t` et un réel c , l'expression `t - c` associe le tableau obtenu en retranchant c à chaque coefficient de `t`.

Le graphique décrit ci-dessous a été obtenu en affectant successivement à la variable `alpha` les valeurs 0.2 et 0.4, et en exécutant les cinq instructions numérotées de (1) à (5) du programme suivant, la quatrième étant incomplète.

Python

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

from scipy.special import ndtr, ndtri

alpha = 0.2                                # puis alpha = 0.4

qa = ndtri(alpha)                          # (1)
p = np.linspace(0.02, 0.98, 97)           # (2)
q = ndtri(p) - qa                         # (3)
wa = ndtr(???)                            # (4) à compléter
plt.plot(p, wa)                           # (5)

plt.show()
```

Description du graphique obtenu : dans un repère où les deux axes sont gradués de 0 à 1 (par pas de 0.1), on observe deux courbes croissantes et concaves, tracées pour des abscisses allant de 0.02 à 0.98. L'une des deux courbes est située au-dessus de l'autre sur tout l'intervalle : la courbe supérieure part d'un point d'ordonnée voisine de 0.11, la courbe inférieure d'un point d'ordonnée voisine de 0.04, et les deux courbes se rejoignent au voisinage du point (1, 1).

- a) Quelles sont les valeurs affectées aux variables `p` et `q` par les instructions (2) et (3) (on précisera la taille des tableaux obtenus) ?

- b) Compléter la quatrième ligne de code.
- c) À laquelle des deux courbes correspond la valeur $\alpha = 0.2$ (on justifiera mathématiquement la réponse) ?
- d) Comment trouver les tangentes aux deux courbes en $(0, 0)$ et $(1, 1)$?
- e) Que deviendrait la courbe représentative de w_α si on faisait tendre α vers 0 ?

Partie III. Sous-additivité des espérances corrigées

Les notations et le contexte de cette partie sont identiques à ceux des parties I et II.

Dans cette partie, on note g une fonction de distorsion arbitraire et on suppose l'existence de $E_g(X)$.

Soit B un réel positif et soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que $P([Y \in [0, B]]) = 1$.

L'objectif de cette partie consiste à établir l'inégalité :

$$E_g(X + Y) \leq E_g(X) + E_g(Y) \quad [2]$$

- 10) a) Soit x un réel fixé de $[0, 1]$. Justifier pour tout entier $n \geq 1$, l'inégalité :

$$g\left(x\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1-x)\frac{1}{n}\right) \geq x g\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1-x) g\left(\frac{1}{n}\right)$$

- b) En déduire que $g(x) \geq x$.
- c) Soit a, b et ε trois réels tels que : $0 < a < b < b + \varepsilon < 1$.

Justifier l'existence d'un réel $\lambda \in [0, 1]$ vérifiant les deux égalités :

$$\lambda a + (1 - \lambda)(b + \varepsilon) = b \quad \text{et} \quad (1 - \lambda)a + \lambda(b + \varepsilon) = a + \varepsilon$$

En déduire l'inégalité : $g(b + \varepsilon) - g(a + \varepsilon) \leq g(b) - g(a)$.

11) a) Montrer que $E(X)$ existe et que $E(X) \leq E_g(X)$.

b) Montrer que si X est une variable aléatoire certaine, on a $E_g(X) = E(X)$.

c) Soit $r > 0$ et $s \geq 0$. Montrer que $E_g(rX + s)$ existe et que : $E_g(rX + s) = rE_g(X) + s$.

d) Soit T et W deux variables aléatoires telles que $P([0 \leq T \leq W]) = 1$.

Sous réserve d'existence, comparer $E_g(T)$ et $E_g(W)$.

12) Justifier l'existence de $E_g(Y)$ et de $E_g(X + Y)$; établir les inégalités : $E_g(Y) \leq B$ et $E_g(X + Y) \leq E_g(X) + B$.

13) On se propose de montrer par récurrence sur l'entier n que l'inégalité [2] est vraie pour toute variable aléatoire U telle que $P([U \in \llbracket 0, n \rrbracket]) = 1$.

Soit n un entier naturel donné. On suppose que quelle que soit la probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$, l'inégalité [2] est vraie pour toute fonction de distorsion g , pour toute variable aléatoire X possédant une espérance corrigée par g et pour toute variable aléatoire U telle que $P([U \in \llbracket 0, n \rrbracket]) = 1$.

a) Dédurre de la question 12) que la propriété ci-dessus est vérifiée pour $n = 0$.

b) On suppose la propriété ci-dessus vérifiée pour un entier naturel n donné.

Soit Z une variable aléatoire telle que $P([Z \in \llbracket 0, n + 1 \rrbracket]) = 1$ et $p = P([Z > 0]) > 0$.

On pose $P^* = P_{[Z > 0]}$ (probabilité conditionnelle sachant $[Z > 0]$). Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$S_X^*(x) = P^*([X > x]), \quad S_Z^*(x) = P^*([Z > x]) \quad \text{et} \quad S_{X+Z}^*(x) = P^*([X + Z > x])$$

- (i) Établir l'égalité : $S_{X+Z}(x) = P([Z = 0] \cap [X > x]) + p S_{X+Z}^*(x)$.
- (ii) Exprimer $S_X(x)$ et $S_Z(x)$ en fonction de p , $P([Z = 0] \cap [X > x])$, $S_X^*(x)$ et $S_Z^*(x)$.
- (iii) En utilisant le résultat de la question 10) c), déduire des relations précédentes l'inégalité :

$$g(S_{X+Z}(x)) - g(S_X(x)) - g(S_Z(x)) \leq g(pS_{X+Z}^*(x)) - g(pS_X^*(x)) - g(pS_Z^*(x))$$

- c) Justifier que la fonction $h : x \mapsto \frac{g(px)}{g(p)}$ est une fonction de distorsion et établir l'inégalité :

$$\int_0^{+\infty} h(S_{X+Z}^*(x)) dx \leq \int_0^{+\infty} h(S_X^*(x)) dx + \int_0^{+\infty} h(S_Z^*(x)) dx$$

- d) En déduire l'inégalité : $E_g(X + Z) \leq E_g(X) + E_g(Z)$. Conclure.

- 14) Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $\omega \in \Omega$, on pose : $Y_n(\omega) = \frac{1}{n} \lfloor nY(\omega) \rfloor$, où $\lfloor u \rfloor$ désigne la partie entière de u .

- a) Justifier l'existence de $E_g(Y_n)$ et $E_g(X + Y_n)$; établir l'inégalité :

$$E_g(X + Y_n) \leq E_g(X) + E_g(Y_n).$$

- b) Pour $x > 0$, comparer les événements $[Y_n > x]$ et $[Y > x]$, et montrer que $E_g(Y_n) \leq E_g(Y)$.

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} g(S_{X+Y}(x)) \, dx = \int_0^{+\infty} g\left(S_{X+Y}\left(x + \frac{1}{n}\right)\right) \, dx \leq E_g(X + Y_n)$$

d) En déduire l'inégalité [2].