



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques

2015

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Préambule et notations

Les trois parties du problème sont indépendantes.

Dans tout le problème, p est un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout vecteur $b \in \mathbb{R}^p$, on note B la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique. La transposée d'une matrice A est notée tA et la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est notée I_p .

Pour $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^p$, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$, on note $x'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_p(t))$ lorsque les composantes sont dérivables. On note $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = (\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_p(t))$ lorsque les composantes admettent des limites finies. On définit de même la limite d'une suite de vecteurs par les limites de ses composantes.

Partie I. Deux exemples de pilotage linéaire

Soient $A \neq 0$ une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^p$ et $x_1, \dots, x_p$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$. On dit que $x : t \mapsto (x_1(t), \dots, x_p(t))$ est pilotée par le couple (A, b) si les colonnes $X(t)$ et $X'(t)$ de leurs coordonnées vérifient

$$\forall t \geq 0, \quad X'(t) = AX(t) + B.$$

On appelle équilibre du système piloté par (A, b) tout vecteur $x^* \in \mathbb{R}^p$ vérifiant $AX^* + B = 0$. Cet équilibre est attractif si, pour toute application x pilotée par (A, b) , $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$.

1. Le cas $p = 1$.

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et x une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $x'(t) = ax(t) + b$ pour tout $t \geq 0$.

(a) Calculer la dérivée de $y : t \mapsto (x(t) + b/a)e^{-at}$.

(b) En déduire que, pour tout $t \geq 0$,

$$x(t) = -\frac{b}{a} + \left(x(0) + \frac{b}{a}\right)e^{at}.$$

(c) On identifie a à la matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ d'unique coefficient a . Montrer que le système piloté par (a, b) admet un unique équilibre et que cet équilibre est attractif si et

seulement si $a < 0$.

2. Exemple 1. Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $b = (1, 1)$ et $x : t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$ une application définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, pilotée par (A, b) .

(a) Déterminer l'unique équilibre x^* du système.

(b) Justifier l'existence d'une matrice inversible Q telle que $Q^{-1}AQ$ soit diagonale. Pourquoi peut-on choisir Q telle que $Q^{-1} = {}^tQ$?

(c) Trouver deux réels $\lambda \leq \mu$ et une matrice inversible Q vérifiant $Q^{-1} = {}^tQ$ et

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

(d) Pour $t \geq 0$, on pose $W(t) = {}^tQX(t)$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

(i) Vérifier que $W'(t) = DW(t) + {}^tQB$.

(ii) À l'aide de la question 1, en déduire que x^* est attractif.

3. On suppose $p \geq 2$. Soit $\mathcal{B}_p = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et u_p l'endomorphisme défini par $u_p(e_1) = e_p$ et $u_p(e_k) = e_{k-1}$ pour $2 \leq k \leq p$.

(a) Écrire sa matrice A_p dans $\mathcal{B}_p$. Quel est son rang ?

(b) Pour $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(p\theta) = 1$ et $\sin(p\theta) = 0$, on pose

$$C_\theta = {}^t(1, \cos \theta, \dots, \cos((p-1)\theta)), \quad S_\theta = {}^t(0, \sin \theta, \dots, \sin((p-1)\theta)).$$

Montrer que

$$A_p C_\theta = \cos \theta C_\theta - \sin \theta S_\theta, \quad A_p S_\theta = \sin \theta C_\theta + \cos \theta S_\theta.$$

Préciser l'action de A_p sur C_0 et, lorsque p est pair, sur C_π .

(c) Pour $1 \leq j \leq \lfloor (p-1)/2 \rfloor$, on pose $\theta_j = 2\pi j/p$. Montrer que la famille formée de C_0 , des couples $(C_{\theta_j}, S_{\theta_j})$ et, si p est pair, de C_π , est une base orthogonale de $\mathbb{R}^p$.

On pourra établir les sommes trigonométriques nécessaires à partir de

$$2 \sin(\phi/2) \cos(\ell\phi) = \sin((\ell + 1/2)\phi) - \sin((\ell - 1/2)\phi),$$

$$2 \sin(\phi/2) \sin(\ell\phi) = \cos((\ell - 1/2)\phi) - \cos((\ell + 1/2)\phi),$$

et des formules d'addition. Décrire la matrice de u_p dans cette base et déterminer pour quelles valeurs de p cet endomorphisme est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que le polynôme $X^p - 1 \in \mathbb{R}[X]$ est annulateur de u_p . L'endomorphisme admet-il un polynôme annulateur non nul de degré strictement inférieur à p ?

(e) Soit

$$P(X) = \sum_{\ell=0}^d a_\ell X^\ell \in \mathbb{R}[X].$$

Décrire la matrice de $P(u_p)$ dans la base de (c), en posant

$$a(\theta) = \sum_{\ell=0}^d a_\ell \cos(\ell\theta), \quad b(\theta) = \sum_{\ell=0}^d a_\ell \sin(\ell\theta).$$

Déterminer ses valeurs propres réelles et une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

4. Exemple 2. Soient α, β deux réels tels que $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha \neq \beta$ et $\alpha + \beta \neq 1$. On pose

$$M = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta \\ \beta & -1 & \alpha \\ \alpha & \beta & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) On note $A = A_3$.

(i) Déterminer un polynôme réel P de degré inférieur ou égal à 2 tel que $M = P(A)$.

(ii) On pose $L = \text{Vect}((1, 1, 1))$ et $H = \{(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3 \mid h_1 + h_2 + h_3 = 0\}$. À l'aide de la décomposition réelle de la question 3, donner la matrice de la restriction de M à H dans la base $(C_{2\pi/3}, S_{2\pi/3})$, déterminer son action sur L et ses valeurs propres réelles. Préciser la partie symétrique de la matrice de la restriction à H .

(b) Soit $c = (1, 1, 1)$.

(i) Trouver l'unique équilibre x^* du système piloté par (M, c) .

(ii) Vérifier que $x : t \mapsto x^* + e^{(\alpha+\beta-1)t}c$ est pilotée par (M, c) .

(iii) En déduire une condition nécessaire sur α, β pour que x^* soit attractif.

On suppose désormais cette condition réalisée.

(c) On pose $N = {}^tM + M$.

- (i) Quelles sont les valeurs propres de N ?
- (ii) Déterminer $\theta > 0$ tel que toutes les valeurs propres de N soient inférieures ou égales à -2θ .
- (d) On rappelle $c = (1, 1, 1)$. Soit x une application pilotée par (M, c) . Posons $y(t) = x(t) - x^*$, de colonne $Y(t)$, et $\varphi(t) = e^{2\theta t} \|Y(t)\|^2$.
- (i) Vérifier que y est pilotée par $(M, 0_{\mathbb{R}^3})$.
- (ii) Montrer que φ est dérivable et que
- $$\forall t \geq 0, \quad \varphi'(t) = e^{2\theta t} (Y(t))(N + 2\theta I_3)Y(t).$$
- (iii) Montrer que φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
- (iv) En déduire que x^* est attractif.

Partie II. Un exemple de pilotage non linéaire

Un modèle de croissance économique endogène à deux secteurs représente les taux de croissance du stock de capital et du stock de connaissances par deux fonctions x_1, x_2 . Pour un paramètre réel $\rho > 0$, ces fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ vérifient

$$\forall t \geq 0, \quad \begin{cases} x_1'(t) = F_1(x_1(t), x_2(t)), \\ x_2'(t) = F_2(x_1(t), x_2(t)), \end{cases} \quad (S)$$

où, pour $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$F_1(u_1, u_2) = (-u_1 + \rho(u_2 - u_1) + 1)u_1, \quad F_2(u_1, u_2) = (-u_2 + \rho(u_1 - u_2) + 1)u_2.$$

5. (a) Pour $\nu > -1$, on pose $x_1(t) = x_2(t) = 1/(1 + \nu e^{-t})$ pour $t \geq 0$. Vérifier que cette application est solution de (S).
- (b) En déduire que, pour tout $c \in]0, 1[$, il existe une solution de (S) à valeurs dans $[c, +\infty[^2$.
- (c) Quel est l'unique couple $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ vérifiant $F_1(x_1^*, x_2^*) = F_2(x_1^*, x_2^*) = 0$?
- (d) Toutes les solutions de (S) convergent-elles vers x^* quand $t \rightarrow +\infty$?

6. Pour $r \in \mathbb{R}$, soit q_r la forme quadratique de matrice $Q_r = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ -r & 1 \end{pmatrix}$. On pose

$$C_r = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid q_r(u_1, u_2) = 1\}.$$

- (a) Pour quelles valeurs de r la forme quadratique q_r est-elle définie positive? Que peut-on alors dire de C_r ?

Dans la suite de cette question, r, s vérifient $0 < s < r < 1$.

- (b) Justifier que $\{q_s(u_1, u_2) \mid (u_1, u_2) \in C_r\}$ admet une borne inférieure $m_{r,s}$ et une borne supérieure $M_{r,s}$, toutes deux atteintes.

- (c) Justifier que le gradient de $q_r - 1$ ne s'annule en aucun point de C_r .

- (d) On paramètre C_r par

$$U_r(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos t}{\sqrt{1-r}} - \frac{\sin t}{\sqrt{1+r}}, \frac{\cos t}{\sqrt{1-r}} + \frac{\sin t}{\sqrt{1+r}} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vérifier que cette paramétrisation parcourt tout C_r . Énoncer la condition nécessaire du premier ordre pour qu'un paramètre t_0 corresponde à un extremum de $g(t) = q_s(U_r(t))$.

- (e) En déduire les valeurs de $m_{r,s}$ et $M_{r,s}$ et établir l'existence de $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad q_s(u_1, u_2) \leq \mu q_r(u_1, u_2).$$

7. On conserve les notations de la question 6.

(a) Soient $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_1, u_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(v_1 - v_2, v_1 + v_2)$. Vérifier que $(u_1, u_2) \in C_r$ si et seulement si $(1 - r)v_1^2 + (1 + r)v_2^2 = 1$.

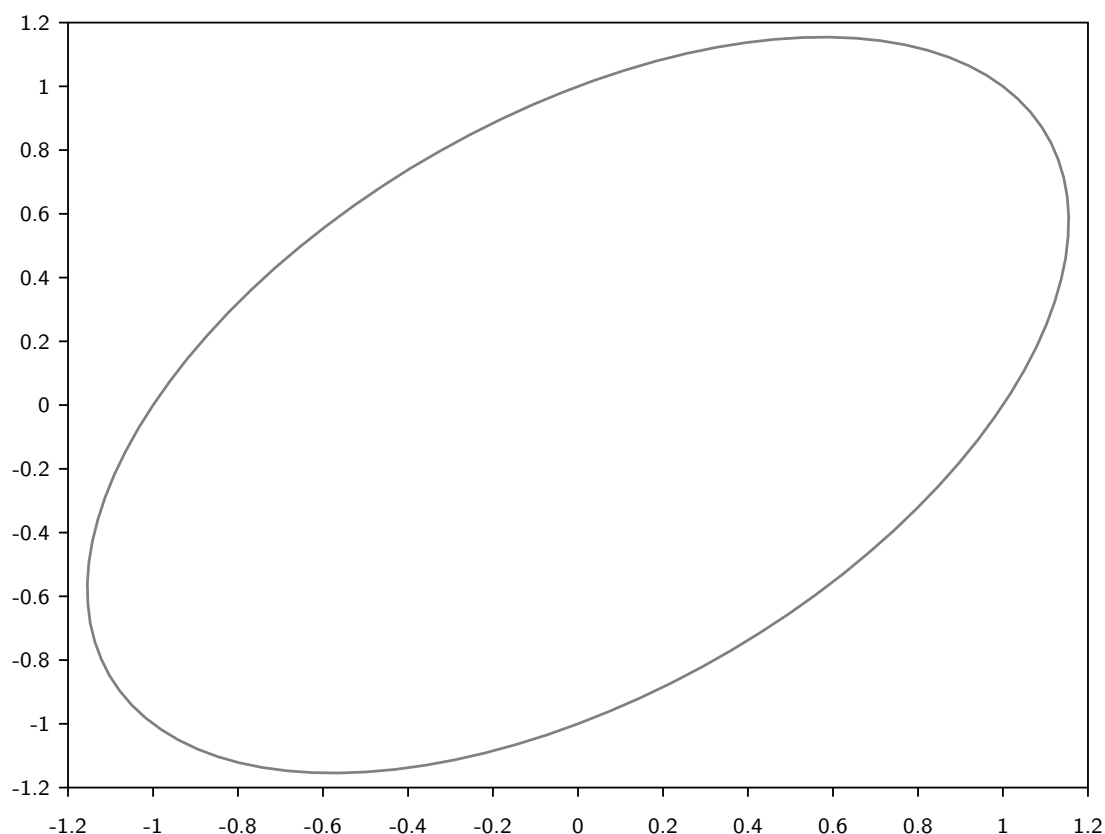
Dans la suite, $r = 1/2$ et $s = 1/4$.

(b) Pour tracer C_r en Python, on utilise le code suivant, qui donne le graphique ci-dessous :

Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n = 100                                # (1)
theta = np.linspace(0, 2 * np.pi, n) # (2)
ct = np.cos(theta)                     # (3)
st = np.sin(theta)                     # (4)
Cr = np.array([ct - st / np.sqrt(3),
               ct + st / np.sqrt(3)])  # (5)
plt.plot(Cr[0, :], Cr[1, :])          # (6)
plt.show()
```



En vous appuyant sur 7(a), expliquer la méthode employée. Préciser la signification de la ligne (2) ainsi que le format et le contenu de `Cr` et de `Cr[0, :]`.

- (c) Soit $z_0 > 0$ la valeur affectée à z . Compléter la ligne (7) pour tracer la ligne de niveau z_0 de q_s ; les variables `ct` et `st` sont celles du programme précédent.

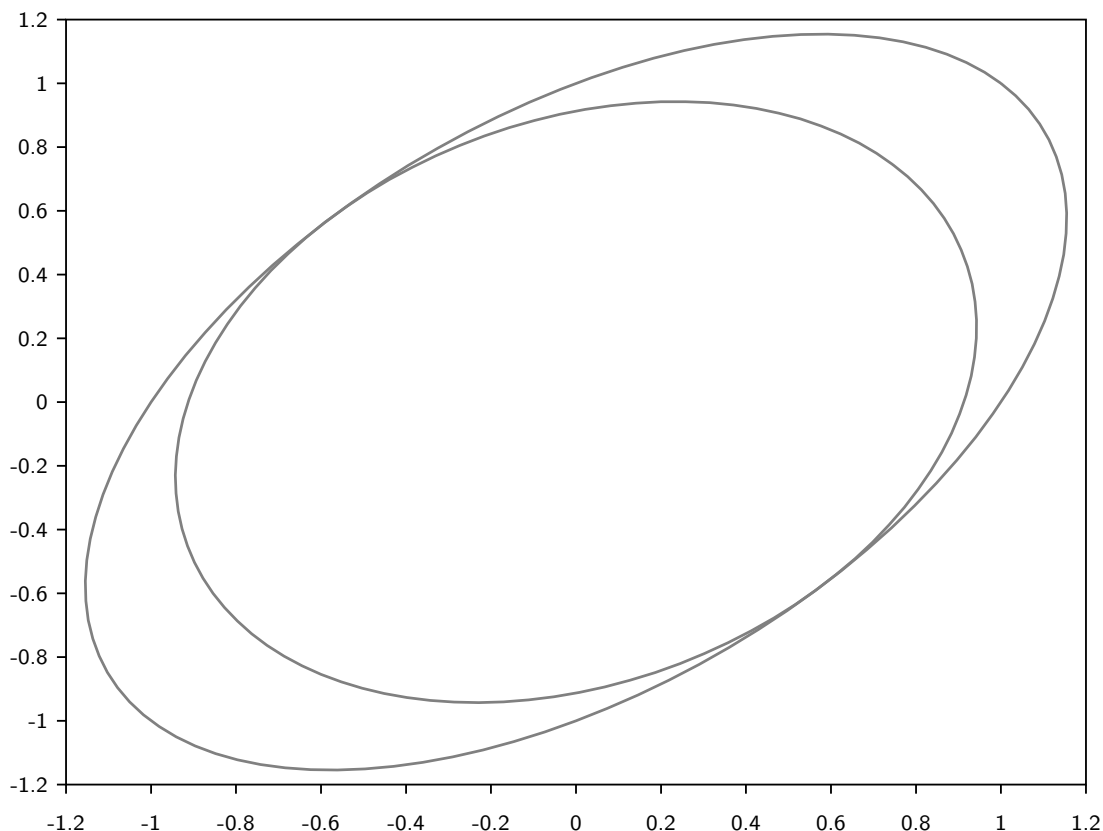
Python

```
Gaz = np.array([np.sqrt(z) * (??? * ct + ??? * st),
                np.sqrt(z) * (??? * ct + ??? * st)]) # (7)

plt.plot(Gaz[0, :], Gaz[1, :]) # (8)

plt.show()
```

- (d) Le graphique suivant a été obtenu avec les deux scripts précédents pour une valeur z_0 affectée à z . Laquelle? Justifier la réponse et préciser pourquoi les deux courbes ont des tangentes communes.



8. Soient $c \in]0, 1[$ et x une solution de (S) à valeurs dans $[c, +\infty[^2$. Pour $t \geq 0$, posons $y_1(t) = x_1(t) - 1$, $y_2(t) = x_2(t) - 1$. Pour $s = \rho/(1 + \rho)$, on note $f(t) = q_s(y_1(t), y_2(t))$.

(a) Vérifier que, pour tout $t \geq 0$,

$$f'(t) = -2(1 + \rho) (x_1(t)(y_1(t) - sy_2(t))^2 + x_2(t)(y_2(t) - sy_1(t))^2).$$

(b) En déduire que, pour $r = 2s/(1 + s^2)$ et tout $t \geq 0$,

$$f'(t) \leq -2c \frac{1-s}{1-r} q_r(y_1(t), y_2(t)).$$

(c) Justifier que $f'(t) \leq -2cf(t)$ pour tout $t \geq 0$. En déduire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

9. Quelle propriété déduit-on de cette étude pour toute solution de (S) dont chacune des composantes admet un minorant strictement positif?

Partie III. Pilotage pas à pas dans un contexte aléatoire

On suppose $p \geq 2$. Soient $A \neq 0$ une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^p$. La suite $(x(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par son terme initial et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X(n+1) = AX(n) + B.$$

On appelle équilibre du système piloté pas à pas par (A, b) tout $x^* \in \mathbb{R}^p$ tel que $X^* = AX^* + B$.

On suppose qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ inversible tel que $D = Q^{-1}AQ$ soit diagonale, de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tous dans $] -1, 1[$.

10. Montrer que le système admet un unique équilibre x^* .

La perturbation aléatoire rend les coordonnées de x^* inconnues, à estimer à partir de vecteurs aléatoires observés $y(n) = (y_1(n), \dots, y_p(n))$.

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, centrées, admettant chacune un moment d'ordre 2. On note $v_n = V(U_n)$.

Pour $x(0) \in \mathbb{R}^p$ fixé, la suite est définie par

$$Y(1) = (A + U_1 I_p)X(0) + B, \quad \forall n \geq 1, \quad Y(n+1) = (A + U_{n+1} I_p)Y(n) + B,$$

où $Y(n)$ est la colonne des coordonnées $y_k(n)$.

11. On note $E(y(n)) = (E(y_1(n)), \dots, E(y_p(n)))$ et $E(Y(n))$ sa colonne de coordonnées.

(a) Calculer $E(Y(1))$ et justifier, pour $n \geq 1$,

$$E(Y(n+1)) - X^* = A(E(Y(n)) - X^*).$$

(b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(y(n)) = x^*$.

12. Pour $n \geq 1$, on définit $Z(n) = Q^{-1}Y(n)$, colonne du vecteur aléatoire $z(n)$.

(a) Montrer, pour $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq p$,

$$V(z_k(n+1)) = (\lambda_k^2 + v_{n+1})V(z_k(n)) + v_{n+1}(E(z_k(n)))^2.$$

(b) Si $v_n \rightarrow 0$, en déduire qu'il existe $c_k \in]0, 1[$, $N \geq 1$ et $M_k > 0$ tels que, pour tout $n \geq N$,

$$V(z_k(n+1)) \leq c_k V(z_k(n)) + M_k v_{n+1}.$$

13. On suppose que la série de terme général v_n converge. Soit $1 \leq k \leq p$. Avec les notations de 12(b), posons pour $m \in \mathbb{N}$

$$\alpha_m = V(z_k(N+m)), \quad w_m = M_k v_{N+m+1}.$$

(a) Montrer, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{m+1} \leq c_k^{m+1} \alpha_0 + \sum_{j=0}^m w_j c_k^{m-j}.$$

(b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(z_k(n)) = 0$.

(c) Montrer que $(y_k(n))_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers x_k^* .

Grâce à 11(b) et 13(c), $(y(n))$ fournit des estimateurs des coordonnées de x^* asymptotiquement sans biais et convergents.