



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2015

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Résultat admis dans cette version adaptée (préambule). Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et toute fonction g continue et croissante sur $[0, 1]$, la fonction $x \mapsto g(S_X(x))$ est intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}_+$, avec les propriétés usuelles de l'intégrale (linéarité, Chasles, positivité, croissance, changement de variable affine), et ses intégrales sur $[0, +\infty[$ sont définies par passage à la limite. Ce résultat permet de manipuler $\int_0^A S_X(x) dx$ et $\int_0^A g(S_X(x)) dx$ pour des variables qui ne sont ni discrètes ni à densité (par exemple $X + Y$ en partie III) ; pour les variables étudiées dans les questions 1) à 6), les fonctions intégrées sont continues ou en escalier et le cours suffit.

Rappel utilisé dans tout le corrigé. Si ϕ est une fonction positive sur $[0, +\infty[$, intégrable sur tout segment, la fonction $A \mapsto \int_0^A \phi(x) dx$ est croissante ; par le théorème de la limite monotone, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \phi(x) dx$ converge si et seulement si cette fonction est majorée. On en déduit le critère de comparaison : si $0 \leq \phi \leq \chi$ et si $\int_0^{+\infty} \chi$ converge, alors $\int_0^{+\infty} \phi$ converge et $\int_0^{+\infty} \phi \leq \int_0^{+\infty} \chi$.

Partie I. Probabilité de dépassement et espérance

1) a) On calcule S_X , puis l'intégrale, et on compare à l'espérance de la loi exponentielle.

La fonction de répartition de X est $F(x) = 0$ si $x < 0$ et $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$. Comme $S_X(x) = P([X > x]) = 1 - F(x)$, on a $S_X(x) = e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$.

Pour $A > 0$:

$$\int_0^A S_X(x) dx = \int_0^A e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^A = \frac{1 - e^{-\lambda A}}{\lambda}$$

Comme $\lambda > 0$, $e^{-\lambda A} \rightarrow 0$ quand $A \rightarrow +\infty$: l'intégrale converge et vaut $\frac{1}{\lambda}$. Or, d'après le cours, X admet une espérance et $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Conclusion

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \int_0^{+\infty} S_X(x) dx.$$

- b) La fonction F est nulle sur $] -\infty, 0[$. Sur $[0, +\infty[$, elle vaut $1 - e^{-\lambda x}$: elle est continue, de classe C^2 , avec $F'(x) = \lambda e^{-\lambda x} > 0$ et $F''(x) = -\lambda^2 e^{-\lambda x} < 0$. Elle est donc strictement croissante et concave sur $[0, +\infty[$, part de $F(0) = 0$ avec une demi-tangente à droite de pente λ (alors que la pente est nulle à gauche de 0), et admet la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$, la courbe restant sous cette asymptote.

Interprétation. Pour $x \geq 0$, $S_X(x) = 1 - F(x)$ est la longueur du segment vertical qui joint le point $(x, F(x))$ de la courbe au point $(x, 1)$ de l'asymptote. Par a),

$E(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(x)) dx$ est donc l'aire (finie) du domaine non borné $\{(x, y); x \geq 0, F(x) \leq y \leq 1\}$, compris entre l'axe des ordonnées, la droite $y = 1$ et la courbe de F .

On peut remarquer que la tangente en 0, d'équation $y = \lambda x$, coupe l'asymptote au point d'abscisse $\frac{1}{\lambda} = E(X)$.

Conclusion

$E(X)$ est l'aire comprise entre la courbe de F , son asymptote $y = 1$ et l'axe des ordonnées.

- 2) a) La fonction h est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$; l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $(x+1)(x+2) \sim x^2$, donc $h(x) \sim \frac{1}{x^2}$. L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge. Par le critère d'équivalence pour les fonctions positives, $\int_1^{+\infty} h(x) dx$ converge; l'intégrale $\int_0^1 h(x) dx$ est celle d'une fonction continue sur un segment.

Conclusion

l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(x) dx$ converge.

b) Pour $x \geq 0$:

$$\frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2} = \frac{(c+d)x + 2c + d}{(x+1)(x+2)}$$

Il suffit donc que $c + d = 0$ et $2c + d = 1$, soit $c = 1$ et $d = -1$. Réciproquement,

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{(x+2) - (x+1)}{(x+1)(x+2)} = h(x).$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ sur $\mathbb{R}_+$ (où $x+1 > 0$ et $x+2 > 0$) est $x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x+2)$.

Conclusion

$c = 1, d = -1$, et $H : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}_+$.

c) On vérifie la positivité, la continuité sauf en un nombre fini de points, et l'intégrale égale à 1.

La fonction f_0 est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $] -\infty, 0[$ (nulle) et sur $[0, +\infty[$ (quotient de fonctions continues à dénominateur non nul) : elle est continue sauf peut-être en 0.

L'intégrale $\int_{-\infty}^0 f_0(x) dx$ converge et vaut 0. Pour $A > 0$, d'après b) :

$$\int_0^A f_0(x) dx = \frac{1}{\ln 2} (H(A) - H(0)) = \frac{1}{\ln 2} \left(\ln\left(\frac{A+1}{A+2}\right) + \ln 2 \right)$$

Comme $\frac{A+1}{A+2} \rightarrow 1$ quand $A \rightarrow +\infty$ et que $\ln$ est continue en 1,

$$\int_0^A f_0(x) dx \rightarrow \frac{1}{\ln 2}(0 + \ln 2) = 1.$$

Conclusion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) dx \text{ converge et vaut } 1; f_0 \text{ est une densité de probabilité.}$$

3) a) La variable X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f_0(x) dx$ converge.

Comme f_0 est nulle sur $] -\infty, 0[$, cela revient à la convergence de $\int_0^{+\infty} x f_0(x) dx$, intégrale d'une fonction continue et positive sur $[0, +\infty[$, impropre seulement en $+\infty$.

Méthode 1 — Équivalent.

Quand $x \rightarrow +\infty$:

$$x f_0(x) = \frac{x}{(x+1)(x+2) \ln 2} \sim \frac{x}{x^2 \ln 2} = \frac{1}{x \ln 2}$$

L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge. Les fonctions étant positives, le critère d'équivalence montre que $\int_1^{+\infty} x f_0(x) dx$ diverge.

Méthode 2 — Calcul explicite d'une primitive.

Pour $x \geq 0$, $\frac{x}{(x+1)(x+2)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$ (en effet $-(x+2) + 2(x+1) = x$). Pour $A > 0$:

$$\int_0^A x f_0(x) dx = \frac{1}{\ln 2} [2 \ln(x+2) - \ln(x+1)]_0^A = \frac{1}{\ln 2} \left(\ln \left(\frac{(A+2)^2}{A+1} \right) - 2 \ln 2 \right)$$

Or $\frac{(A+2)^2}{A+1} \geq \frac{(A+2)(A+1)}{A+1} = A+2 \rightarrow +\infty$, donc l'intégrale partielle tend vers $+\infty$.

La méthode 1 est la plus rapide et ne demande que le comportement à l'infini ; la méthode 2 donne en plus la vitesse de divergence ($\int_0^A x f_0(x) dx \sim \frac{\ln A}{\ln 2}$) mais exige une décomposition explicite, possible ici parce que la fonction est rationnelle.

Conclusion

X n'admet pas d'espérance.

b) Si $x < 0$: X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, donc $[X > x] = \Omega$ et $S_X(x) = 1$.

Si $x \geq 0$: $S_X(x) = P([X > x]) = \int_x^{+\infty} f_0(t) dt$. Pour $A > x$,

$\int_x^A f_0(t) dt = \frac{1}{\ln 2} (H(A) - H(x))$ et $H(A) \rightarrow 0$ quand $A \rightarrow +\infty$. Donc :

$$S_X(x) = -\frac{H(x)}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{x+2}{x+1} \right) = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(1 + \frac{1}{x+1} \right)$$

Équivalent. Quand $x \rightarrow +\infty$, $u = \frac{1}{x+1} \rightarrow 0$ et $\ln(1+u) \sim u$, donc

$$S_X(x) \sim \frac{1}{(x+1) \ln 2} \sim \frac{1}{x \ln 2}.$$

Conclusion

$S_X(x) = 1$ si $x < 0$, $S_X(x) = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{x+2}{x+1} \right)$ si $x \geq 0$, et $S_X(x) \sim \frac{1}{x \ln 2}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

- c) La fonction S_X est continue et positive sur $[0, +\infty[$; l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$. D'après b), $S_X(x) \sim \frac{1}{x \ln 2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge. Par le critère d'équivalence pour les fonctions positives, $\int_1^{+\infty} S_X(x) dx$ diverge.

Conclusion

l'intégrale $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ diverge, ce qui est cohérent avec a) et avec la question 5) f) (f_0 est continue sur $]0, +\infty[$ et nulle sur $] - \infty, 0[$).

- 4) a) Monotonie. Si $x \leq y$, alors $[X > y] \subset [X > x]$, donc $S_X(y) \leq S_X(x)$ par croissance de P : S_X est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Limite. La fonction S_X est décroissante et minorée par 0; par le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie $\ell \geq 0$ en $+\infty$, et par composition avec la suite (n) qui tend vers $+\infty$, $S_X(n) \rightarrow \ell$. Les événements $A_n = [X > n]$ forment une suite décroissante et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ (pour tout ω , $X(\omega) \leq n$ dès que $n \geq X(\omega)$). Par continuité monotone, $S_X(n) = P(A_n) \rightarrow P(\emptyset) = 0$.

Conclusion

S_X est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_X(x) = 0$.

- b) Continuité à droite. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction S_X étant décroissante, elle admet une limite à droite ℓ_x en x (théorème de la limite monotone), et $S_X\left(x + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \ell_x$. Les événements $B_n = \left[X > x + \frac{1}{n}\right]$ forment une suite croissante et $\bigcup_{n \geq 1} B_n = [X > x]$: si $X(\omega) > x$, alors $X(\omega) > x + \frac{1}{n}$ pour n assez grand, et l'inclusion inverse est claire. Par continuité monotone, $P(B_n) \rightarrow P([X > x]) = S_X(x)$. Donc $\ell_x = S_X(x)$.

Continuité en 0. Pour $x < 0$, $[X > x] = \Omega$ puisque X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$; donc S_X est constante égale à 1 sur $] - \infty, 0[$ et sa limite à gauche en 0 vaut 1. Comme S_X est continue à droite en 0, elle est continue en 0 si et seulement si $S_X(0) = 1$. Or $P([X \geq 0]) = 1$, donc $S_X(0) = P([X > 0]) = 1 - P([X = 0])$.

Conclusion

S_X est continue à droite en tout point ; elle est continue en 0 si et seulement si $P([X = 0]) = 0$.

- 5) a) Notons F la fonction de répartition de X , de sorte que $S_X = 1 - F$. D'après le cours, la fonction de répartition d'une variable à densité est continue sur $\mathbb{R}$, donc S_X est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $x > 0$, $F(x) = F(1) + \int_1^x f(t) dt$. Comme f est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$, le théorème fondamental de l'analyse montre que $x \mapsto \int_1^x f(t) dt$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, de dérivée f .

Conclusion

S_X est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ avec $S'_X(x) = -f(x)$ pour $x > 0$.

- b) La fonction $x \mapsto xf(x)$ est continue sur $]0, 1]$; l'intégrale n'est impropre qu'en 0. Pour $x \in]0, 1]$, $0 \leq xf(x) \leq f(x)$. Comme f est une densité, $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge, donc $\int_0^1 f(x) dx$ converge. Par comparaison de fonctions positives, $\int_0^1 xf(x) dx$ converge.

Conclusion

l'intégrale $\int_0^1 xf(x) dx$ est convergente (et de même $\int_0^A xf(x) dx$ pour tout $A \geq 0$, puisque sur $[1, A]$ la fonction est continue).

- c) Pour $A = 0$, les deux membres sont nuls. Soit $A > 0$. On intègre par parties sur un segment $[\varepsilon, A]$ avec $0 < \varepsilon < A$, puis on fait tendre ε vers 0.

Les fonctions $x \mapsto x$ et S_X sont de classe C^1 sur $[\varepsilon, A]$ (par a)), avec $S'_X = -f$. Donc :

$$\int_{\varepsilon}^A S_X(x) dx = [xS_X(x)]_{\varepsilon}^A - \int_{\varepsilon}^A x(-f(x)) dx = AS_X(A) - \varepsilon S_X(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^A xf(x) dx$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$:

- S_X est continue sur le segment $[0, A]$, donc $\int_{\varepsilon}^A S_X(x) dx \rightarrow \int_0^A S_X(x) dx$;
- $0 \leq \varepsilon S_X(\varepsilon) \leq \varepsilon$, donc $\varepsilon S_X(\varepsilon) \rightarrow 0$;
- par b), $\int_{\varepsilon}^A xf(x) dx \rightarrow \int_0^A xf(x) dx$.

Conclusion

$$\text{pour tout } A \geq 0, \quad \int_0^A S_X(x) dx = AS_X(A) + \int_0^A xf(x) dx.$$

d) Supposons que $I = \int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ converge. Comme $S_X \geq 0$, on a

$$\int_0^A S_X(x) dx \leq I \text{ pour tout } A \geq 0. \text{ Comme } AS_X(A) \geq 0, \text{ la relation c) donne :}$$

$$\int_0^A xf(x) dx \leq \int_0^A S_X(x) dx \leq I$$

La fonction $A \mapsto \int_0^A xf(x) dx$ est croissante (intégrande positive) et majorée : par le

théorème de la limite monotone, $\int_0^{+\infty} xf(x) dx$ converge. Comme f est nulle sur

$$]-\infty, 0], \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x) dx = \int_0^{+\infty} xf(x) dx \text{ converge.}$$

Conclusion

X admet une espérance.

- e) Supposons que X admette une espérance : $\int_0^{+\infty} xf(x) dx$ converge, donc aussi $\int_A^{+\infty} xf(x) dx$ pour tout $A \geq 0$. Pour $x \geq A$, $xf(x) \geq Af(x)$ car $f \geq 0$. Les intégrales $\int_A^{+\infty} f$ et $\int_A^{+\infty} xf$ convergent, la croissance de l'intégrale donne :

$$\int_A^{+\infty} xf(x) dx \geq A \int_A^{+\infty} f(x) dx = AP([X > A]) = AS_X(A)$$

Conclusion

pour tout $A \geq 0$, $\int_A^{+\infty} xf(x) dx \geq AS_X(A)$.

- f) Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ converge, X admet une espérance par d).

Réciproquement, supposons que X admette une espérance. Par e) :

$$0 \leq AS_X(A) \leq \int_A^{+\infty} xf(x) dx = E(X) - \int_0^A xf(x) dx$$

Le membre de droite est le reste d'une intégrale convergente, il tend vers 0 quand $A \rightarrow +\infty$; par encadrement, $AS_X(A) \rightarrow 0$. La relation c) donne alors :

$$\int_0^A S_X(x) dx = AS_X(A) + \int_0^A xf(x) dx \rightarrow 0 + E(X)$$

Conclusion

X admet une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ converge, et dans ce cas $E(X) = \int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ [1].

- 6) a) Comme X est à valeurs entières, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[X > k] = [X \geq k + 1]$, donc $S_X(k) = P([X \geq k + 1])$.

Méthode 1 — Récurrence sur n .

Pour $n = 0$: le membre de gauche vaut $S_X(0) = P([X \geq 1])$ et le membre de droite $1 \times P([X \geq 1]) + 0 \times P([X = 0]) = P([X \geq 1])$.

Supposons l'égalité vraie au rang n . Comme $[X \geq n + 1]$ est la réunion disjointe de $[X = n + 1]$ et de $[X \geq n + 2]$, $P([X \geq n + 1]) = P([X = n + 1]) + P([X \geq n + 2])$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} S_X(k) &= (n+1)P([X \geq n+1]) + \sum_{k=0}^n kP([X = k]) + P([X \geq n+2]) \\ &= (n+1)P([X = n+1]) + (n+2)P([X \geq n+2]) + \sum_{k=0}^n kP([X = k]) \\ &= (n+2)P([X \geq n+2]) + \sum_{k=0}^{n+1} kP([X = k]) \end{aligned}$$

C'est l'égalité au rang $n + 1$.

Méthode 2 — Intversion de sommes finies.

Pour $0 \leq k \leq n$, l'événement $[X \geq k + 1]$ est la réunion disjointe de $[X \geq n + 1]$ et des $[X = j]$ pour $k + 1 \leq j \leq n$, donc :

$$S_X(k) = P([X \geq n + 1]) + \sum_{j=k+1}^n P([X = j])$$

En sommant pour k de 0 à n , puis en regroupant les couples (k, j) tels que $0 \leq k < j \leq n$ selon la valeur de j (pour j fixé dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, il y a j valeurs de k) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n S_X(k) &= (n + 1)P([X \geq n + 1]) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{j-1} P([X = j]) = (n + 1)P([X \geq n + 1]) \\ &+ \sum_{j=1}^n jP([X = j]) \end{aligned}$$

et le terme $j = 0$ peut être ajouté puisqu'il est nul.

La méthode 1 vérifie une formule donnée; la méthode 2 la construit, en comptant combien de fois chaque $P([X = j])$ apparaît : c'est la démarche à retenir pour retrouver des formules du type

$$E(X) = \sum P([X > k]).$$

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n S_X(k) = (n + 1)P([X \geq n + 1]) + \sum_{k=0}^n kP([X = k]).$$

- b) Supposons que la série de terme général $S_X(n)$ (positif) converge, de somme σ . Pour tout n , d'après a) et la positivité de $(n+1)P([X \geq n+1])$:

$$\sum_{k=0}^n kP([X = k]) \leq \sum_{k=0}^n S_X(k) \leq \sigma$$

La série de terme général positif $kP([X = k])$ a des sommes partielles majorées, donc elle converge, et absolument puisque ses termes sont positifs.

Conclusion

X admet une espérance.

- c) Supposons que X admette une espérance, c'est-à-dire que la série de terme général $kP([X = k])$ converge. L'événement $[X \geq n+1]$ est la réunion disjointe des $[X = k]$ pour $k \geq n+1$; par σ -additivité,

$$P([X \geq n+1]) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P([X = k]).$$

Comme $(n+1) \leq k$ pour ces indices :

$$0 \leq (n+1)P([X \geq n+1]) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n+1)P([X = k]) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP([X = k])$$

Le majorant est le reste d'une série convergente, il tend vers 0. Par encadrement, $(n+1)P([X \geq n+1]) \rightarrow 0$, et a) donne :

$$\sum_{k=0}^n S_X(k) \rightarrow 0 + \sum_{k=0}^{+\infty} kP([X = k]) = E(X)$$

Avec b), on obtient l'équivalence; et lorsque la série converge, X admet une espérance

(b) donc la limite ci-dessus s'applique.

Conclusion

X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $S_X(n)$ converge, et alors

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_X(n).$$

d) (i) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [k, k+1[$. Comme X est à valeurs entières, $X(\omega) > x$ équivaut à $X(\omega) \geq k+1$, c'est-à-dire à $X(\omega) > k$. Donc $S_X(x) = S_X(k)$: la fonction S_X est constante sur $[k, k+1[$. Sur le segment $[k, k+1]$, elle coïncide avec la constante $S_X(k)$ sauf peut-être au point $k+1$, ce qui ne change pas l'intégrale d'une fonction en escalier : $\int_k^{k+1} S_X(x) dx = S_X(k)$. Par la relation de Chasles :

$$\int_0^N S_X(x) dx = \sum_{k=0}^{N-1} S_X(k)$$

(les deux membres étant nuls pour $N = 0$).

Conclusion

$\int_0^N S_X(x) dx$ est la somme partielle d'indice $N-1$ de la série de terme général $S_X(n)$.

(ii) Soit $A \geq 0$ et $N = \lfloor A \rfloor$, de sorte que $N \leq A < N+1$. Comme $S_X \geq 0$, la croissance de l'intégrale et (i) donnent :

$$\sum_{k=0}^{N-1} S_X(k) \leq \int_0^A S_X(x) dx \leq \sum_{k=0}^N S_X(k)$$

Notons

$$\sigma_m = \sum_{k=0}^m S_X(k);$$

par c), $\sigma_m \rightarrow E(X)$. Soit $\eta > 0$; il existe m_0 tel que $|\sigma_m - E(X)| \leq \eta$ pour $m \geq m_0$. Pour $A \geq m_0 + 1$, on a $N - 1 \geq m_0$, donc les deux bornes de l'encadrement sont dans

$[E(X) - \eta, E(X) + \eta]$, et $\int_0^A S_X(x) dx$ aussi.

Conclusion

$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A S_X(x) dx = E(X)$: la relation [1] vaut aussi pour les variables à valeurs dans $\mathbb{N}$ ayant une espérance.

Résultat admis dans cette version adaptée. Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ converge, X admet une espérance égale à cette intégrale (pour une variable ni discrète ni à densité, cette égalité sert de définition de $E(X)$). Ce résultat sert en 11) a), où X est une variable quelconque possédant une espérance corrigée.

Partie II. Fonctions de distorsion et espérances corrigées : un exemple

- 7) a) La fonction Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée φ continue et strictement positive : Φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme fonction de répartition, $\lim_{-\infty} \Phi = 0$ et $\lim_{+\infty} \Phi = 1$. Par le théorème de la bijection, Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$ (intervalle ouvert car les limites ne sont pas atteintes par une fonction strictement croissante).

Propriétés de Ψ utilisées ensuite. La réciproque Ψ est continue et strictement croissante sur $]0, 1[$; comme Φ' ne s'annule pas, Ψ est dérivable sur $]0, 1[$ et $\Psi'(y) = \frac{1}{\varphi(\Psi(y))}$.

Comme Ψ est croissante et que son image est $\mathbb{R}$ tout entier, $\Psi(y) \rightarrow -\infty$ quand $y \rightarrow 0^+$ et $\Psi(y) \rightarrow +\infty$ quand $y \rightarrow 1^-$ (pour tout réel M , si $y_0 = \Phi(M)$, alors $\Psi(y) < M$ pour $y < y_0$, et $\Psi(y) > M$ pour $y > y_0$). Enfin, par parité de φ , $\Phi(0) = \frac{1}{2}$, donc $\Psi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,

et $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$ pour tout réel t .

Conclusion

Φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

b) Sur $]0, 1[$, $w_\alpha = \Phi \circ (\Psi - \Psi(\alpha))$ est la composée de fonctions continues et dérivables (Ψ sur $]0, 1[$, Φ sur $\mathbb{R}$) : elle est continue et dérivable sur $]0, 1[$.

En 0 : quand $x \rightarrow 0^+$, $\Psi(x) - \Psi(\alpha) \rightarrow -\infty$ et $\Phi(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow -\infty$, donc $w_\alpha(x) \rightarrow 0 = w_\alpha(0)$. En 1 : quand $x \rightarrow 1^-$, $\Psi(x) - \Psi(\alpha) \rightarrow +\infty$ et $\Phi(t) \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow +\infty$, donc $w_\alpha(x) \rightarrow 1 = w_\alpha(1)$.

Conclusion

w_α est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.

c) Pour $x \in]0, 1[$, la dérivation d'une composée donne :

$$w'_\alpha(x) = \Psi'(x) \varphi(\Psi(x) - \Psi(\alpha)) = \frac{\varphi(\Psi(x) - \Psi(\alpha))}{\varphi(\Psi(x))}$$

Posons $u = \Psi(x)$ et $a = \Psi(\alpha)$. Alors :

$$\frac{\varphi(u - a)}{\varphi(u)} = \exp\left(-\frac{(u - a)^2}{2} + \frac{u^2}{2}\right) = \exp\left(au - \frac{a^2}{2}\right)$$

Conclusion

pour tout $x \in]0, 1[$, $w'_\alpha(x) = \exp\left(\Psi(\alpha)\Psi(x) - \frac{(\Psi(\alpha))^2}{2}\right)$.

d) On a $w_\alpha(\alpha) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$ et, par c),

$$w'_\alpha(\alpha) = \exp\left((\Psi(\alpha))^2 - \frac{(\Psi(\alpha))^2}{2}\right) = e^{\frac{(\Psi(\alpha))^2}{2}}.$$

Conclusion

la tangente au point d'abscisse α a pour équation $y = \frac{1}{2} + e^{\frac{(\Psi(\alpha))^2}{2}}(x - \alpha).$

e) On vérifie les cinq propriétés de la définition.

- Continuité sur $[0, 1]$: c'est b).
- $w_\alpha(0) = 0$ et $w_\alpha(1) = 1$ par définition.
- Croissance : par c), $w'_\alpha > 0$ sur $]0, 1[$, donc w_α est strictement croissante sur $]0, 1[$; de plus, pour $x \in]0, 1[$, $w_\alpha(x) \in]0, 1[$ (valeur de Φ), donc $w_\alpha(0) = 0 < w_\alpha(x) < 1 = w_\alpha(1)$. Ainsi w_α est croissante sur $[0, 1]$.
- Concavité sur $]0, 1[$: comme $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ et que Ψ est strictement croissante, $a = \Psi(\alpha) < \Psi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. La fonction $x \mapsto a\Psi(x) - \frac{a^2}{2}$ est donc strictement décroissante sur $]0, 1[$, et par croissance de l'exponentielle w'_α est strictement décroissante sur $]0, 1[$. Une fonction dérivable sur un intervalle dont la dérivée est décroissante y est concave.

Conclusion

w_α est une fonction de distorsion.

8) a) Comme X a même loi que e^Y , X admet une espérance si et seulement si e^Y en admet une, et elles sont alors égales. Une densité de Y est $y \mapsto \varphi(y - \mu)$. Par le théorème de transfert, e^Y admet une espérance si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^y \varphi(y - \mu) dy \text{ converge (l'intégrande est positive).}$$

On complète le carré : $(y - \mu)^2 - 2y = y^2 - 2(\mu + 1)y + \mu^2 = (y - \mu - 1)^2 - 2\mu - 1$. Donc :

$$e^y \varphi(y - \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y - \mu)^2 - 2y}{2}\right) = e^{\mu + \frac{1}{2}} \varphi(y - \mu - 1)$$

Or $y \mapsto \varphi(y - \mu - 1)$ est une densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu + 1, 1)$, d'intégrale convergente égale à 1.

Conclusion

$$X \text{ admet une espérance et } E(X) = e^{\mu + \frac{1}{2}}.$$

b) Soit $x > 0$. Comme X a même loi que e^Y et que $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} S_X(x) &= P([e^Y > x]) = P([Y > \ln x]) = P([Y - \mu > \ln x - \mu]) = 1 - \Phi(\ln x - \mu) \\ &= \Phi(\mu - \ln x) \end{aligned}$$

car $Y - \mu$ suit la loi normale centrée réduite et $1 - \Phi(t) = \Phi(-t)$. En particulier $S_X(x) \in]0, 1[$, donc :

$$w_\alpha(S_X(x)) = \Phi(\Psi(\Phi(\mu - \ln x)) - \Psi(\alpha)) = \Phi(\mu - \ln x - \Psi(\alpha))$$

D'autre part, en appliquant la formule précédente au réel $xe^{\Psi(\alpha)} > 0$:

$$P([Xe^{-\Psi(\alpha)} > x]) = P([X > xe^{\Psi(\alpha)}]) = \Phi(\mu - \ln x - \Psi(\alpha))$$

Conclusion

pour tout $x > 0$, $w_\alpha(S_X(x)) = P([Xe^{-\Psi(\alpha)} > x])$.

- c) Posons $X' = Xe^{-\Psi(\alpha)}$ et $\mu' = \mu - \Psi(\alpha)$. La variable X' a même loi que $e^{Y-\Psi(\alpha)}$, et $Y' = Y - \Psi(\alpha)$ suit la loi normale d'espérance μ' et d'écart-type 1.

Égalité des intégrandes. Par b), $w_\alpha(S_X(x)) = S_{X'}(x)$ pour $x > 0$; en $x = 0$, les deux valent 1 puisque $P([X > 0]) = P([X' > 0]) = P([e^Y > 0]) = 1$ et $w_\alpha(1) = 1$. Donc $w_\alpha \circ S_X = S_{X'}$ sur $[0, +\infty[$.

Densité de X' . Pour $x \leq 0$, $P([X' \leq x]) = 0$; pour $x > 0$, $P([X' \leq x]) = P([Y' \leq \ln x]) = \Phi(\ln x - \mu')$. Cette fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ (en 0, $\ln x \rightarrow -\infty$ et $\Phi \rightarrow 0$) et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$; X' admet donc la densité f nulle sur $] -\infty, 0]$ et définie par $f(x) = \frac{1}{x} \varphi(\ln x - \mu')$ pour $x > 0$, continue sur $]0, +\infty[$.

Conclusion du calcul. Par a) appliqué à Y' , X' admet une espérance égale à $e^{\mu' + \frac{1}{2}}$. Par 5) f), $\int_0^{+\infty} S_{X'}(x) dx$ converge et vaut $E(X')$. Donc $\int_0^{+\infty} w_\alpha(S_X(x)) dx$ converge et :

$$E_{w_\alpha}(X) = E(X') = e^{\mu - \Psi(\alpha) + \frac{1}{2}} = e^{-\Psi(\alpha)} E(X)$$

Conclusion

$E_{w_\alpha}(X)$ existe et vaut $e^{\mu - \Psi(\alpha) + \frac{1}{2}}$. Comme $-\Psi(\alpha) > 0$, on a $E_{w_\alpha}(X) > E(X)$.

9) Code adapté en Python.

Rappels. L'instruction (1) affecte à qa la valeur $\Psi(\alpha)$, puisque `ndtri(alpha)` est le réel x tel que $\Phi(x) = \alpha$.

- a) Instruction (2) : p est un tableau numpy à une dimension de 97 coefficients régulièrement espacés de 0.02 à 0.98, c'est-à-dire de pas $\frac{0.98 - 0.02}{96} = 0.01$: p

contient $0.02, 0.03, \dots, 0.98$, soit $p_k = \frac{k}{100}$ pour $k \in \llbracket 2, 98 \rrbracket$.

Instruction (3) : `ndtri(p)` est le tableau des $\Psi(p_k)$; on retranche ensuite à chaque coefficient le réel $q_\alpha = \Psi(\alpha)$. Donc `q` est le tableau à une dimension de 97 coefficients $q_k = \Psi(p_k) - \Psi(\alpha)$, pour $k \in \llbracket 2, 98 \rrbracket$.

Conclusion

`p` et `q` sont deux tableaux de taille 97, de coefficients respectifs $\frac{k}{100}$ et $\Psi\left(\frac{k}{100}\right) - \Psi(\alpha)$ pour $k \in \llbracket 2, 98 \rrbracket$.

b) On veut `wa` égal au tableau des $w_\alpha(p_k) = \Phi(\Psi(p_k) - \Psi(\alpha)) = \Phi(q_k)$, puisque $0 < p_k < 1$. Il suffit d'appliquer `Φ`, c'est-à-dire `ndtr`, coefficient par coefficient au tableau `q`. Programme complet :

Python

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

from scipy.special import ndtr, ndtri

for k in range(1, 3):
    alpha = 0.2 * k                                # alpha = 0.2 puis alpha = 0.4
    qa = ndtri(alpha)                               # (1)
    p = np.linspace(0.02, 0.98, 97)                # (2)
    q = ndtri(p) - qa                               # (3)
    wa = ndtr(q)                                    # (4)
    plt.plot(p, wa)                                 # (5)

plt.show()
```

La boucle `for` remplace les deux exécutions successives décrites dans l'énoncé; `plt.plot(p, wa)` relie les points $(p_k, w_\alpha(p_k))$.

Code exécuté (Python 3 avec `numpy`, `scipy` et `matplotlib`). On obtient $q_\alpha \approx -0.8416$ pour $\alpha = 0.2$ et $q_\alpha \approx -0.2533$ pour $\alpha = 0.4$; les tableaux `p` et `q` ont bien 97 coefficients; le

premier coefficient de w_α vaut environ 0.1127 pour $\alpha = 0.2$ et 0.0359 pour $\alpha = 0.4$, ce qui correspond au graphique décrit dans l'énoncé.

Conclusion

la quatrième ligne est $w_\alpha = \text{ndtr}(q)$.

- c) Comme Ψ est strictement croissante, $\Psi(0.2) < \Psi(0.4)$. Pour tout $x \in]0, 1[$,
 $\Psi(x) - \Psi(0.2) > \Psi(x) - \Psi(0.4)$, et Φ étant strictement croissante :

$$w_{0.2}(x) > w_{0.4}(x)$$

La courbe de $w_{0.2}$ est donc strictement au-dessus de celle de $w_{0.4}$ sur $]0, 1[$. On le confirme par une valeur exacte : $w_\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = \Phi(-\Psi(\alpha)) = 1 - \Phi(\Psi(\alpha)) = 1 - \alpha$, soit 0.8 pour $\alpha = 0.2$ et 0.6 pour $\alpha = 0.4$.

Conclusion

la valeur $\alpha = 0.2$ correspond à la courbe supérieure.

- d) On étudie les limites de w'_α aux bornes de $]0, 1[$, puis on conclut par les accroissements finis.

Limites de la dérivée. Notons $a = \Psi(\alpha) < 0$ (vu en 7) e)). Par 7) a) :

- quand $x \rightarrow 0^+$, $\Psi(x) \rightarrow -\infty$, donc $a\Psi(x) \rightarrow +\infty$ et

$$w'_\alpha(x) = \exp\left(a\Psi(x) - \frac{a^2}{2}\right) \rightarrow +\infty;$$

- quand $x \rightarrow 1^-$, $\Psi(x) \rightarrow +\infty$, donc $a\Psi(x) \rightarrow -\infty$ et $w'_\alpha(x) \rightarrow 0$.

Tangente en $(1, 1)$. La fonction w_α est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, dérivable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et $w'_\alpha(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 1^-$. Par le théorème du prolongement de la dérivée, w_α est dérivable (à gauche) en 1 et $w'_\alpha(1) = 0$: la tangente en $(1, 1)$ est la droite horizontale d'équation $y = 1$.

Tangente en $(0, 0)$. Soit $M > 0$. Il existe $\eta \in]0, 1[$ tel que $w'_\alpha(t) > M$ pour $t \in]0, \eta[$. Pour $x \in]0, \eta[$, l'égalité des accroissements finis sur $[0, x]$ (w_α continue sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$) fournit $c_x \in]0, x[$ tel que :

$$\frac{w_\alpha(x) - w_\alpha(0)}{x - 0} = w'_\alpha(c_x) > M$$

Donc le taux d'accroissement en 0 tend vers $+\infty$: la courbe admet en $(0, 0)$ une tangente verticale, d'équation $x = 0$.

Ces deux résultats valent pour toute valeur de $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, donc pour les deux courbes ; le tracé, limité à $p \in [0.02, 0.98]$, ne les montre pas, mais il suffirait de prendre des abscisses plus proches de 0 et de 1 pour les visualiser.

Conclusion

les deux courbes ont en $(0, 0)$ la tangente verticale $x = 0$ et en $(1, 1)$ la tangente horizontale $y = 1$; on les obtient par la limite de w'_α aux bornes.

e) Quand $\alpha \rightarrow 0^+$, $\Psi(\alpha) \rightarrow -\infty$. Pour $x \in]0, 1[$ fixé, $\Psi(x) - \Psi(\alpha) \rightarrow +\infty$, donc $w_\alpha(x) \rightarrow 1$; de plus $w_\alpha(0) = 0$ et $w_\alpha(1) = 1$ pour tout α .

Les courbes de w_α se rapprochent donc, point par point, de la ligne formée du segment vertical joignant $(0, 0)$ à $(0, 1)$ et du segment horizontal joignant $(0, 1)$ à $(1, 1)$: c'est la courbe de la fonction égale à 0 en 0 et à 1 sur $]0, 1]$, qui n'est pas continue en 0 et n'est donc pas une fonction de distorsion. Avec cette fonction limite, l'espérance corrigée de X serait $\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{S_X(x) > 0\}} dx$, c'est-à-dire la borne supérieure (éventuellement infinie) des réels x tels que $P([X > x]) > 0$, autrement dit la plus grande valeur que X peut atteindre : la correction devient maximale (dans l'exemple de 8) c), $E_{w_\alpha}(X) = e^{-\Psi(\alpha)} E(X) \rightarrow +\infty$.

Conclusion

quand $\alpha \rightarrow 0$, la courbe de w_α tend à épouser l'axe des ordonnées entre $(0, 0)$ et $(0, 1)$ puis la droite $y = 1$ jusqu'à $(1, 1)$.

Partie III. Sous-additivité des espérances corrigées

Remarque préliminaire (variables presque sûrement égales). Si deux variables V et V' sont égales presque sûrement, alors pour tout réel x , les événements $[V > x]$ et $[V' > x]$ ne diffèrent que par un ensemble négligeable, donc $S_V = S_{V'}$ et $E_g(V) = E_g(V')$ (l'une existe si et seulement si l'autre existe). Si $P([V \geq 0]) = 1$, la variable $V^+ = \max(V, 0)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et presque sûrement égale à V . Tous les résultats de l'énoncé s'appliquent donc aux variables presque sûrement positives ; on l'utilise sans le redire pour T, W, U, Z et $Z - 1$.

10) a) Commençons par un lemme : g est concave sur $[0, 1]$ tout entier.

Soit $u, v \in [0, 1]$ et $t \in [0, 1]$. Pour $k \geq 2$, posons $u_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right)u + \frac{1}{2k}$ et $v_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right)v + \frac{1}{2k}$: on a $0 < \frac{1}{2k} \leq u_k \leq 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{2k} < 1$, donc $u_k \in]0, 1[$, de même $v_k \in]0, 1[$, et $u_k \rightarrow u, v_k \rightarrow v$. Par concavité sur $]0, 1[$:

$$g(tu_k + (1-t)v_k) \geq tg(u_k) + (1-t)g(v_k)$$

En faisant tendre k vers $+\infty$ et par continuité de g sur $[0, 1]$, on obtient

$$g(tu + (1-t)v) \geq tg(u) + (1-t)g(v).$$

Application. Soit $x \in [0, 1]$ et $n \geq 1$. Les réels $u = 1 - \frac{1}{n}$ et $v = \frac{1}{n}$ sont dans $[0, 1]$ (et même dans $]0, 1[$ si $n \geq 2$) ; avec $t = x \in [0, 1]$, la concavité de g sur $[0, 1]$ donne exactement l'inégalité demandée.

Conclusion

pour tout $n \geq 1$,

$$g\left(x\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1-x)\frac{1}{n}\right) \geq xg\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1-x)g\left(\frac{1}{n}\right).$$

- b) On fait tendre n vers $+\infty$ dans a), à x fixé. On a $x\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1-x)\frac{1}{n} \rightarrow x$, $1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$ et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Par continuité de g en x , en 1 et en 0, et par passage à la limite dans une inégalité :

$$g(x) \geq xg(1) + (1-x)g(0) = x$$

Conclusion

pour tout $x \in [0, 1]$, $g(x) \geq x$: la courbe d'une fonction de distorsion est au-dessus de la première bissectrice.

- c) Existence de λ . Posons $\lambda = \frac{\varepsilon}{b + \varepsilon - a}$. Comme $b - a > 0$, on a $b + \varepsilon - a > \varepsilon > 0$, donc $\lambda \in]0, 1[$. Alors :

$$\lambda a + (1 - \lambda)(b + \varepsilon) = (b + \varepsilon) - \lambda(b + \varepsilon - a) = b + \varepsilon - \varepsilon = b$$

$$(1 - \lambda)a + \lambda(b + \varepsilon) = a + \lambda(b + \varepsilon - a) = a + \varepsilon$$

(La première équation, affine en λ de coefficient $a - b - \varepsilon \neq 0$, a d'ailleurs cette unique solution.)

Inégalité. Les réels a et $b + \varepsilon$ sont dans $]0, 1[$ et $\lambda \in [0, 1]$. Par concavité de g sur $]0, 1[$:

$$g(b) = g(\lambda a + (1 - \lambda)(b + \varepsilon)) \geq \lambda g(a) + (1 - \lambda)g(b + \varepsilon)$$

$$g(a + \varepsilon) = g((1 - \lambda)a + \lambda(b + \varepsilon)) \geq (1 - \lambda)g(a) + \lambda g(b + \varepsilon)$$

En additionnant : $g(b) + g(a + \varepsilon) \geq g(a) + g(b + \varepsilon)$.

Conclusion

$$g(b + \varepsilon) - g(a + \varepsilon) \leq g(b) - g(a).$$

Extension utilisée en 13). L'inégalité reste vraie pour $0 \leq a \leq b$, $\varepsilon \geq 0$ et $b + \varepsilon \leq 1$. Si $a = b$ ou $\varepsilon = 0$, c'est une égalité. Sinon $0 \leq a < b$ et $\varepsilon > 0$; pour $k \geq 2$, posons $a_k = a + \frac{b-a}{k}$ et $\varepsilon_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\varepsilon$. On a $0 < a_k < b < b + \varepsilon_k < b + \varepsilon \leq 1$, donc par c) $g(b + \varepsilon_k) - g(a_k + \varepsilon_k) \leq g(b) - g(a_k)$; comme $a_k \rightarrow a$ et $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon$, la continuité de g sur $[0, 1]$ permet de passer à la limite.

11) a) Par 10) b) appliqué à $S_X(x) \in [0, 1]$, on a pour tout $x \geq 0$: $0 \leq S_X(x) \leq g(S_X(x))$.

Comme $\int_0^{+\infty} g(S_X(x)) dx$ converge (existence de $E_g(X)$), le critère de comparaison montre que $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} S_X(x) dx \leq E_g(X)$$

Par le résultat admis à la fin de la partie I, X admet une espérance et

$$E(X) = \int_0^{+\infty} S_X(x) dx.$$

Conclusion

$E(X)$ existe et $E(X) \leq E_g(X)$.

- b)** Soit X certaine : X prend la valeur constante c , avec $c \geq 0$ puisque X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Alors $S_X(x) = 1$ si $x < c$ et $S_X(x) = 0$ si $x \geq c$, donc $g(S_X(x)) = g(1) = 1$ sur $[0, c[$ et $g(S_X(x)) = g(0) = 0$ sur $[c, +\infty[$. Pour $A \geq c$:

$$\int_0^A g(S_X(x)) dx = \int_0^c 1 dx + \int_c^A 0 dx = c$$

L'intégrale converge et $E_g(X) = c = E(X)$ (si $c = 0$, l'intégrande est nulle et les deux valent 0).

Conclusion

pour une variable certaine, $E_g(X) = E(X)$.

- c)** Soit $V = rX + s$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Si $0 \leq x < s : V \geq s > x$, donc $S_V(x) = 1$. Si $x \geq s$: comme $r > 0$, $[V > x] = \left[X > \frac{x-s}{r}\right]$, donc $S_V(x) = S_X\left(\frac{x-s}{r}\right)$.

Pour $A > s$, par la relation de Chasles puis le changement de variable affine $u = \frac{x-s}{r}$:

$$\int_0^A g(S_V(x)) dx = \int_0^s g(1) dx + \int_s^A g\left(S_X\left(\frac{x-s}{r}\right)\right) dx = s + r \int_0^{\frac{A-s}{r}} g(S_X(u)) du$$

Quand $A \rightarrow +\infty$, $\frac{A-s}{r} \rightarrow +\infty$ et le dernier terme tend vers $rE_g(X)$.

Conclusion

$$E_g(rX + s) \text{ existe et } E_g(rX + s) = rE_g(X) + s.$$

- d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Sur l'événement presque sûr $\Omega_0 = [0 \leq T \leq W]$, $T > x$ entraîne $W > x$: $[T > x] \cap \Omega_0 \subset [W > x]$. Donc $S_T(x) = P([T > x] \cap \Omega_0) \leq S_W(x)$. Comme g est croissante, $0 \leq g(S_T(x)) \leq g(S_W(x))$ pour tout $x \geq 0$.

Si $E_g(W)$ existe, le critère de comparaison montre que $E_g(T)$ existe aussi, et dans tous les cas où les deux existent, la croissance de l'intégrale donne l'inégalité.

Conclusion

$$E_g(T) \leq E_g(W); \text{ l'espérance corrigée est croissante.}$$

- 12) Existence de $E_g(Y)$ et majoration. Pour $x \geq B$,

$$S_Y(x) = P([Y > x]) \leq P([Y > B]) = 0, \text{ donc } g(S_Y(x)) = g(0) = 0. \text{ Pour } x \in [0, B], \\ 0 \leq g(S_Y(x)) \leq g(1) = 1 \text{ puisque } g \text{ est croissante et } S_Y(x) \in [0, 1]. \text{ Donc pour } A \geq B, \\ \int_0^A g(S_Y(x)) dx = \int_0^B g(S_Y(x)) dx \text{ ne dépend pas de } A : \text{ l'intégrale converge et :}$$

$$E_g(Y) = \int_0^B g(S_Y(x)) dx \leq \int_0^B 1 dx = B$$

Existence de $E_g(X + Y)$ et majoration. Par 11) c) avec $r = 1$ et $s = B$, $E_g(X + B)$ existe et vaut $E_g(X) + B$. Comme $X \geq 0$ et $Y \in [0, B]$ presque sûrement, $P([0 \leq X + Y \leq X + B]) = 1$. Par 11) d) (avec $T = X + Y$ et $W = X + B$), $E_g(X + Y)$ existe et $E_g(X + Y) \leq E_g(X + B)$.

Conclusion

$$E_g(Y) \text{ et } E_g(X + Y) \text{ existent, } E_g(Y) \leq B \text{ et } E_g(X + Y) \leq E_g(X) + B.$$

- 13) a) Soit P une probabilité quelconque sur $(\Omega, \mathcal{A})$, g une fonction de distorsion, X une variable possédant une espérance corrigée par g (pour P) et U telle que

$P([U \in \llbracket 0, 0 \rrbracket]) = 1$, c'est-à-dire $U = 0$ presque sûrement. La question 12), établie pour une probabilité quelconque, s'applique avec $Y = U$ et $B = 0$: $E_g(U)$ existe, $0 \leq E_g(U) \leq 0$, et $E_g(X + U) \leq E_g(X) + 0 = E_g(X) + E_g(U)$.

Conclusion

la propriété est vraie pour $n = 0$.

b) (i) Soit $x > 0$. Comme $P([Z \in \llbracket 0, n + 1 \rrbracket]) = 1$, les événements $[Z = 0]$ et $[Z > 0]$ sont incompatibles et leur réunion est presque sûre. Par la formule des probabilités totales (le terme correspondant à l'événement négligeable restant étant nul) :

$$S_{X+Z}(x) = P([Z = 0] \cap [X + Z > x]) + P([Z > 0] \cap [X + Z > x])$$

Sur $[Z = 0]$, $X + Z = X$, donc le premier terme vaut $P([Z = 0] \cap [X > x])$. Le second vaut $P([Z > 0])P_{[Z > 0]}([X + Z > x]) = p S_{X+Z}^*(x)$, avec $p > 0$.

Conclusion

$$S_{X+Z}(x) = P([Z = 0] \cap [X > x]) + p S_{X+Z}^*(x).$$

(ii) Le même découpage donne :

$$S_X(x) = P([Z = 0] \cap [X > x]) + P([Z > 0] \cap [X > x]) = P([Z = 0] \cap [X > x]) + p S_X^*(x)$$

Comme $x > 0$, $[Z > x] \subset [Z > 0]$, donc :

$$S_Z(x) = P([Z > 0] \cap [Z > x]) = p S_Z^*(x)$$

Conclusion

$$S_X(x) = P([Z = 0] \cap [X > x]) + p S_X^*(x) \text{ et } S_Z(x) = p S_Z^*(x).$$

(iii) Posons $\rho = P([Z = 0] \cap [X > x]) \geq 0$, $a = p S_X^*(x)$ et $b = p S_{X+Z}^*(x)$, de sorte que $S_X(x) = \rho + a$ et $S_{X+Z}(x) = \rho + b$.

Vérifions les hypothèses de l'extension de 10) c) (avec $\varepsilon = \rho$) :

- $0 \leq a \leq b$: sur $[Z > 0]$, $Z \geq 0$, donc $[X > x] \cap [Z > 0] \subset [X + Z > x] \cap [Z > 0]$; en divisant par p , $S_X^*(x) \leq S_{X+Z}^*(x)$;
- $b + \rho = S_{X+Z}(x) \leq 1$.

On obtient $g(\rho + b) - g(\rho + a) \leq g(b) - g(a)$, c'est-à-dire :

$$g(S_{X+Z}(x)) - g(S_X(x)) \leq g(p S_{X+Z}^*(x)) - g(p S_X^*(x))$$

En retranchant aux deux membres $g(S_Z(x)) = g(p S_Z^*(x))$ (d'après (ii)) :

Conclusion

pour tout $x > 0$,

$$g(S_{X+Z}(x)) - g(S_X(x)) - g(S_Z(x)) \leq g(p S_{X+Z}^*(x)) - g(p S_X^*(x)) - g(p S_Z^*(x)).$$

- c) La fonction h est une fonction de distorsion. Par 10) b), $g(p) \geq p > 0$, donc h est bien définie sur $[0, 1]$ (et $px \in [0, p] \subset [0, 1]$).
- h est continue sur $[0, 1]$ comme composée de fonctions continues ;

- h est croissante : si $x \leq y$, $px \leq py$, donc $g(px) \leq g(py)$, et $g(p) > 0$;
- $h(0) = \frac{g(0)}{g(p)} = 0$ et $h(1) = \frac{g(p)}{g(p)} = 1$;
- h est concave sur $]0, 1[$: pour $u, v \in]0, 1[$ et $t \in [0, 1]$, pu et pv sont dans $]0, 1[$ (car $0 < p \leq 1$), et par concavité de g ,
 $g(p(tu + (1-t)v)) = g(tpu + (1-t)pv) \geq tg(pu) + (1-t)g(pv)$; on divise par $g(p) > 0$.

Inégalité. On travaille sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P^*)$: $P^* = P_{[Z>0]}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ car $p > 0$. Pour une variable V , notons $S_V^*(x) = P^*([V > x])$ et $E_h^*(V) = \int_0^{+\infty} h(S_V^*(x)) dx$ (espérance corrigée par h relativement à P^*), sous réserve de convergence. On veut montrer $E_h^*(X + Z) \leq E_h^*(X) + E_h^*(Z)$.

- Existence de $E_h^*(X)$. Pour $x \geq 0$, $p S_X^*(x) = P([X > x] \cap [Z > 0]) \leq S_X(x)$, donc, g étant croissante, $0 \leq h(S_X^*(x)) = \frac{g(p S_X^*(x))}{g(p)} \leq \frac{g(S_X(x))}{g(p)}$. Comme $E_g(X)$ existe, le critère de comparaison donne l'existence de $E_h^*(X)$.
- Loi de Z sous P^* . On a $P^*([Z \in]1, n+1]) = \frac{P([Z \in]1, n+1])}{p} = 1$, car $[Z > 0]$ et $[Z \in]1, n+1])$ ne diffèrent que d'un ensemble négligeable. Donc $U = Z - 1$ vérifie $P^*([U \in]0, n]) = 1$.
- Application de l'hypothèse de récurrence à la probabilité P^* , à la fonction de distorsion h , à la variable $X + 1$ et à la variable U . Par 11) c) (sous P^* , avec $r = 1$, $s = 1$), $E_h^*(X + 1)$ existe et vaut $E_h^*(X) + 1$. L'hypothèse de récurrence donne :

$$E_h^*(X + Z) = E_h^*((X + 1) + U) \leq E_h^*(X + 1) + E_h^*(U) = E_h^*(X) + 1 + E_h^*(U)$$

- Enfin, $E_h^*(U)$ existe par 12) (U est presque sûrement dans $[0, n]$ pour P^*), et 11) c) donne $E_h^*(Z) = E_h^*(U + 1) = E_h^*(U) + 1$. Donc $E_h^*(X + Z) \leq E_h^*(X) + E_h^*(Z)$, toutes ces quantités existant ($E_h^*(X + Z)$ par 12) sous P^*).

Conclusion

h est une fonction de distorsion et

$$\int_0^{+\infty} h(S_{X+Z}^*(x)) dx \leq \int_0^{+\infty} h(S_X^*(x)) dx + \int_0^{+\infty} h(S_Z^*(x)) dx.$$

d) Existence des intégrales. $E_g(X)$ existe par hypothèse ; $E_g(Z)$ et $E_g(X + Z)$ existent par 12), car $Z \in [0, n + 1]$ presque sûrement. En multipliant par $g(p) > 0$, on a

$\int_0^{+\infty} g(p S_V^*(x)) dx = g(p) E_h^*(V)$ pour $V \in \{X, Z, X + Z\}$, ces intégrales convergeant par c).

Intégration de (iii). Soit $0 < \eta < A$. En intégrant l'inégalité (iii), valable pour tout $x > 0$, sur $[\eta, A]$, puis en faisant tendre η vers 0 (chaque intégrande est comprise entre 0 et 1, donc chaque intégrale sur $[0, \eta]$ est majorée par η en valeur absolue) et enfin A vers $+\infty$:

$$E_g(X + Z) - E_g(X) - E_g(Z) \leq g(p) (E_h^*(X + Z) - E_h^*(X) - E_h^*(Z)) \leq 0$$

d'après c). Donc $E_g(X + Z) \leq E_g(X) + E_g(Z)$.

Cas $p = 0$. L'énoncé suppose $p > 0$; si $p = 0$, alors $Z = 0$ presque sûrement, donc $X + Z = X$ presque sûrement, $E_g(X + Z) = E_g(X)$ et $E_g(Z) = 0$ (par 12) avec $B = 0$) : l'inégalité est une égalité.

Conclusion. Pour toute probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$, toute fonction de distorsion g , toute variable X possédant une espérance corrigée par g et toute variable Z telle que $P([Z \in [0, n + 1]]) = 1$, on a $E_g(X + Z) \leq E_g(X) + E_g(Z)$: la propriété est vraie au rang $n + 1$. Il est essentiel que l'hypothèse de récurrence porte sur toutes les probabilités, puisqu'on l'a appliquée à P^* . Par récurrence, l'inégalité [2] est vraie pour toute variable U à valeurs presque sûrement dans un ensemble $[0, n]$.

14) a) Propriétés de Y_n . Comme $Y \geq 0$, $[nY]$ est un entier naturel et $[nY] \leq nY$; donc $0 \leq Y_n \leq Y$, et $P([Y_n \in [0, B]]) = 1$.

Existence. La question 12) appliquée à Y_n (à la place de Y) donne l'existence de $E_g(Y_n)$ et de $E_g(X + Y_n)$.

Inégalité. Posons $m = \lfloor nB \rfloor$ et $U = nY_n = \lfloor nY \rfloor$. Sur l'événement presque sûr $[Y \in [0, B]]$, on a $0 \leq nY \leq nB$, donc $U \in \llbracket 0, m \rrbracket : P([U \in \llbracket 0, m \rrbracket]) = 1$. Par 11) c) (avec $r = n, s = 0$), $E_g(nX)$ existe et vaut $nE_g(X)$. La question 13) appliquée à nX et U donne :

$$E_g(nX + U) \leq E_g(nX) + E_g(U) = nE_g(X) + E_g(U)$$

Comme $X + Y_n = \frac{1}{n}(nX + U)$ et $Y_n = \frac{1}{n}U$, et que $E_g(nX + U)$ et $E_g(U)$ existent (par 12)), 11) c) avec $r = \frac{1}{n}$ et $s = 0$ donne $E_g(X + Y_n) = \frac{1}{n}E_g(nX + U)$ et $E_g(Y_n) = \frac{1}{n}E_g(U)$. En divisant l'inégalité par n :

Conclusion

$$E_g(X + Y_n) \leq E_g(X) + E_g(Y_n).$$

b) Pour $x > 0$, comme $Y_n \leq Y$, on a $[Y_n > x] \subset [Y > x]$. Donc $S_{Y_n}(x) \leq S_Y(x)$ et, par 11) d) (avec $T = Y_n, W = Y, P([0 \leq Y_n \leq Y]) = 1$), les deux espérances corrigées existent par 12) :

Conclusion

$$[Y_n > x] \subset [Y > x] \text{ et } E_g(Y_n) \leq E_g(Y).$$

c) Égalité. $E_g(X + Y)$ existe par 12), donc $\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} g(S_{X+Y}(x)) dx$ converge. Pour $A > 0$, le changement de variable affine $x = u + \frac{1}{n}$ donne :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{A+\frac{1}{n}} g(S_{X+Y}(x)) dx = \int_0^A g\left(S_{X+Y}\left(u + \frac{1}{n}\right)\right) du$$

Quand $A \rightarrow +\infty$, le membre de gauche tend vers $\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} g(S_{X+Y}(x)) dx$; le membre de droite converge donc vers la même limite.

Inégalité. Comme $\lfloor nY \rfloor > nY - 1$, on a $Y_n > Y - \frac{1}{n}$. Pour $x \geq 0$, si $X + Y > x + \frac{1}{n}$, alors $X + Y_n > X + Y - \frac{1}{n} > x$: $\left[X + Y > x + \frac{1}{n}\right] \subset [X + Y_n > x]$. Donc

$$S_{X+Y}\left(x + \frac{1}{n}\right) \leq S_{X+Y_n}(x) \text{ et, } g \text{ étant croissante, } g\left(S_{X+Y}\left(x + \frac{1}{n}\right)\right) \leq g(S_{X+Y_n}(x)).$$

Les deux intégrales sur $[0, +\infty[$ convergeant ($E_g(X + Y_n)$ existe par a)), la croissance de l'intégrale donne la majoration.

Conclusion

$$\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} g(S_{X+Y}(x)) dx = \int_0^{+\infty} g\left(S_{X+Y}\left(x + \frac{1}{n}\right)\right) dx \leq E_g(X + Y_n).$$

d) Par c), a) et b), pour tout $n \geq 1$:

$$\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} g(S_{X+Y}(x)) dx \leq E_g(X + Y_n) \leq E_g(X) + E_g(Y_n) \leq E_g(X) + E_g(Y)$$

Par ailleurs $0 \leq g(S_{X+Y}(x)) \leq 1$, donc

$$\int_0^{\frac{1}{n}} g(S_{X+Y}(x)) dx \leq \frac{1}{n}.$$

Par la relation de Chasles :

$$E_g(X + Y) = \int_0^{\frac{1}{n}} g(S_{X+Y}(x)) dx + \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} g(S_{X+Y}(x)) dx \leq \frac{1}{n} + E_g(X) + E_g(Y)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$:

Conclusion

$E_g(X + Y) \leq E_g(X) + E_g(Y)$, ce qui est l'inégalité [2] : l'espérance corrigée par une fonction de distorsion est sous-additive pour toute variable Y positive bornée.

Relevé des adaptations

- Préambule « Dans tout le problème » : ajout du résultat admis selon lequel, pour toute variable X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et toute fonction g continue croissante sur $[0, 1]$, la fonction $x \mapsto g(S_X(x))$ est intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}_+$ avec les propriétés usuelles de l'intégrale. Justification : pour une variable ni discrète ni à densité (comme $X + Y$ en partie III), S_X est seulement monotone et n'est pas nécessairement continue par morceaux ; le programme ne définit l'intégrale que pour des fonctions continues par morceaux, alors que l'énoncé original utilise ces intégrales sans le dire.
- Paragraphe suivant la question 6) d) : le résultat admis (« la relation [1] reste applicable à toute variable aléatoire pour laquelle l'intégrale converge ») est précisé : une telle variable admet une espérance égale à l'intégrale, cette égalité servant de définition de $E(X)$ pour une variable ni discrète ni à densité. Justification : le programme ne définit pas l'espérance d'une variable quelconque ; ce résultat est utilisé en 11) a).
- Question 9) : code adapté en Python. Les appels Scilab `cdfnor("PQ", ...)` et `cdfnor("X", ...)` sont remplacés par `ndtr` et `ndtri` (bibliothèque `scipy.special`), dont la syntaxe et le rôle sont expliqués dans l'énoncé ; l'instruction (2) devient `np.linspace(0.02, 0.98, 97)`, l'instruction (3) devient `q = ndtri(p) - qa` (les

tableaux `zeros(p)` et `ones(p)` sont inutiles en Python), la ligne (4) incomplète est conservée sous la forme `wa = ndtr(???)`, et l'instruction (5) devient `plt.plot(p, wa)`. Dans la question a), « format matriciel » est remplacé par « taille des tableaux obtenus ». Justification : seul le langage Python est au programme ; les commandes supplémentaires sont expliquées dans l'énoncé.

- Question 9), graphique : la figure du sujet original est remplacée par une description précise (deux courbes croissantes et concaves, ordonnées initiales voisines de 0.11 et 0.04, rejoignant le voisinage de (1, 1)). Justification : le format Markdown ne reproduit pas la figure ; les valeurs décrites sont lues sur la figure originale et confirmées par l'exécution du code.
- Question 13) b) (i) et (ii) : rectification de l'énoncé. Le terme $(1 - p)P_{[Z=0]}([X > x])$ est remplacé par $P([Z = 0] \cap [X > x])$. Justification : ces deux quantités sont égales lorsque $p < 1$, mais la probabilité conditionnelle $P_{[Z=0]}$ n'est pas définie lorsque $P([Z = 0]) = 0$, cas permis par les hypothèses ($p = 1$) ; la forme rectifiée est valable dans tous les cas et la suite de la question est inchangée.