



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques

2015

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Les notations sont celles du sujet adapté. Tous les espaces vectoriels et tous les scalaires sont réels. Les relations différentielles sont traitées par dérivation de fonctions explicites, sans invoquer de théorème général sur les équations différentielles.

Partie I. Deux exemples de pilotage linéaire

1. (a) Puisque $a \neq 0$, la fonction y est bien définie et dérivable. La règle du produit donne

$$y'(t) = x'(t)e^{-at} - a \left(x(t) + \frac{b}{a} \right) e^{-at} = (x'(t) - ax(t) - b)e^{-at} = 0.$$

Ainsi y est constante sur $\mathbb{R}_+$.

1. (b) On a $y(t) = y(0) = x(0) + b/a$. En multipliant par e^{at} puis en isolant $x(t)$,

$$x(t) = -\frac{b}{a} + \left(x(0) + \frac{b}{a} \right) e^{at}.$$

Cette formule est valable pour tout $t \geq 0$. Réciproquement, chaque fonction de cette forme satisfait la relation différentielle par dérivation directe.

1. (c) L'équation d'équilibre est $ax^* + b = 0$. Puisque $a \neq 0$, elle a l'unique solution $x^* = -b/a$.

Si $a < 0$, $e^{at} \rightarrow 0$, et la formule de (b) montre que toute solution tend vers x^* : cet équilibre est attractif.

Si $a > 0$, la solution de valeur initiale $x(0) = x^* + 1$ vérifie $x(t) = x^* + e^{at}$ et ne tend pas vers x^* . L'équilibre n'est donc pas attractif. Le cas $a = 0$ est exclu par l'énoncé. Ainsi l'attractivité équivaut à $a < 0$.

2. (a) On résout $AX^* + B = 0$:

$$\begin{cases} -2x_1^* + x_2^* + 1 = 0, \\ x_1^* - 2x_2^* + 1 = 0. \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, $3(x_2^* - x_1^*) = 0$, donc $x_1^* = x_2^*$. La première équation donne $x_1^* = 1$. L'unique équilibre est $x^* = (1, 1)$.

2. (b) La matrice A est réelle et symétrique. Le théorème spectral assure l'existence d'une base orthonormale de vecteurs propres. Sa matrice de passage Q satisfait $Q^{-1} = {}^tQ$ et $Q^{-1}AQ$ est diagonale.

2. (c) Les calculs directs donnent

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs sont orthogonaux et de norme $\sqrt{2}$. On choisit donc

$$\lambda = -3, \quad \mu = -1, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ses colonnes sont une base orthonormale, donc $Q^{-1} = {}^tQ$, et $AQ = Q \operatorname{diag}(-3, -1)$, d'où la diagonalisation demandée.

2. (d)(i) La matrice Q est constante. En dérivant chaque coordonnée de $W = {}^tQX$,

$$W' = {}^tQX' = {}^tQ(AX + B) = {}^tQAQW + {}^tQB = DW + {}^tQB.$$

Ici ${}^tQB = {}^t(0, \sqrt{2})$.

2. (d)(ii) Méthode 1 — Équations scalaires dans la base propre

Les coordonnées vérifient $w'_1 = -3w_1$ et $w'_2 = -w_2 + \sqrt{2}$. Par la question 1,

$$w_1(t) = w_1(0)e^{-3t}, \quad w_2(t) = \sqrt{2} + (w_2(0) - \sqrt{2})e^{-t}.$$

Donc $W(t) \rightarrow {}^t(0, \sqrt{2})$. Comme $X = QW$, chaque coordonnée de X est une combinaison linéaire fixe des coordonnées de W , d'où $X(t) \rightarrow {}^t(Q(0, \sqrt{2})) = {}^t(1, 1)$. L'équilibre est attractif.

Méthode 2 — Somme et différence

Posons $s(t) = x_1(t) + x_2(t)$ et $d(t) = x_1(t) - x_2(t)$. Les deux équations du système donnent $s' = -s + 2$ et $d' = -3d$. Par 1(b), $s(t) \rightarrow 2$ et $d(t) \rightarrow 0$. Puisque $x_1 = (s + d)/2$ et $x_2 = (s - d)/2$, les deux composantes tendent vers 1.

La première méthode suit la diagonalisation ; la seconde permet de repérer les mêmes directions propres directement dans un système symétrique à deux composantes.

3. (a) Question adaptée au programme actuel : l'endomorphisme cyclique est défini sur $\mathbb{R}^p$.

Les colonnes de A_p sont les coordonnées des images des vecteurs de base. Ainsi

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $p = 2$, cette écriture signifie $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. L'application permute les vecteurs de

base et est donc bijective. Son rang est p . Sur les coordonnées,

$${}^t(A_p(x_1, \dots, x_p)) = {}^t(x_2, \dots, x_p, x_1).$$

3. (b) Question adaptée au programme actuel : les vecteurs à coordonnées non réelles sont remplacés par deux vecteurs trigonométriques réels.

Pour les $p - 1$ premières coordonnées, les formules d'addition donnent

$$\cos((j+1)\theta) = \cos \theta \cos(j\theta) - \sin \theta \sin(j\theta),$$

$$\sin((j+1)\theta) = \sin \theta \cos(j\theta) + \cos \theta \sin(j\theta).$$

Pour la dernière coordonnée, la même formule utilise $\cos(p\theta) = 1$ et $\sin(p\theta) = 0$, exactement les coordonnées que ramène le décalage cyclique. On obtient donc

$$A_p C_\theta = \cos \theta C_\theta - \sin \theta S_\theta, \quad A_p S_\theta = \sin \theta C_\theta + \cos \theta S_\theta.$$

Le vecteur $C_0 = {}^t(1, \dots, 1)$ satisfait $A_p C_0 = C_0$. Si p est pair, $C_\pi = {}^t(1, -1, \dots, -1)$ satisfait $A_p C_\pi = -C_\pi$.

3. (c) Question adaptée au programme actuel : on construit une base réelle de droites et de plans invariants, puis on étudie la diagonalisation réelle.

Commençons par les sommes trigonométriques. Pour un entier h , posons $\phi = 2\pi h/p$. Si h n'est pas multiple de p , $\sin(\phi/2) \neq 0$. En sommant les deux identités indiquées sur $\ell = 0, \dots, p-1$, les membres de droite sont télescopiques. Comme $p\phi = 2\pi h$, leurs termes de bord s'annulent. Donc

$$\sum_{\ell=0}^{p-1} \cos(\ell\phi) = 0, \quad \sum_{\ell=0}^{p-1} \sin(\ell\phi) = 0.$$

Si h est multiple de p , ces sommes valent respectivement p et 0 . Les deux identités indiquées se déduisent elles-mêmes des formules d'addition du sinus et du cosinus, qui sont autorisées.

Les formules de produit nécessaires sont également des conséquences des formules d'addition :

$$2 \cos a \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b),$$

$$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b),$$

$$2 \cos a \sin b = \sin(a+b) + \sin(b-a).$$

Pour $1 \leq j, \ell \leq \lfloor (p-1)/2 \rfloor$, les fréquences $j + \ell$ sont strictement comprises entre 0 et p , et $j - \ell$ est multiple de p seulement lorsque $j = \ell$. Les sommes précédentes et les identités de produit donnent

$$\langle C_{\theta_j}, C_{\theta_\ell} \rangle = \frac{p}{2} \text{ si } j = \ell, \quad 0 \text{ sinon,}$$

$$\langle S_{\theta_j}, S_{\theta_\ell} \rangle = \frac{p}{2} \text{ si } j = \ell, \quad 0 \text{ sinon,} \quad \langle C_{\theta_j}, S_{\theta_\ell} \rangle = 0.$$

La somme des coordonnées de chacun de ces vecteurs est nulle ; ils sont orthogonaux à C_0 , dont le carré de norme vaut p .

Si p est pair, C_π a aussi un carré de norme égal à p et est orthogonal à C_0 , puisque les signes alternent en nombre pair. Ses produits scalaires avec les autres vecteurs font

intervenir les fréquences $p/2 + j$ et $p/2 - j$, toutes strictement entre 0 et p : ils sont nuls par les mêmes sommes.

Tous les vecteurs sont donc non nuls et orthogonaux. Leur nombre vaut $1 + 2(p - 1)/2 = p$ lorsque p est impair, et $2 + 2(p - 2)/2 = p$ lorsque p est pair. Ils forment une base orthogonale.

Dans cette base, u_p agit par 1 sur C_0 , par -1 sur C_π si ce vecteur est présent, et sur chaque plan $\text{Vect}(C_{\theta_j}, S_{\theta_j})$ par la matrice

$$R_j = \begin{pmatrix} \cos \theta_j & \sin \theta_j \\ -\sin \theta_j & \cos \theta_j \end{pmatrix}.$$

Pour $0 < \theta_j < \pi$, $\sin \theta_j > 0$. Si un couple réel (a, b) est vecteur propre de ce bloc pour une valeur propre réelle λ , les équations sont

$$(\cos \theta_j - \lambda)a + \sin \theta_j b = 0, \quad -\sin \theta_j a + (\cos \theta_j - \lambda)b = 0.$$

En combinant ces deux équations, on obtient

$$((\cos \theta_j - \lambda)^2 + \sin^2 \theta_j)a = 0, \quad ((\cos \theta_j - \lambda)^2 + \sin^2 \theta_j)b = 0.$$

Le coefficient est strictement positif ; donc $a = b = 0$. Aucun de ces plans ne contient de vecteur propre réel non nul. La décomposition directe montre que les vecteurs propres réels de u_p appartiennent aux droites correspondant à 1 et éventuellement -1 .

Pour $p = 2$, ces deux droites donnent une base propre. Pour $p \geq 3$, au moins un plan est présent et les vecteurs propres réels ne peuvent engendrer tout l'espace. Ainsi u_p est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ exactement lorsque $p = 2$.

3. (d) Question adaptée au programme actuel : les polynômes considérés ont des coefficients réels.

Le décalage cyclique effectué p fois ramène chaque vecteur de base à lui-même. Donc $u_p^p = \text{Id}$ et $X^p - 1$ est annulateur.

Supposons qu'un polynôme

$$P = \sum_{j=0}^{p-1} a_j X^j$$

vérifie $P(u_p) = 0$. Les vecteurs $e_1, u_p(e_1), \dots, u_p^{p-1}(e_1)$ sont précisément $e_1, e_p, e_{p-1}, \dots, e_2$, c'est-à-dire une base. En appliquant $P(u_p)$ à e_1 ,

$$\sum_{j=0}^{p-1} a_j u_p^j(e_1) = 0.$$

La liberté de cette famille impose $a_j = 0$ pour tout j . Aucun polynôme annulateur non nul de degré strictement inférieur à p n'existe. Cette démonstration ne fait appel à aucune théorie générale d'un polynôme de degré minimal.

3. (e) Question adaptée au programme actuel : on étudie les valeurs propres et la diagonalisation réelles des polynômes de u_p .

Sur C_0 , $P(u_p)$ agit par $P(1)$; sur C_π , s'il est présent, par $P(-1)$. Par les formules d'addition, une récurrence sur ℓ donne

$$R_j^\ell = \begin{pmatrix} \cos(\ell\theta_j) & \sin(\ell\theta_j) \\ -\sin(\ell\theta_j) & \cos(\ell\theta_j) \end{pmatrix}.$$

Le bloc de $P(u_p)$ sur le plan d'indice j est donc

$$P(R_j) = \begin{pmatrix} a(\theta_j) & b(\theta_j) \\ -b(\theta_j) & a(\theta_j) \end{pmatrix}.$$

Si $b(\theta_j) = 0$, ce bloc est scalaire : tout vecteur non nul de ce plan est propre pour $a(\theta_j)$. Si $b(\theta_j) \neq 0$, le même raisonnement par système que dans (c) donne le coefficient $((a(\theta_j) - \lambda)^2 + b(\theta_j)^2) > 0$; il n'existe aucun vecteur propre réel non nul dans ce plan.

En décomposant un vecteur propre selon la somme directe des droites et plans, chacune de ses composantes doit satisfaire l'équation propre dans le bloc correspondant. Les valeurs propres réelles sont donc $P(1)$, $P(-1)$ si p est pair, et les valeurs $a(\theta_j)$ des plans où $b(\theta_j) = 0$, en supprimant les répétitions éventuelles.

L'endomorphisme est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b(\theta_j) = 0$ pour tout j . Si cette condition est satisfaite, la base construite en (c) est une base propre. Sinon, tous les vecteurs propres ont une composante nulle dans au moins un des plans et ne peuvent engendrer l'espace.

4. (a)(i) Pour $p = 3$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $M = -I_3 + \alpha A + \beta A^2$. On peut choisir $P(X) = -1 + \alpha X + \beta X^2$.

4. (a)(ii) Question adaptée au programme actuel : les informations spectrales non réelles sont remplacées par les actions réelles sur une droite et un plan invariants.

Posons $\delta = \alpha + \beta$, $h = -1 - \delta/2$ et $d = \sqrt{3}(\alpha - \beta)/2$. Comme

$\cos(2\pi/3) = \cos(4\pi/3) = -1/2$, $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$ et $\sin(4\pi/3) = -\sqrt{3}/2$, la question 3(e) donne sur H le bloc

$$\begin{pmatrix} h & d \\ -d & h \end{pmatrix}.$$

En effet, $C_{2\pi/3} = (1, -1/2, -1/2)$ et $S_{2\pi/3} = (0, \sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2)$ forment une base orthogonale de H ; leurs normes sont égales, donc leur normalisation commune ne change pas cette matrice.

Sur L , M agit par $\delta - 1$. Comme $\alpha \neq \beta$, $d \neq 0$; le bloc du plan n'admet aucune valeur propre réelle, par le système étudié en 3(e). L'unique valeur propre réelle de M est donc $\delta - 1$.

La partie symétrique du bloc, soit sa somme avec sa transposée divisée par 2, est hI_2 . Cette information réelle sera suffisante pour l'étude de la décroissance de la norme.

4. (b)(i) La décomposition orthogonale $\mathbb{R}^3 = L \oplus H$ est stable par M . Sur L , le coefficient $\delta - 1$ est non nul par hypothèse.

Sur H , si le bloc appliqué à (a, b) est nul, ses deux équations donnent $(h^2 + d^2)a = (h^2 + d^2)b = 0$. Comme $h < 0$, $h^2 + d^2 > 0$, donc $a = b = 0$. La restriction à H est injective, et donc bijective en dimension finie.

Ainsi M est inversible. Puisque $c \in L$ et $Mc = (\delta - 1)c$, l'unique équilibre est

$$x^* = \frac{1}{1 - \delta}(1, 1, 1).$$

Aucun déterminant n'est utilisé.

4. (b)(ii) Posons $\gamma = \delta - 1$. La fonction proposée a pour colonne $X(t) = X^* + e^{\gamma t}C$ et $X'(t) = \gamma e^{\gamma t}C$. D'autre part,

$$MX(t) + C = MX^* + C + e^{\gamma t}MC = 0 + \gamma e^{\gamma t}C = X'(t).$$

Elle est donc pilotée par (M, c) .

4. (b)(iii) Si $\delta > 1$, la fonction de (ii) ne converge pas vers x^* puisque $e^{(\delta-1)t} \rightarrow +\infty$.

Puisque $\delta = 1$ est exclu, une condition nécessaire d'attractivité est

$$\alpha + \beta < 1.$$

On suppose cette condition réalisée dans la suite.

4. (c)(i) La matrice $N = {}^tM + M$ a ses coefficients diagonaux égaux à -2 et ses coefficients hors diagonale égaux à δ . Si E_3 désigne la matrice dont tous les coefficients valent 1,

$$N = \delta E_3 - (2 + \delta)I_3.$$

Sur L , E_3 agit par 3, donc N agit par $2(\delta - 1)$. Sur H , E_3 agit par 0, donc N agit par $-(2 + \delta)$. Les valeurs propres sont $2(\delta - 1)$, sur une droite, et $-(2 + \delta)$, sur un plan.

4. (c)(ii) On a $0 < \delta < 1$. Choisissons $\theta = 1 - \delta > 0$. Alors $2(\delta - 1) = -2\theta$ et

$$-(2 + \delta) \leq -2 + 2\delta = -2\theta,$$

car $3\delta \geq 0$. Ce choix convient.

4. (d)(i) Puisque X^* est constant et $MX^* + C = 0$,

$$Y' = X' = MX + C = M(Y + X^*) + C = MY.$$

L'application y est donc pilotée par $(M, 0_{\mathbb{R}^3})$.

4. (d)(ii) Le carré de norme est une somme de carrés de composantes dérivables. Sa dérivée est

$$\frac{d}{dt}({}^tYY) = {}^t(Y')Y + {}^tYY' = {}^tY({}^tM + M)Y = {}^tYNY.$$

La règle du produit donne alors

$$\varphi' = e^{2\theta t} {}^tY(N + 2\theta I_3)Y.$$

4. (d)(iii) La matrice réelle symétrique $N + 2\theta I_3$ a toutes ses valeurs propres négatives ou nulles par (c)(ii). Dans une base orthonormale propre, sa forme quadratique est une somme de carrés multipliés par ces valeurs propres ; elle est donc toujours négative ou nulle.

Ainsi $\varphi'(t) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$, et φ est décroissante.

4. (d)(iv) Puisque $\varphi \geq 0$ et $\varphi(t) \leq \varphi(0) = \|Y(0)\|^2$,

$$0 \leq \|Y(t)\|^2 \leq e^{-2\theta t} \|Y(0)\|^2.$$

Le membre de droite tend vers 0 car $\theta > 0$. Pour chaque composante, $|y_i(t)| \leq \|Y(t)\| \rightarrow 0$. Ainsi toute application pilotée vérifie $x(t) \rightarrow x^*$: l'équilibre est attractif.

La condition nécessaire de (b)(iii) est donc aussi suffisante : sous les hypothèses de l'exemple, l'attractivité équivaut à $\alpha + \beta < 1$.

Partie II. Un exemple de pilotage non linéaire

5. (a) Posons $u(t) = 1/(1 + \nu e^{-t})$. Le dénominateur reste strictement positif : s'il est $\nu \geq 0$, il est au moins 1 ; si $-1 < \nu < 0$, il est au moins $1 + \nu > 0$.

On calcule

$$u'(t) = \frac{\nu e^{-t}}{(1 + \nu e^{-t})^2} = (1 - u(t))u(t).$$

Lorsque $x_1 = x_2 = u$, les termes $\rho(x_2 - x_1)$ et $\rho(x_1 - x_2)$ s'annulent. Ainsi $F_1(u, u) = F_2(u, u) = (1 - u)u = u'$. La fonction proposée satisfait (S).

5. (b) Pour $c \in]0, 1[$, choisissons $\nu = 1/c - 1 > 0$. Alors $u(0) = c$, u' est positif et $u(t) \rightarrow 1$. En particulier, $u(t) \in [c, 1[$ pour tout $t \geq 0$.

La solution (u, u) de (a) prend donc ses valeurs dans $[c, +\infty[^2$.

5. (c) Comme les deux coordonnées recherchées sont strictement positives, on peut diviser les équations par ces coordonnées. Elles deviennent

$$\begin{cases} (1 + \rho)x_1^* - \rho x_2^* = 1, \\ -\rho x_1^* + (1 + \rho)x_2^* = 1. \end{cases}$$

La soustraction donne $(1 + 2\rho)(x_1^* - x_2^*) = 0$. Puisque $\rho > 0$, les coordonnées sont égales. En remplaçant dans la première équation, elles valent 1. L'unique équilibre strictement positif est $x^* = (1, 1)$.

5. (d) Non. La fonction constante $x(t) = (0, 0)$ satisfait (S) , puisque $F_1(0, 0) = F_2(0, 0) = 0$, et ne converge pas vers $(1, 1)$.

Cet exemple suffit à répondre à la question portant sur toutes les solutions. L'étude ultérieure concerne une classe plus restreinte de solutions, dont les deux composantes sont uniformément minorées par un réel strictement positif.

6. (a) Les vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$ sont propres pour Q_r , de valeurs propres $1 - r$ et $1 + r$. Ils forment une base orthogonale. Ainsi q_r est définie positive exactement lorsque $1 - r > 0$ et $1 + r > 0$, soit $-1 < r < 1$.

Dans ce cas, C_r est une ellipse, éventuellement un cercle pour $r = 0$. Elle est non vide, fermée et bornée. En effet, q_r est polynomiale, donc continue ; sa ligne de niveau 1 est fermée. De plus, par $2|u_1 u_2| \leq u_1^2 + u_2^2$,

$$q_r(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2 - 2ru_1 u_2 \geq (1 - |r|)(u_1^2 + u_2^2).$$

Sur C_r , on a donc $u_1^2 + u_2^2 \leq 1/(1 - |r|)$. La forme d'ellipse résulte aussi des coordonnées orthogonales utilisées en (d).

Aux cas limites $r = 1$ et $r = -1$, la forme est respectivement $(u_1 - u_2)^2$ et $(u_1 + u_2)^2$ et n'est pas définie positive ; pour $|r| > 1$, elle prend des valeurs de signes opposés sur les deux directions propres.

6. (b) La fonction q_s est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^2$. D'après (a), C_r est non vide, fermée et bornée pour $0 < s < r < 1$. Une fonction continue sur une telle partie de $\mathbb{R}^2$ admet un minimum et un maximum globaux, tous deux atteints. Ils sont respectivement $m_{r,s}$ et $M_{r,s}$.

6. (c) Question adaptée au programme actuel : la propriété de la contrainte est exprimée directement par la non-annulation de son gradient.

Le gradient de $q_r - 1$ est

$$\nabla(q_r - 1)(u_1, u_2) = 2(u_1 - ru_2, u_2 - ru_1).$$

S'il s'annule, $u_1 = ru_2$ et $u_2 = ru_1$, donc $(1 - r^2)u_1 = 0$. Puisque $r < 1$, $u_1 = u_2 = 0$. Ce point n'appartient pas à C_r , car $q_r(0, 0) = 0$.

Le gradient ne s'annule donc en aucun point de la contrainte. Cette vérification n'est pas utilisée pour invoquer un théorème général d'optimisation sous contrainte non linéaire.

6. (d) Question adaptée au programme actuel : la condition générale de multiplicateurs pour une contrainte non linéaire est remplacée par une paramétrisation et la dérivation d'une fonction d'une variable.

Posons $v_1 = (u_1 + u_2)/\sqrt{2}$ et $v_2 = (u_2 - u_1)/\sqrt{2}$. Le changement de coordonnées est inversible et donne

$$q_r(u_1, u_2) = (1 - r)v_1^2 + (1 + r)v_2^2.$$

L'appartenance à C_r équivaut donc à $a^2 + b^2 = 1$, où $a = \sqrt{1 - r}v_1$ et $b = \sqrt{1 + r}v_2$.

Chaque point du cercle unité est de la forme $(\cos t, \sin t)$ pour un réel t . En revenant aux coordonnées u_1, u_2 , on obtient exactement $U_r(t)$. Cette paramétrisation parcourt tout C_r .

La fonction $g = q_s \circ U_r$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Si t_0 correspond à un extremum, la condition nécessaire du premier ordre pour la fonction d'une variable est $g'(t_0) = 0$.

Plus explicitement, la dérivation de la formule polynomiale de q_s donne

$$g'(t) = 2(U_{r,1} - sU_{r,2})U'_{r,1} + 2(U_{r,2} - sU_{r,1})U'_{r,2}.$$

Aucun théorème de multiplicateurs pour une contrainte non linéaire n'est nécessaire.

6. (e) Méthode 1 — Fonction d'une variable sur l'ellipse

Dans les coordonnées de (d), $q_s = (1-s)v_1^2 + (1+s)v_2^2$. Donc

$$g(t) = a \cos^2 t + b \sin^2 t, \quad a = \frac{1-s}{1-r}, \quad b = \frac{1+s}{1+r}.$$

On a

$$a - b = \frac{2(r-s)}{1-r^2} > 0.$$

La dérivée vaut $g'(t) = 2(b-a) \sin t \cos t$. Les paramètres critiques sont les multiples de $\pi/2$. Pour les multiples de π , $g = a$; pour les paramètres $\pi/2$ modulo π , $g = b$.

Plus directement, $g = b + (a-b) \cos^2 t$ prend toutes ses valeurs entre b et a et atteint les deux bornes. Ainsi

$$m_{r,s} = \frac{1+s}{1+r}, \quad M_{r,s} = \frac{1-s}{1-r}.$$

Pour $u \neq 0$, $q_r(u) > 0$. Le vecteur $u/\sqrt{q_r(u)}$ appartient à C_r . Par homogénéité des formes quadratiques,

$$\frac{q_s(u)}{q_r(u)} \leq M_{r,s}.$$

Pour $u = 0$, les deux formes valent 0. L'inégalité globale est donc satisfaite avec

$$\mu = M_{r,s} = (1-s)/(1-r).$$

Méthode 2 — Comparaison directe des formes diagonales

Dans les mêmes coordonnées, $q_r = (1-r)v_1^2 + (1+r)v_2^2$ et $q_s = (1-s)v_1^2 + (1+s)v_2^2$. En utilisant $b < a$,

$$bq_r \leq q_s \leq aq_r.$$

L'égalité à gauche est obtenue pour $v_1 = 0$, et l'égalité à droite pour $v_2 = 0$. Chacune de ces directions rencontre C_r , respectivement pour $v_2 = \pm 1/\sqrt{1+r}$ et $v_1 = \pm 1/\sqrt{1-r}$.

Les bornes sont donc atteintes et valent b, a .

Cette seconde méthode établit simultanément les extrema contraints et l'inégalité globale par des comparaisons de coefficients. La première traite la condition du premier ordre demandée et montre la variation le long de l'ellipse.

7. (a) Le changement de coordonnées donne

$$u_1^2 + u_2^2 = v_1^2 + v_2^2, \quad 2u_1u_2 = v_1^2 - v_2^2.$$

Ainsi $q_r(u_1, u_2) = (1-r)v_1^2 + (1+r)v_2^2$. L'égalité $q_r(u_1, u_2) = 1$ équivaut à celle demandée.

7. (b) Code adapté en Python.

Pour $r = 1/2$, l'équation de 7(a) est $v_1^2/2 + 3v_2^2/2 = 1$. Elle est paramétrée par

$$v_1 = \sqrt{2} \cos \theta, \quad v_2 = \sqrt{2/3} \sin \theta.$$

En revenant aux coordonnées u_1, u_2 , on obtient

$$u_1 = \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta, \quad u_2 = \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta,$$

soit les deux lignes de Cr.

La ligne (2) crée un tableau monodimensionnel de 100 angles allant de 0 à 2π , bornes incluses, avec un pas $2\pi/99$. Les tableaux ct et st contiennent les cosinus et sinus de ces angles. Cr a la forme (2, 100) : chaque colonne est un point de l'ellipse, la première ligne contient les abscisses et la seconde les ordonnées. Cr[0, :] est un tableau monodimensionnel de longueur 100, contenant toutes les abscisses.

Le code complet du sujet, imports compris, a été exécuté. Le graphique relie les 100 points dans l'ordre des angles et se ferme puisque le premier et le dernier angle donnent le même point. Le tracé est une approximation polygonale de la courbe exacte.

7. (c) Code adapté en Python.

Pour $s = 1/4$, $q_s = (3/4)v_1^2 + (5/4)v_2^2$. La ligne de niveau $z > 0$ est paramétrée par

$$v_1 = \sqrt{4z/3} \cos \theta, \quad v_2 = \sqrt{4z/5} \sin \theta.$$

Les coordonnées sont donc

$$u_1 = \sqrt{z} \left(\sqrt{2/3} \cos \theta - \sqrt{2/5} \sin \theta \right), \quad u_2 = \sqrt{z} \left(\sqrt{2/3} \cos \theta + \sqrt{2/5} \sin \theta \right).$$

Voici un code complet, exécutable pour tout $z > 0$. La valeur 1 est une valeur d'exemple, indépendante de celle à identifier en (d).

Python

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

n = 100

theta = np.linspace(0, 2 * np.pi, n)

ct = np.cos(theta)

st = np.sin(theta)

z = 1.0

Gaz = np.array([np.sqrt(z) * (np.sqrt(2 / 3) * ct - np.sqrt(2 / 5) * st),
                np.sqrt(z) * (np.sqrt(2 / 3) * ct + np.sqrt(2 / 5) * st)])

plt.plot(Gaz[0, :], Gaz[1, :])

plt.show()
```

Les quatre blancs sont respectivement $\sqrt{2/3}$, $-\sqrt{2/5}$, $\sqrt{2/3}$, $\sqrt{2/5}$. Le code a été exécuté ; les points obtenus satisfont $q_s = z$ à la précision flottante.

7. (d) Pour $r = 1/2$ et $s = 1/4$, la question 6(e) donne

$$m_{r,s} = \frac{1 + 1/4}{1 + 1/2} = \frac{5}{6}, \quad M_{r,s} = \frac{1 - 1/4}{1 - 1/2} = \frac{3}{2}.$$

Sur le graphique, la ligne de niveau de q_s est à l'intérieur de l'ellipse C_r et la touche dans la direction $u_1 = -u_2$. Il s'agit donc du niveau minimal sur C_r , soit $z_0 = 5/6$. Le niveau $3/2$ donnerait au contraire une ellipse extérieure, tangente dans la direction $u_1 = u_2$.

Vérifions exactement le contact. En coordonnées (v_1, v_2) , C_r a pour demi-axes $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2/3}$. Le niveau $5/6$ de q_s a pour demi-axes $\sqrt{10/9}$ et $\sqrt{2/3}$. Les deux ellipses partagent

donc les extrémités de leur second axe, tandis que le premier demi-axe du niveau 5/6 est plus petit.

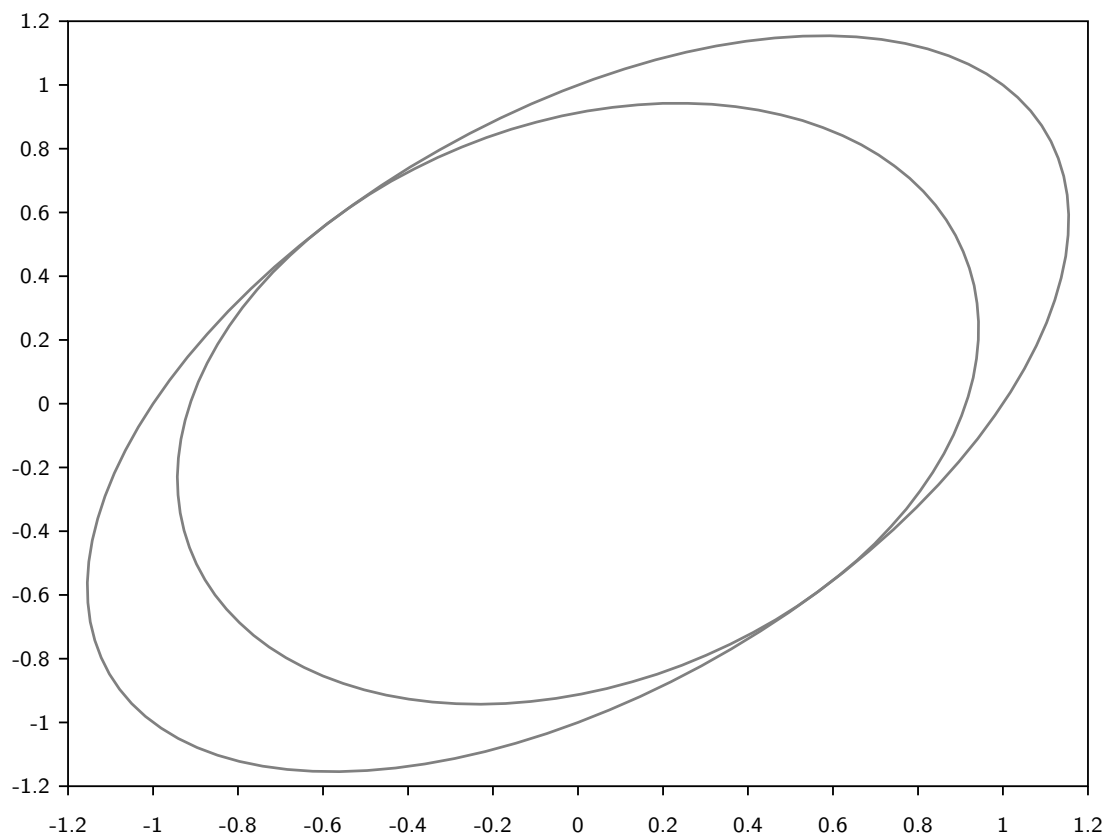
Les points de contact sont $u = (h, -h)$ avec $h = \pm 1/\sqrt{3}$, car $q_r(h, -h) = 3h^2 = 1$.

En ces points,

$$\nabla q_r(u) = 2(1+r)(h, -h), \quad \nabla q_s(u) = 2(1+s)(h, -h).$$

Les deux gradients sont non nuls et proportionnels. Pour justifier les tangentes sans théorème de contrainte, une paramétrisation régulière $U(t)$ d'une ligne de niveau satisfait, par dérivation explicite, $\langle \nabla q(U(t)), U'(t) \rangle = 0$. Ici les vitesses des paramétrisations sont non nulles, donc chacune des tangentes est la droite orthogonale à son gradient passant par le point de contact. Les gradients étant proportionnels, les tangentes coïncident : elles ont la direction $(1, 1)$, donc leurs équations sont $u_2 = u_1 - 2h$.

Le graphique suivant reproduit les deux ellipses à partir des formules exactes, avec les mêmes bornes et graduations que le graphique source.



8. (a) Posons $s = \rho/(1 + \rho) \in]0, 1[$. Comme $x_i = 1 + y_i$, les équations (S) deviennent

$$y'_1 = -(1 + \rho)x_1(y_1 - sy_2), \quad y'_2 = -(1 + \rho)x_2(y_2 - sy_1).$$

La fonction $f = y_1^2 + y_2^2 - 2sy_1y_2$ est dérivable. Sa dérivée est

$$f' = 2(y_1 - sy_2)y'_1 + 2(y_2 - sy_1)y'_2.$$

En remplaçant y'_1, y'_2 par leurs expressions, on obtient

$$f' = -2(1 + \rho)(x_1(y_1 - sy_2)^2 + x_2(y_2 - sy_1)^2).$$

8. (b) Puisque $x_1, x_2 \geq c > 0$ et que les carrés sont positifs ou nuls,

$$f' \leq -2c(1 + \rho)((y_1 - sy_2)^2 + (y_2 - sy_1)^2).$$

On développe :

$$(y_1 - sy_2)^2 + (y_2 - sy_1)^2 = (1 + s^2)(y_1^2 + y_2^2) - 4sy_1y_2 = (1 + s^2)q_r(y_1, y_2),$$

avec $r = 2s/(1 + s^2)$. Pour $0 < s < 1$, on vérifie

$$r - s = \frac{s(1 - s^2)}{1 + s^2} > 0, \quad 1 - r = \frac{(1 - s)^2}{1 + s^2} > 0.$$

Ainsi $0 < s < r < 1$. De plus, $1 + \rho = 1/(1 - s)$, d'où

$$(1 + \rho)(1 + s^2) = \frac{1 + s^2}{1 - s} = \frac{1 - s}{1 - r}.$$

On obtient l'inégalité demandée : $f' \leq -2c \frac{1 - s}{1 - r} q_r(y_1, y_2)$.

8. (c) Les conditions de 6(e) sont satisfaites pour ces r, s . Avec $\mu = (1 - s)/(1 - r) > 0$, on a $q_s \leq \mu q_r$. En multipliant par $-2c < 0$, le sens de l'inégalité est inversé :

$$-2c\mu q_r \leq -2cq_s = -2cf.$$

Donc $f' \leq -2cf$. Pour en déduire la limite, on dérive $g(t) = e^{2ct}f(t)$:

$$g'(t) = e^{2ct}(f'(t) + 2cf(t)) \leq 0.$$

Comme q_s est définie positive, $f(t) \geq 0$. Ainsi $0 \leq f(t) \leq f(0)e^{-2ct} \rightarrow 0$. La convergence est démontrée par une simple comparaison exponentielle.

9. Si les composantes ont des minorants $d_1, d_2 > 0$, on peut choisir $c = \frac{1}{2} \min(1, d_1, d_2) \in]0, 1[$. La solution prend ses valeurs dans $[c, +\infty[$ et la question 8 s'applique.

Comme $0 < s < 1$,

$$q_s(y_1, y_2) \geq (1-s)(y_1^2 + y_2^2).$$

La limite $f(t) \rightarrow 0$ entraîne donc $y_1(t) \rightarrow 0$ et $y_2(t) \rightarrow 0$. Toute solution dont les deux composantes sont uniformément minorées par des réels strictement positifs converge vers l'équilibre $x^* = (1, 1)$.

Cette conclusion ne s'étend pas à toutes les solutions, comme le contre-exemple de 5(d) le montre.

Partie III. Pilotage pas à pas dans un contexte aléatoire

10. L'équilibre vérifie $(I_p - A)X^* = B$. Or

$$I_p - A = Q(I_p - D)Q^{-1}.$$

La matrice diagonale $I_p - D$ a ses coefficients $1 - \lambda_k$ strictement positifs puisque $\lambda_k \in]-1, 1[$. Elle est donc inversible, et $I_p - A$ l'est aussi. L'unique équilibre est

$$X^* = (I_p - A)^{-1}B = Q(I_p - D)^{-1}Q^{-1}B.$$

11. (a) On justifie d'abord les moments nécessaires. Par récurrence, chaque coordonnée de $Y(n)$ a un moment d'ordre 2 et est une fonction des seules variables $U_1, \dots, U_n$.

Pour $n = 1$, $Y(1) = AX(0) + B + U_1X(0)$ est affine en U_1 , qui a un second moment. Pour

passer de n à $n + 1$, U_{n+1} est indépendant de toutes les coordonnées de $Y(n)$, par l'indépendance des U_j et le lemme des coalitions. Ainsi, pour chaque coordonnée,

$$E(U_{n+1}^2 y_k(n)^2) = E(U_{n+1}^2) E(y_k(n)^2) < +\infty.$$

Chaque coordonnée de $Y(n + 1)$ est une somme finie de coordonnées de $Y(n)$, de produits $U_{n+1} y_k(n)$ et de constantes. Une somme finie de variables de second moment fini a un second moment fini, par Cauchy-Schwarz. La récurrence est donc établie. Leurs espérances existent également, par la même inégalité.

Comme $E(U_1) = 0$,

$$E(Y(1)) = AX(0) + B.$$

Pour $n \geq 1$, l'indépendance et le centrage donnent

$$E(U_{n+1} y_k(n)) = E(U_{n+1}) E(y_k(n)) = 0. \text{ Donc } E(Y(n + 1)) = AE(Y(n)) + B.$$

En retranchant $X^* = AX^* + B$, on obtient $E(Y(n + 1)) - X^* = A(E(Y(n)) - X^*)$.

11. (b) Par récurrence à partir de (a),

$$E(Y(n)) - X^* = A^{n-1}(E(Y(1)) - X^*) = A^n(X(0) - X^*).$$

La diagonalisation donne $A^n = QD^nQ^{-1}$, et les coefficients diagonaux de D^n sont $\lambda_k^n \rightarrow 0$ puisque $|\lambda_k| < 1$. Chaque coordonnée de $A^n(X(0) - X^*)$ est une somme finie de constantes multipliées par ces puissances; elle tend vers 0.

Ainsi $E(y(n)) \rightarrow x^*$. Chaque composante est un estimateur asymptotiquement sans biais de la coordonnée correspondante.

12. (a) Posons $C = Q^{-1}B$. La relation de récurrence devient

$$Z(n + 1) = (D + U_{n+1}I_p)Z(n) + C.$$

Ainsi $z_k(n + 1) = (\lambda_k + U_{n+1})z_k(n) + C_k$. La constante C_k ne change pas la variance. Les moments d'ordre 2 existent par la question 11(a), puisque $Z(n)$ est une combinaison linéaire fixe des coordonnées de $Y(n)$.

Le facteur U_{n+1} est indépendant de $z_k(n)$, qui dépend uniquement des $U_1, \dots, U_n$. On a

$$E((\lambda_k + U_{n+1})z_k(n)) = \lambda_k E(z_k(n)),$$

$$E((\lambda_k + U_{n+1})^2 z_k(n)^2) = (\lambda_k^2 + v_{n+1}) E(z_k(n)^2).$$

En utilisant Huygens puis $E(z_k(n)^2) = V(z_k(n)) + (E(z_k(n)))^2$,

$$V(z_k(n+1)) = (\lambda_k^2 + v_{n+1}) V(z_k(n)) + v_{n+1} (E(z_k(n)))^2.$$

Le partage d'une même perturbation entre les coordonnées n'implique pas leur indépendance; seule l'indépendance de la nouvelle perturbation et du passé a été utilisée.

12. (b) Puisque $\lambda_k^2 < 1$, choisissons $c_k = (1 + \lambda_k^2)/2 \in]0, 1[$. Comme $v_n \rightarrow 0$, il existe $N \geq 1$ tel que, pour $n \geq N$, $v_{n+1} \leq (1 - \lambda_k^2)/2$, donc $\lambda_k^2 + v_{n+1} \leq c_k$.

Par 11(b), $E(Z(n)) = Q^{-1}E(Y(n)) \rightarrow Q^{-1}X^*$. La suite réelle $E(z_k(n))$ est donc convergente, et bornée. Il existe $M_k > 0$ tel que $(E(z_k(n)))^2 \leq M_k$ pour tout $n \geq 1$.

Comme les variances et les v_n sont positifs ou nuls, la formule de (a) donne, pour $n \geq N$,

$$V(z_k(n+1)) \leq c_k V(z_k(n)) + M_k v_{n+1}.$$

13. (a) La série

$$\sum v_n$$

converge et ses termes sont positifs ou nuls; donc $v_n \rightarrow 0$, ce qui justifie l'utilisation de 12(b). Pour alléger les notations, posons $c = c_k$. La relation devient $\alpha_{m+1} \leq c\alpha_m + w_m$, avec $0 < c < 1$ et $w_m \geq 0$.

Pour $m = 0$, elle est exactement $\alpha_1 \leq c\alpha_0 + w_0$. Supposons

$$\alpha_{m+1} \leq c^{m+1}\alpha_0 + \sum_{j=0}^m w_j c^{m-j}.$$

Alors, en multipliant par $c > 0$ et en ajoutant w_{m+1} ,

$$\alpha_{m+2} \leq c\alpha_{m+1} + w_{m+1} \leq c^{m+2}\alpha_0 + \sum_{j=0}^{m+1} w_j c^{m+1-j}.$$

La récurrence donne la majoration pour tout $m \in \mathbb{N}$.

13. (b) Méthode 1 — Séparer un début fini et une queue de série

La série

$$\sum_{j \geq 0} w_j$$

converge, car $w_j = M_k v_{N+j+1}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe J tel que

$$\sum_{j > J} w_j < \varepsilon/2.$$

Pour $m > J$,

$$\sum_{j=0}^m w_j c^{m-j} = \sum_{j=0}^J w_j c^{m-j} + \sum_{j=J+1}^m w_j c^{m-j}.$$

La seconde somme est au plus

$$\sum_{j > J} w_j < \varepsilon/2$$

puisque $0 < c^{m-j} \leq 1$. La première somme comporte un nombre fini de termes, dont chacun tend vers 0; en y ajoutant $c^{m+1}\alpha_0 \rightarrow 0$, l'ensemble est inférieur à $\varepsilon/2$ pour m assez grand.

Ainsi $0 \leq \alpha_{m+1} < \varepsilon$ pour m assez grand, donc $\alpha_m \rightarrow 0$. Le décalage d'indice donne $V(z_k(n)) \rightarrow 0$.

Méthode 2 — Utiliser seulement la petitesse des termes

Puisque $w_j \rightarrow 0$, pour $\varepsilon > 0$ on peut choisir J tel que $w_j \leq \varepsilon(1-c)/2$ pour $j > J$. Alors

$$\sum_{j=J+1}^m w_j c^{m-j} \leq \frac{\varepsilon(1-c)}{2} \sum_{h=0}^{m-J-1} c^h \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le début fini et le terme $c^{m+1}\alpha_0$ tendent encore vers 0, ce qui donne la même limite. La première preuve exploite directement la convergence de la série ; la seconde montre que, pour cette majoration particulière, la seule convergence $w_j \rightarrow 0$ suffit.

Aucun échange entre une limite et une somme infinie n'est effectué dans ces preuves.

- 13.** (c) Il faut revenir des coordonnées transformées z_j aux coordonnées observées y_k sans supposer leur indépendance.

Écrivons $q_{k,j}$ les coefficients de Q . Comme $Y = QZ$,

$$y_k(n) - E(y_k(n)) = \sum_{j=1}^p q_{k,j}(z_j(n) - E(z_j(n))).$$

Par Cauchy-Schwarz appliqué à cette somme finie,

$$\left(\sum_{j=1}^p q_{k,j} a_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^p q_{k,j}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^p a_j^2 \right).$$

En prenant les espérances avec $a_j = z_j(n) - E(z_j(n))$,

$$V(y_k(n)) \leq \left(\sum_{j=1}^p q_{k,j}^2 \right) \sum_{j=1}^p V(z_j(n)) \rightarrow 0,$$

car (b) vaut pour chaque indice j , et la somme est finie. Par 11(b), $E(y_k(n)) \rightarrow x_k^*$.

Pour prouver explicitement la convergence en probabilité, fixons $\varepsilon > 0$. Pour n assez grand, $|E(y_k(n)) - x_k^*| \leq \varepsilon/2$. L'inégalité triangulaire donne alors

$$\{|y_k(n) - x_k^*| > \varepsilon\} \subset \{|y_k(n) - E(y_k(n))| > \varepsilon/2\}.$$

Par Bienaymé-Tchebychev,

$$P(|y_k(n) - x_k^*| > \varepsilon) \leq \frac{4 V(y_k(n))}{\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

Ainsi $y_k(n)$ converge en probabilité vers x_k^* . Chaque coordonnée fournit un estimateur convergent et asymptotiquement sans biais. Aucun théorème extérieur sur les convergences aléatoires n'est utilisé.

Vérification des programmes

Les scripts Python de 7(b) et 7(c) ont été exécutés avec 100 points. Les résidus $q_r(C_r) - 1$ et $q_s(\text{Gaz}) - z$ sont de l'ordre de la précision flottante. Le tracé superposé a aussi été exécuté avec $z = 5/6$ et comparé au graphique source.

Pour afficher simultanément les deux courbes, on peut exécuter le code suivant :

Python

```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

n = 100

theta = np.linspace(0, 2 * np.pi, n)

ct = np.cos(theta)

st = np.sin(theta)

Cr = np.array([ct - st / np.sqrt(3), ct + st / np.sqrt(3)])
```

```
z = 5 / 6
Gaz = np.array([np.sqrt(z) * (np.sqrt(2 / 3) * ct - np.sqrt(2 / 5) * st),
                np.sqrt(z) * (np.sqrt(2 / 3) * ct + np.sqrt(2 / 5) * st)])
plt.plot(Cr[0, :], Cr[1, :])
plt.plot(Gaz[0, :], Gaz[1, :])
plt.show()
```

L'exécution et le dessin illustrent les résultats ; les formules et la tangence sont démontrées en 7(d).

Relevé des adaptations

- 3(a)–(e) : l'espace est remplacé par $\mathbb{R}^p$ et les polynômes sont à coefficients réels. En 3(b)–(c), les constructions non réelles sont remplacées par des vecteurs sinus et cosinus, une base orthogonale réelle et des plans invariants explicites ; les sommes trigonométriques nécessaires sont guidées et démontrées. La diagonalisation réelle, qui n'est pas possible pour tous les p , est étudiée sans admettre de conclusion fausse.
- 3(d) : l'argument sur le degré d'un polynôme annulateur est conservé et traité directement par l'indépendance des images cycliques d'un vecteur de base.
- 3(e) : la diagonalisation et les valeurs propres de $P(u_p)$ sont reformulées dans le cadre réel, à partir des blocs calculés explicitement.
- 4(a)(ii) : les informations spectrales non réelles sont remplacées par la restriction réelle à $L \oplus H$, ses valeurs propres réelles et sa partie symétrique. Les questions dépendantes sont ainsi résolues sans utiliser d'objet supprimé.
- 6(c) : la non-annulation du gradient de la contrainte remplace la terminologie « contrainte non critique », sans modification du calcul demandé.
- 6(d)–(e) : la condition nécessaire sous contrainte non linéaire est remplacée par une paramétrisation complète de l'ellipse et la condition $g'(t_0) = 0$ pour une fonction

d'une variable ; les extrema et l'inégalité finale sont conservés.

- 7(b)–(c) : code adapté en Python, avec indices commençant à 0, imports fournis et blancs à compléter conservés. Les opérations sur tableaux et le contenu des lignes sont explicités.
- 7(b) et 7(d) : les figures sont retranscrites en SVG dans l'énoncé à partir des formules et des scripts de l'original. Les bornes, graduations et dispositions des graphiques sont conservées ; les courbes sont calculées exactement aux 100 angles prescrits plutôt que relevées approximativement sur le scan.