



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**HEC**

**Mathématiques**

**2013**

*Sujet de mathématiques approfondies*

---

**Mathématiques approfondies — Prépa ECG**

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, pour tout couple  $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$  :

- $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des matrices à  $p$  lignes et  $q$  colonnes à coefficients réels ;  $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$  est noté  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .
- La transposée d'une matrice  $A$  est notée  ${}^t A$ .
- $I_p$  désigne la matrice identité de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ . Pour toute matrice  $A$ , même nulle, on pose par convention  $A^0 = I_p$ .
- L'inverse d'une matrice inversible  $A$  est noté  $A^{-1}$ .

Soit  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de matrices de  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ , avec  $M_n = (m_{i,j}(n))$ . On dit que cette suite converge vers  $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$  si, pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_{i,j}(n) = m_{i,j}$ . On note alors  $M = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$ .

On admet que, si  $(A_n)$  et  $(B_n)$  dans  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$  convergent respectivement vers  $A$  et  $B$ , et si  $(C_n)$  dans  $\mathcal{M}_{q,s}(\mathbb{R})$ ,  $s \geq 1$ , converge vers  $C$ , alors  $(A_n + B_n)$  converge vers  $A + B$ ,  $(A_n C_n)$  converge vers  $AC$ , et, pour tout réel  $\alpha$ ,  $(\alpha A_n)$  converge vers  $\alpha A$ .

Le problème étudie quelques aspects mathématiques du contrôle de systèmes linéaires.

## Partie I. Quelques propriétés de suites matricielles

Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$T_{A,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (xA)^k.$$

1. Exemple. Dans cette question,  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  est définie par  $a_{i,j} = 1$  pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ .

1. (a) Justifier que  $A$  est diagonalisable.

1. (b) Soit  $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  la matrice-colonne dont tous les coefficients valent 1. Calculer  $AV$  et en déduire une valeur propre de  $A$ .
1. (c) Déterminer la dimension du noyau de  $A$ . Lorsque  $p \geq 2$ , montrer que 0 est une valeur propre de  $A$  et préciser la dimension du sous-espace propre associé. Préciser ce qui se passe lorsque  $p = 1$ .
1. (d) Exprimer  $A^2$  en fonction de  $A$ . Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_{A,n}(x) \in \text{Vect}(I_p, A)$ .
1. (e) En déduire que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la suite  $(T_{A,n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $T_A(x) = I_p + \frac{e^{px} - 1}{p}A$ .
1. (f) Calculer  $T_A(0)$ . Exprimer, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $T_A(x)T_A(y)$  en fonction de  $T_A(x+y)$ . En déduire que  $T_A(x)$  est inversible et déterminer son inverse pour tout réel  $x$ .
2. Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on pose  $A^k = (a_{i,j}^{(k)})$  et  $\mu_k = \max_{(i,j) \in \{1,\dots,p\}^2} |a_{i,j}^{(k)}|$ .
2. (a) À l'aide de  $A^{k+1} = AA^k$ , montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_{k+1} \leq p^k \mu_1^{k+1}$ .
2. (b) En déduire que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la série

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\mu_k}{k!} x^k$$

converge.

2. (c) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ , la série

$$\sum_{k \geq 0} \frac{a_{i,j}^{(k)}}{k!} x^k$$

converge.

2. (d) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(T_{A,n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice  $T_A(x) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ . Que vaut  $T_A(x)$  lorsque  $p = 1$  et que l'unique coefficient de  $A$  est le réel  $a$  ?

3. Soit  $D$  une matrice diagonale de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

3. (a) Vérifier que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_{D,n}(x)$  est diagonale.

3. (b) En déduire que  $T_D(x)$  est diagonale et donner l'expression de ses coefficients diagonaux en fonction de ceux de  $D$ .

3. (c) Pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $D_r = r(T_D(1/r) - I_p)$ . Montrer que  $(D_r)_{r \geq 1}$  converge vers  $D$ .

4. Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ ,  $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  inversible et  $A' = P^{-1}AP$ .

4. (a) Établir, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $T_{A'}(x) = P^{-1}T_A(x)P$ .

4. (b) On suppose  $A$  diagonalisable. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{n+1} \left( T_A \left( \frac{1}{r} \right) - T_{A,n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) = \frac{1}{(n+1)!} A^{n+1} \quad (*).$$

On pourra traiter dans un premier temps le cas où  $A$  est diagonale.

On admet dans la suite du problème que la relation  $(*)$  reste valable pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

## Partie II. Polynômes annulateurs et matrices de Kalman

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $p \geq 1$ ,  $\mathcal{L}(E)$  l'espace vectoriel de ses endomorphismes et  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ . On note  $\text{id}_E$  l'endomorphisme identité.

On utilise la factorisation réelle d'un polynôme en facteurs de degré 1 et de degré 2. Un facteur quadratique sans racine réelle peut, après normalisation, s'écrire  $(X - a)^2 + b^2$ , avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b > 0$ .

5. (a) Rappeler la dimension de  $\mathcal{L}(E)$  et justifier l'existence d'un polynôme annulateur non nul de  $\varphi$ , de degré au plus  $p^2$ . En déduire l'existence d'un polynôme annulateur de la forme  $Q_1 \cdots Q_r$ , où chaque  $Q_j$  est unitaire et vaut soit  $X - a_j$ , soit  $(X - a_j)^2 + b_j^2$ , avec  $a_j \in \mathbb{R}$  et  $b_j > 0$ .

5. (b) En considérant les endomorphismes  $Q_j(\varphi)$ , montrer qu'il existe un sous-espace non nul  $L$  stable par  $\varphi$ , de dimension 1 ou 2, possédant une base dans laquelle la

matrice de  $\varphi|_L$  est soit  $[a]$ , soit  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  avec  $b > 0$ .

Dans le cas quadratique, on pourra choisir  $v \neq 0$  dans  $\text{Ker}((\varphi - a \text{id}_E)^2 + b^2 \text{id}_E)$  et poser  $w = (\varphi(v) - av)/b$ .

6. On suppose qu'il existe un entier  $k$  vérifiant  $1 \leq k < p$  et un sous-espace  $F$  de dimension  $k$  stable par  $\varphi$ . Soit  $H$  un supplémentaire de  $F$  dans  $E$  et  $\pi$  le projecteur sur  $H$  parallèlement à  $F$ .
6. (a) Montrer qu'il existe un sous-espace non nul  $L \subset H$ , de dimension 1 ou 2, stable par l'endomorphisme  $\psi = (\pi \circ \varphi)|_H$  de  $H$ , et possédant une base dans laquelle la matrice de  $\psi|_L$  est de l'une des deux formes obtenues à la question 5(b).

6. (b) Montrer que la somme  $F + L$  est directe et stable par  $\varphi$ .
7. À l'aide des questions précédentes, établir par récurrence sur  $p$  l'existence d'une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice  $M$  de  $\varphi$  est triangulaire supérieure par blocs, avec des blocs diagonaux de taille 1 ou 2, chacun de l'une des deux formes de la question 5(b).

«Triangulaire supérieure par blocs» signifie que tous les blocs situés strictement sous les blocs diagonaux sont nuls.

8. Soient  $M$  et  $\mathcal{B}$  comme à la question 7. Notons  $D_1, \dots, D_r$  les blocs diagonaux,  $d_j \in \{1, 2\}$  leur taille et  $F_j$  le sous-espace engendré par les  $d_1 + \dots + d_j$  premiers vecteurs de  $\mathcal{B}$ , avec  $F_0 = \{0\}$ . À chaque bloc  $D_j$ , on associe le polynôme  $Q_j = X - a_j$

$$\text{si } D_j = [a_j], \text{ ou } Q_j = (X - a_j)^2 + b_j^2 \text{ si } D_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}.$$

8. (a) Montrer que  $Q_j(D_j) = 0$  et  $Q_j(\varphi)(F_j) \subset F_{j-1}$  pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ .
8. (b) En déduire que  $Q_1 \cdots Q_r$  est un polynôme annulateur réel de  $M$ , de degré  $p$ .
9. Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ . En utilisant la question 8(b), montrer que  $A$  admet un polynôme annulateur appartenant à  $\mathbb{R}[X]$  et de degré  $p$ .
10. Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ . Pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathcal{G}_q$  le sous-espace de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  engendré par  $B, AB, A^2B, \dots, A^{q-1}B$ , et  $K_q \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$  la matrice dont ces vecteurs sont les colonnes successives.

La matrice  $K_q$  est appelée matrice de Kalman d'ordre  $q$  associée au couple  $(A, B)$ .

10. (a) Montrer que, pour tout entier  $q \geq p$ ,  $\mathcal{G}_q = \mathcal{G}_p$ .
10. (b) Justifier l'existence d'un sous-espace  $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  tel que  $G \in \mathcal{G}_p$  si et seulement si  ${}^tSG = 0$  pour tout  $S \in \mathcal{S}$ .

10. (c) En déduire que, si une suite  $(G_n)$  d'éléments de  $\mathcal{G}_p$  converge vers  $G$ , alors  $G \in \mathcal{G}_p$ .
10. (d) À l'aide des résultats précédents, montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $T_A(x)B \in \mathcal{G}_p$ .

### Partie III. Contrôle de systèmes linéaires

On conserve les définitions et notations de la question 10. Dans les questions 12, 13 et 14,  $p$  est un entier supérieur ou égal à 2. On note  $C^0$  l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs réelles.

11. Exemple :  $p = 1$ . Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

11. (a) Soit  $u \in C^0$ . On cherche une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $[0, 1]$ , vérifiant  $f(0) = 0$  et  $f'(t) = af(t) + bu(t)$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Calculer la dérivée de  $h(t) = f(t)e^{-at}$  et en déduire que  $f$  est donnée par

$$f(t) = b \int_0^t u(x)e^{a(t-x)} dx \quad (**).$$

11. (b) On dit que  $(a, b)$  est contrôlable si, pour toute cible  $y \in \mathbb{R}$ , il existe un contrôle  $u \in C^0$  tel que toute fonction  $f$  vérifiant les conditions de 11(a) atteigne la cible en 1, c'est-à-dire  $f(1) = y$ . Donner l'expression de la fonction  $f$  définie par (\*\*) lorsque  $u$  est constante sur  $[0, 1]$ . En déduire que  $(a, b)$  est contrôlable si et seulement si  $b \neq 0$ .

12. Pour tout  $x \in [0, 1]$ , on pose  $W(x) = T_A(1-x)B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ , et on note  $W_k(x)$  le coefficient de sa  $k$ -ième ligne.

On admet que chaque fonction  $W_k$  appartient à  $C^0$ . Pour  $u \in C^0$ , on définit l'intégrale

matricielle coefficient par coefficient :

$$\int_0^1 u(x)W(x) dx = \begin{pmatrix} \int_0^1 u(x)W_1(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 u(x)W_p(x) dx \end{pmatrix}.$$

On dit que  $(A, B)$  est contrôlable si, pour toute cible  $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ , il existe un contrôle  $u \in C^0$  tel que  $\int_0^1 u(x)W(x) dx = Y$ .

12. (a) Soit  $u \in C^0$ . Justifier que  $u(x)W(x) \in \mathcal{G}_p$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . En déduire que  $\int_0^1 u(x)W(x) dx \in \mathcal{G}_p$ .

12. (b) Soit  $Z \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  non nul tel que  $\int_0^1 u(x)^t ZW(x) dx = 0$  pour toute fonction  $u \in C^0$ . Montrer que  ${}^t ZW(x) = 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .

12. (c) En déduire, à l'aide de la relation  $(*)$  de la question 4(b), que  ${}^t Z A^{k-1} B = 0$  pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$ .

12. (d) Déduire des résultats précédents que  $(A, B)$  est contrôlable si et seulement si la matrice de Kalman  $K_p$  est inversible.

Dans les questions 13 et 14, on suppose  $K_p$  inversible et on cherche à optimiser le contrôle discret d'un système linéaire en minimisant une fonction de coût quadratique  $J$ .

13. Soit  $q \geq p$  entier. Pour tout  $q$ -uplet  $s = (s_1, \dots, s_q) \in \mathbb{R}^q$ , appelé contrôle discret, on définit la suite finie  $(X_{s,k})_{0 \leq k \leq q}$  par  $X_{s,0} = 0$  et  $X_{s,k} = AX_{s,k-1} + s_k B$  pour  $1 \leq k \leq q$ .

13. (a) Calculer  $X_{s,q}$  et trouver  $C_s \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$  tel que  $X_{s,q} = K_q C_s$ .
13. (b) Établir, pour toute cible  $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ , l'existence d'un contrôle discret  $s$  tel que  $X_{s,q} = Y$ .
14. On cherche un contrôle discret optimal atteignant une cible  $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ . On définit  $J : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$J(s) = \sum_{k=1}^q s_k^2.$$

14. (a) On admet que  $K_q {}^t K_q$  est inversible. Montrer que le problème de minimisation de  $J$  sous la contrainte  $X_{s,q} = Y$  admet un unique point critique  $s^*$  donné par  $C_{s^*} = {}^t K_q (K_q {}^t K_q)^{-1} Y$ .
14. (b) Montrer que  $s^*$  réalise un minimum global de  $J$  sous la contrainte  $X_{s,q} = Y$ .