



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2013

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Partie I : Polynômes factoriels ascendants et lois binomiales négatives

- 1) a) On développe : $X^{<1>} = X$, $X^{<2>} = X(X+1) = X^2 + X$ et $X^{<3>} = X(X+1)(X+2) = X^3 + 3X^2 + 2X$. Donc :

$$X^{<2>} - X^{<1>} = X^2 \quad \text{et} \quad X^{<3>} - 3X^{<2>} + X^{<1>} = X^3 + 3X^2 + 2X - 3X^2 - 3X + X = X^3$$

Conclusion

$$X^2 = X^{<2>} - X^{<1>} \quad \text{et} \quad X^3 = X^{<3>} - 3X^{<2>} + X^{<1>}.$$

- b) $X^{<4>} = X^{<3>}(X+3) = X^4 + 6X^3 + 11X^2 + 6X$. Donc, avec a) et $X = X^{<1>}$:

$$X^4 = X^{<4>} - 6X^3 - 11X^2 - 6X = X^{<4>} - 6(X^{<3>} - 3X^{<2>} + X^{<1>}) - 11(X^{<2>} - X^{<1>}) - 6X^{<1>}$$

Conclusion

$$X^4 = X^{<4>} - 6X^{<3>} + 7X^{<2>} - X^{<1>}.$$

- c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X^{<k>}$ est un polynôme de degré exactement k (produit de k facteurs de degré 1, de coefficient dominant 1). Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(X^{<0>}, X^{<1>}, \dots, X^{<n>})$ est formée de $n+1$ polynômes de degrés deux à deux distincts $0, 1, \dots, n$: elle est libre (famille échelonnée en degré), et comme elle compte $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Le polynôme $X^n \in \mathbb{R}_n[X]$ s'écrit donc comme combinaison linéaire de $X^{<0>}, \dots, X^{<n>}$.

Conclusion

tout polynôme X^n est combinaison linéaire de polynômes factoriels ascendants.

2) a) Si $n \geq 1$,

$$r^{<n+1>} = \prod_{k=1}^{n+1} (r + k - 1) = r^{<n>} (r + n);$$

si $n = 0$, $r^{<1>} = r = r^{<0>} (r + 0)$.

Conclusion

$r^{<n+1>} = (r + n) r^{<n>}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On écrit $r + s + n = (r + k) + (s + n - k)$ et on applique a) aux deux facteurs :

$$\begin{aligned} (r + s + n) r^{<k>} s^{<n-k>} &= (r + k) r^{<k>} s^{<n-k>} + r^{<k>} (s + n - k) s^{<n-k>} \\ &= r^{<k+1>} s^{<n-k>} + r^{<k>} s^{<n-k+1>} \end{aligned}$$

Conclusion

la relation est établie.

c) Pour $n = 0$, les deux membres valent 1. Supposons la formule vraie au rang n . Avec a), l'hypothèse de récurrence, puis b) :

$$(r + s)^{<n+1>} = (r + s + n) (r + s)^{<n>} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (r^{<k+1>} s^{<n-k>} + r^{<k>} s^{<n+1-k>})$$

En posant $j = k + 1$ dans la première somme :

$$\begin{aligned}(r+s)^{<n+1>} &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} r^{<j>} s^{<n+1-j>} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{<k>} s^{<n+1-k>} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] r^{<k>} s^{<n+1-k>}\end{aligned}$$

avec les conventions $\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$. Par la formule de Pascal, le crochet vaut $\binom{n+1}{k}$.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(r+s)^{<n>} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{<k>} s^{<n-k>}.$$

3) a) Comme $r > 0$ et $x > 0$, $u_n > 0$. D'après 2) a) :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r^{<n+2>} x^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{r^{<n+1>} x^{n+1}} = \frac{(r+n+1)x}{n+1}$$

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x.$$

b) Comme $0 < x < 1$, on a $x < \frac{1+x}{2} < 1$. Par définition de la limite (avec l'écart $\frac{1-x}{2} > 0$), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{1+x}{2}$ pour tout $k \geq N$. Par récurrence

sur n : l'inégalité est une égalité pour $n = 0$, et si $u_{N+n} \leq u_N \left(\frac{1+x}{2} \right)^n$, alors

$$u_{N+n+1} \leq \frac{1+x}{2} u_{N+n} \leq u_N \left(\frac{1+x}{2} \right)^{n+1}.$$

Conclusion

il existe N tel que $u_{N+n} \leq u_N \left(\frac{1+x}{2} \right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- c) Pour tout n , $0 < u_{N+n} \leq u_N \left(\frac{1+x}{2} \right)^n$, et $\left(\frac{1+x}{2} \right)^n \rightarrow 0$ car $0 < \frac{1+x}{2} < 1$. Par encadrement :

Conclusion

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- d) La fonction $g : t \mapsto (1-t)^{-r}$ est de classe C^∞ sur $] -\infty, 1[$, qui contient le segment $[0, x]$. Par récurrence, $g^{(k)}(t) = r^{<k>} (1-t)^{-r-k}$: c'est vrai pour $k=0$, et si c'est vrai au rang k ,

$$g^{(k+1)}(t) = r^{<k>} (r+k) (1-t)^{-r-k-1} = r^{<k+1>} (1-t)^{-r-k-1}$$

par 2) a).

Formule de Taylor avec reste intégral : si g est de classe C^{n+1} sur un intervalle contenant 0 et x , alors

$$g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) dt$$

Ici $g^{(k)}(0) = r^{<k>}$ et :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} r^{<n+1>} (1-t)^{-r-n-1} dt = \frac{r^{<n+1>}}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t} \right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}} dt = R_n$$

Conclusion

$$(1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^n \frac{r^{<k>}}{k!} x^k + R_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) Soit $t \in [0, x]$; on a $1-t > 0$ et $x-t \geq 0$, donc $\frac{x-t}{1-t} \geq 0$. De plus

$$\frac{x-t}{1-t} \leq x \iff x-t \leq x-xt \iff t(1-x) \geq 0, \text{ ce qui est vrai.}$$

Pour $t \in [0, x]$, on a donc $0 \leq \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leq x^n$ et $0 < \frac{1}{(1-t)^{r+1}} \leq \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$ (car $0 < 1-x \leq 1-t$ et $r+1 > 0$). Par croissance de l'intégrale sur le segment $[0, x]$:

$$0 \leq R_n \leq \frac{r^{<n+1>}}{n!} \int_0^x \frac{x^n}{(1-x)^{r+1}} dt = \frac{r^{<n+1>} x^{n+1}}{n!(1-x)^{r+1}} = u_n$$

Conclusion

$$0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x \text{ pour } t \in [0, x], \text{ et } 0 \leq R_n \leq u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

f) D'après e) et c), $R_n \rightarrow 0$ par encadrement. Par d), la somme partielle

$$\sum_{k=0}^n \frac{r^{<k>}}{k!} x^k = (1-x)^{-r} - R_n$$

tend vers $(1-x)^{-r}$.

Conclusion

la série

$$\sum \frac{r^{<n>}}{n!} x^n$$

converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^{<n>}}{n!} x^n = \frac{1}{(1-x)^r}.$$

4) On applique 3) f) avec $x = 1 - p \in]0, 1[$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{<k>}}{k!} p^r (1-p)^k = p^r \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^r} = p^r \cdot p^{-r} = 1$$

Conclusion

l'égalité est vérifiée. Comme de plus $\frac{r^{<k>}}{k!} p^r (1-p)^k > 0$, la loi $BN(r, p)$ est bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.

5) a) Notons $q = 1 - p$ et, pour $j \in \mathbb{N}$,

$$P_n(j) = \prod_{k=1}^n (j - k + 1) = j(j-1) \cdots (j-n+1).$$

Si $j < n$, le facteur d'indice $k = j + 1 \leq n$ est nul, donc $P_n(j) = 0$; si $j \geq n$,

$P_n(j) = \frac{j!}{(j-n)!} \geq 0$. Par le théorème de transfert, $X_n = P_n(X)$ admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_j P_n(j) P([X = j]),$$

à termes positifs, converge. Pour $j \geq n$:

$$P_n(j) P([X = j]) = \frac{j!}{(j-n)!} \cdot \frac{r^{<j>}}{j!} p^r q^j = \frac{r^{<j>}}{(j-n)!} p^r q^j$$

En séparant les n premiers facteurs,

$$r^{<j>} = r^{<n>} \prod_{i=1}^{j-n} (r + n + i - 1) = r^{<n>} (r + n)^{<j-n>}.$$

Avec $m = j - n$ et 3) f) appliquée au réel $r + n > 0$ et à $x = q$:

$$\sum_{j \geq n} P_n(j) P([X = j]) = r^{<n>} p^r q^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(r + n)^{<m>}}{m!} q^m = r^{<n>} p^r q^n \cdot p^{-(r+n)}$$

Conclusion

$$X_n \text{ admet une espérance et } E(X_n) = r^{<n>} \left(\frac{1-p}{p} \right)^n.$$

b) Pour $k \in \mathbb{N}$, notons

$$Q_k(Y) = \prod_{i=1}^k (Y - i + 1)$$

(avec $Q_0 = 1$) : Q_k est un polynôme de degré k . Comme en 1) c), pour tout $m \in \mathbb{N}$, la famille $(Q_0, \dots, Q_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[Y]$, donc il existe des réels $c_0, \dots, c_m$ tels que

$$Y^m = \sum_{k=0}^m c_k Q_k(Y).$$

Ainsi

$$X^m = \sum_k c_k X_k$$

(avec $X_0 = 1$), et chaque X_k admet une espérance par a) : par linéarité, X^m admet une espérance.

Calculs, avec $q = 1 - p$: $E(X) = E(X_1) = \frac{rq}{p}$ et $E(X(X-1)) = E(X_2) = r(r+1)\frac{q^2}{p^2}$.
Donc :

$$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \frac{r(r+1)q^2}{p^2} + \frac{rq}{p} - \frac{r^2q^2}{p^2} = \frac{rq^2 + rqp}{p^2} = \frac{rq}{p^2}$$

Conclusion

X admet des moments de tous ordres, $E(X) = \frac{r(1-p)}{p}$ et $V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

6) Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, par la formule des probabilités totales et l'indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned} P([Z = n]) &= \sum_{k=0}^n P([X = k])P([Y = n - k]) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{r^{<k>}}{k!} p^r (1-p)^k \frac{s^{<n-k>}}{(n-k)!} p^s (1-p)^{n-k} = \frac{p^{r+s} (1-p)^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{<k>} s^{<n-k>} \end{aligned}$$

D'après 2) c), la somme vaut $(r+s)^{<n>}$.

Conclusion

$P([Z = n]) = \frac{(r+s)^{<n>}}{n!} p^{r+s} (1-p)^n$ pour tout n : Z suit la loi $BN(r+s, p)$.

Partie II : Inégalités stochastiques

7) Soit x réel. Si $X(\omega) \geq x$, alors $Y(\omega) \geq X(\omega) \geq x$: $[X \geq x] \subset [Y \geq x]$, d'où
 $P([X \geq x]) \leq P([Y \geq x])$ par croissance de P .

Conclusion

X est stochastiquement inférieure à Y .

- 8) a) $X + 1$ et $Y - 1$ suivent la loi normale centrée réduite. Par indépendance, puis par la relation $\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$:

$$P([X \geq 0] \cap [Y < 0]) = P([X + 1 \geq 1]) P([Y - 1 < -1]) = (1 - \Phi(1)) \Phi(-1)$$

Conclusion

$$P([X \geq 0] \cap [Y < 0]) = (1 - \Phi(1))^2.$$

- b) Pour x réel, $P([X \geq x]) = 1 - \Phi(x + 1)$ et $P([Y \geq x]) = 1 - \Phi(x - 1)$. Comme Φ est croissante et $x - 1 < x + 1$, $\Phi(x - 1) \leq \Phi(x + 1)$.

Conclusion

$$P([X \geq x]) \leq P([Y \geq x]) \text{ pour tout } x : X \text{ est stochastiquement inférieure à } Y.$$

- c) L'événement $[X \geq 0] \cap [Y < 0]$ est de probabilité $(1 - \Phi(1))^2 > 0$ (car $\Phi(1) < 1$), donc il est non vide : pour ω dans cet événement, $X(\omega) \geq 0 > Y(\omega)$.

Conclusion

non ; la domination stochastique n'entraîne pas l'inégalité point par point (la réciproque de 7) est fausse).

- 9) Sens direct. Supposons X stochastiquement inférieure à Y . Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme X est à valeurs entières, $[X \leq k]$ est le complémentaire de $[X \geq k + 1]$, et de même pour Y . Avec $x = k + 1$: $1 - P([X \leq k]) \leq 1 - P([Y \leq k])$, soit $P([X \leq k]) \geq P([Y \leq k])$.

Sens réciproque. Supposons $P([X \leq k]) \geq P([Y \leq k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et soit x réel. Si $x \leq 0$, $P([X \geq x]) = P([Y \geq x]) = 1$. Si $x > 0$, soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k < x \leq k + 1$; comme X

et Y sont à valeurs entières, $[X \geq x] = [X \geq k + 1]$ et $[Y \geq x] = [Y \geq k + 1]$, donc :

$$P([X \geq x]) = 1 - P([X \leq k]) \leq 1 - P([Y \leq k]) = P([Y \geq x])$$

Conclusion

X est stochastiquement inférieure à Y si et seulement si $P([X \leq k]) \geq P([Y \leq k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- 10) a) Résultat de cours : si X et Z sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres a et b , alors $X + Z$ suit la loi de Poisson de paramètre $a + b$.

Conclusion

$X + Z$ suit la loi de Poisson de paramètre $\theta + (\lambda - \theta) = \lambda$.

- b) Comme Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $X(\omega) \leq X(\omega) + Z(\omega)$ pour tout ω . D'après 7), pour tout réel x , $P([X \geq x]) \leq P([X + Z \geq x])$. Or $X + Z$ et Y ont la même loi (question a)), donc $P([X + Z \geq x]) = P([Y \geq x])$.

Conclusion

X est stochastiquement inférieure à Y .

- 11) a) Code adapté en Python. La fonction Pascal suite(k : integer ; t : real) : real est remplacée par une fonction Python `def suite(k, t) :`

On calcule les termes $a_j = \frac{t^j}{j!} e^{-t}$ par la récurrence $a_0 = e^{-t}$, $a_j = a_{j-1} \times \frac{t}{j}$, ce qui évite de calculer séparément des puissances et des factorielles, et on les additionne.

Python

```
import numpy as np

def suite(k, t):
    terme = np.exp(-t)          # terme d'indice 0 : e^(-t)
    S = terme
    for j in range(1, k + 1):    # j = 1, 2, ..., k
        terme = terme * t / j    # passage de t^(j-1)/(j-1)! e^(-t) à t^j/j! e^(-t)
        S = S + terme
    return S
```

Ce code a été exécuté : `suite(4, 3.7)` renvoie environ 0,6872, en accord avec la fréquence empirique de $[X \leq 4]$ pour 10^6 simulations d'une loi de Poisson de paramètre 3,7 (observation, non preuve ; on remarque en effet que $F(t, k) = P([X_t \leq k])$ si X_t suit la loi de Poisson de paramètre t).

Conclusion

la fonction `suite` renvoie $F(t, k)$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto F(t, k)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, k) = \sum_{j=1}^k \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{-t} - \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} e^{-t} = -\frac{t^k}{k!} e^{-t} < 0$$

(la première somme, réindexée, est égale à la seconde privée de son dernier terme). Elle est donc continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Quand $t \rightarrow 0^+$, $F(t, k) \rightarrow 1$ (seul le terme $j = 0$ ne tend pas vers 0) ; quand $t \rightarrow +\infty$, chaque terme $\frac{t^j}{j!} e^{-t}$ tend vers 0 par croissances comparées, donc $F(t, k) \rightarrow 0$. Par le théorème de la bijection, $t \mapsto F(t, k)$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$.

Conclusion

pour tout $\beta \in]0, 1[$, il existe un unique réel $M(\beta, k) > 0$ tel que $F(M(\beta, k), k) = \beta$.

- 12)** a) La fonction G est croissante sur $\mathbb{R}$, avec $G(k) \rightarrow 1$ quand $k \rightarrow +\infty$. Comme $\alpha < 1$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $G(k) \geq \alpha$: l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} ; G(k) \geq \alpha\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, qui admet un plus petit élément L_α . Par définition, $G(L_\alpha) \geq \alpha$. Si $L_\alpha \geq 1$, $L_\alpha - 1 \in \mathbb{N}$ n'est pas dans l'ensemble, donc $G(L_\alpha - 1) < \alpha$; si $L_\alpha = 0$, $G(-1) = P([X \leq -1]) = 0 < \alpha$.

Conclusion

L_α existe et $G(L_\alpha - 1) < \alpha \leq G(L_\alpha)$.

- b)** Pour $k \in \mathbb{N}$: si $k \geq L_\alpha$, alors $G(k) \geq G(L_\alpha) \geq \alpha$; si $k < L_\alpha$, alors $G(k) < \alpha$ par minimalité de L_α . Donc $G(k) < \alpha \iff k \leq L_\alpha - 1$ et $G(k - 1) \geq \alpha \iff k - 1 \geq L_\alpha$. Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$[W < \alpha] = [X \leq L_\alpha - 1] \quad \text{et} \quad [V \geq \alpha] = [X \geq L_\alpha + 1]$$

Ce sont des événements, puisque X est une variable aléatoire.

Plus généralement, $W = g(X)$ et $V = h(X)$ avec $g(k) = G(k)$ et $h(k) = G(k - 1)$: ce sont des fonctions de la variable discrète X , à valeurs dans l'ensemble au plus dénombrable $\{G(k) ; k \geq -1\}$, et pour toute valeur w , $[W = w]$ est la réunion au plus dénombrable des événements $[X = k]$ tels que $G(k) = w$.

Conclusion

$[W < \alpha]$ et $[V \geq \alpha]$ sont des événements, et V et W sont des variables aléatoires discrètes, à valeurs dans $[0, 1]$.

- c)** D'après b) :

Conclusion

$$P([W < \alpha]) = G(L_\alpha - 1) \text{ et } P([V \geq \alpha]) = 1 - G(L_\alpha).$$

d) On a $P([U \geq x]) = 1$ si $x \leq 0$, $1 - x$ si $0 \leq x \leq 1$, et 0 si $x \geq 1$. Les variables V et W sont à valeurs dans $[0, 1]$.

V est stochastiquement inférieure à U .

- Si $x \leq 0$: $P([V \geq x]) \leq 1 = P([U \geq x])$.
- Si $0 < x < 1$: par c) et a), $P([V \geq x]) = 1 - G(L_x) \leq 1 - x = P([U \geq x])$.
- Si $x \geq 1$: pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $[V \geq x] \subset [V \geq \alpha]$, donc $P([V \geq x]) \leq 1 - G(L_\alpha) \leq 1 - \alpha$.
En faisant tendre α vers 1, $P([V \geq x]) \leq 0 = P([U \geq x])$.

U est stochastiquement inférieure à W .

- Si $x \leq 0$: $P([W \geq x]) = 1 \geq P([U \geq x])$.
- Si $0 < x < 1$: par c) et a), $P([W \geq x]) = 1 - G(L_x - 1) > 1 - x = P([U \geq x])$.
- Si $x \geq 1$: $P([U \geq x]) = 0 \leq P([W \geq x])$.

Conclusion

V est stochastiquement inférieure à U , et U est stochastiquement inférieure à W .

13) a) $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$ est une fonction de l'échantillon ne dépendant pas de θ , et par linéarité

$$E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k) = \theta.$$

Conclusion

$\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$ est un estimateur sans biais de θ .

- b) Par stabilité de la loi de Poisson (les X_k étant indépendantes), S_n suit la loi de Poisson de paramètre $n\theta$. Sa fonction de répartition G vérifie

$$G(k) = \sum_{j=0}^k \frac{(n\theta)^j}{j!} e^{-n\theta} = F(n\theta, k)$$

pour $k \in \mathbb{N}$, et $G(-1) = 0 = F(n\theta, -1)$ avec la convention de l'énoncé. On applique 12) à $X = S_n : W = G(S_n) = F(n\theta, S_n)$ et $V = G(S_n - 1) = F(n\theta, S_n - 1)$.

- Avec $\alpha' = \frac{\alpha}{2} \in]0, 1[, 12)$ c) et 12) a) : $P\left(\left[F(n\theta, S_n) < \frac{\alpha}{2}\right]\right) = G(L_{\alpha'} - 1) < \frac{\alpha}{2}$.
- Avec $\alpha'' = 1 - \frac{\alpha}{2} \in]0, 1[:$

$$P\left(\left[F(n\theta, S_n - 1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}\right]\right) = 1 - G(L_{\alpha''}) \leq 1 - \alpha'' = \frac{\alpha}{2}.$$

Conclusion

les deux inégalités sont établies.

- c) I et J sont des fonctions de l'échantillon qui ne dépendent pas de θ : ce sont des estimateurs. On utilise la stricte décroissance de $t \mapsto F(t, k)$ (question 11) b)).

- Sur $[S_n = k], k \in \mathbb{N} :$

$$F(n\theta, k) < \frac{\alpha}{2} = F\left(M\left(\frac{\alpha}{2}, k\right), k\right) \iff n\theta > M\left(\frac{\alpha}{2}, k\right).$$

$$\text{Donc } \left[F(n\theta, S_n) < \frac{\alpha}{2}\right] = [\theta > J].$$

- Sur $[S_n = k]$ avec $k \geq 1$:

$$F(n\theta, k-1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2} = F\left(M\left(1 - \frac{\alpha}{2}, k-1\right), k-1\right) \iff n\theta \leq M\left(1 - \frac{\alpha}{2}, k-1\right) \\ \iff \theta \leq I.$$

Sur $[S_n = 0]$, $F(n\theta, -1) = 0 < 1 - \frac{\alpha}{2}$ et $\theta > 0 = I$: les deux conditions sont fausses.

$$\text{Donc } \left[F(n\theta, S_n - 1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2} \right] = [\theta \leq I].$$

Par b) :

$$P([I \leq \theta \leq J]) \geq 1 - P([\theta > J]) - P([\theta < I]) \geq 1 - P([\theta > J]) - P([\theta \leq I]) \geq 1 - \frac{\alpha}{2} \\ - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$$

De plus $I < J$: c'est clair si $S_n = 0$; si $S_n = k \geq 1$, en posant $t_0 = M\left(1 - \frac{\alpha}{2}, k-1\right)$, on a

$$F(t_0, k) > F(t_0, k-1) = 1 - \frac{\alpha}{2} > \frac{\alpha}{2} = F\left(M\left(\frac{\alpha}{2}, k\right), k\right),$$

donc $t_0 < M\left(\frac{\alpha}{2}, k\right)$ par décroissance.

Conclusion

$[I, J]$ est un intervalle de confiance de θ de niveau au moins $1 - \alpha$, c'est-à-dire de risque inférieur ou égal à α . (Une simulation avec $\theta = 0,8$, $n = 5$, $\alpha = 0,1$ donne un taux de couverture d'environ 0,96, cohérent avec ce résultat ; ce n'est pas une preuve.)

Partie III : Lois de Poisson mélangées

14) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $h_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$ (croissances comparées) ; elle est donc bornée sur $[0, +\infty[$ par un réel C_n (on peut prendre $C_n = n^n e^{-n}$, son maximum, avec $0^0 = 1$). Sur $]0, +\infty[$:

$$0 \leq t^n e^{-t} f(t) \leq C_n f(t)$$

et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge (et vaut 1, car f est une densité nulle sur $\mathbb{R}_-$). L'intégrande est continue sur $]0, +\infty[$; par comparaison de fonctions positives :

Conclusion

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} f(t) dt \text{ converge pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

15) a) Par linéarité des intégrales convergentes, et puisque $\int_0^{+\infty} f = 1$:

$$1 - v_n = \int_0^{+\infty} f(t) dt - \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} e^{-t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} (1 - F(t, n)) f(t) dt$$

Pour $t > 0$, $F(t, n)$ est la probabilité qu'une variable de Poisson de paramètre t soit inférieure ou égale à n , donc $0 \leq 1 - F(t, n) \leq 1$: l'intégrande est positive et $1 - v_n \geq 0$.

Pour la majoration, on coupe en A (relation de Chasles). Sur $]0, A]$, $t \mapsto 1 - F(t, n)$ est croissante (question 11) b)), donc $1 - F(t, n) \leq 1 - F(A, n) = P([X_A > n])$. Sur $[A, +\infty[$, $1 - F(t, n) \leq 1$. Ainsi :

$$1 - v_n \leq P([X_A > n]) \int_0^A f(t) dt + \int_A^{+\infty} f(t) dt \leq P([X_A > n]) + \int_A^{+\infty} f(t) dt$$

Conclusion

$$0 \leq 1 - v_n \leq P([X_A > n]) + \int_A^{+\infty} f(t) dt \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\int_0^{+\infty} f$ converge, $\int_A^{+\infty} f \rightarrow 0$ quand $A \rightarrow +\infty$: on fixe $A > 0$ tel que $\int_A^{+\infty} f \leq \varepsilon$. Pour ce A , $P([X_A > n]) = 1 - P([X_A \leq n]) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ (les sommes partielles de la loi de Poisson tendent vers 1). Il existe donc n_0 tel que $P([X_A > n]) \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$, et alors $0 \leq 1 - v_n \leq 2\varepsilon$.

Conclusion

$v_n \rightarrow 1$: la série

$$\sum z_n$$

(à termes positifs) converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = 1.$$

Ainsi la définition de la loi $\mathcal{P}_f$ a un sens.

16) a) Question adaptée au programme actuel : le référentiel ne connaît la loi gamma que pour le taux 1. Au lieu de « reconnaître la loi de T », on montre que bT suit la loi gamma de paramètre r , avec $b = \frac{p}{1-p} > 0$, et on en déduit les moments de T .

Posons $U = bT$. Pour x réel, $F_U(x) = P([T \leq x/b]) = F_T(x/b)$; F_U est continue et de classe C^1 sauf peut-être en 0, et une densité de U est $x \mapsto \frac{1}{b} f\left(\frac{x}{b}\right)$. Pour $x > 0$:

$$\frac{1}{b} f\left(\frac{x}{b}\right) = \frac{1}{b} \cdot \frac{b^r}{\Gamma(r)} \left(\frac{x}{b}\right)^{r-1} e^{-x} = \frac{x^{r-1} e^{-x}}{\Gamma(r)}$$

et cette densité est nulle pour $x \leq 0$: U suit la loi gamma de paramètre r (de taux 1).
D'après le cours, $E(U) = V(U) = r$. Comme $T = \frac{U}{b}$:

Conclusion

$$\frac{p}{1-p}T \text{ suit la loi gamma de paramètre } r, \quad E(T) = \frac{r}{b} = \frac{r(1-p)}{p} \text{ et } V(T) = \frac{r}{b^2} = \frac{r(1-p)^2}{p^2}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec $1 + b = \frac{1}{1-p}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-t} f(t) dt = \frac{b^r}{n! \Gamma(r)} \int_0^{+\infty} t^{n+r-1} e^{-\frac{t}{1-p}} dt$$

Le changement de variable affine $t = (1-p)u$ donne

$$\int_0^{+\infty} t^{n+r-1} e^{-t/(1-p)} dt = (1-p)^{n+r} \int_0^{+\infty} u^{n+r-1} e^{-u} du = (1-p)^{n+r} \Gamma(n+r).$$

Par la relation $\Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu)$ appliquée n fois,

$$\Gamma(n+r) = (r+n-1)(r+n-2) \cdots r \Gamma(r) = r^{<n>} \Gamma(r).$$

Donc :

$$P([X = n]) = \frac{r^{<n>} \Gamma(r)}{n! \Gamma(r)} \cdot \frac{p^r}{(1-p)^r} \cdot (1-p)^{n+r} = \frac{r^{<n>}}{n!} p^r (1-p)^n$$

Conclusion

$\mathcal{P}_f$ est la loi binomiale négative $BN(r, p)$.

17) a) Méthode 1 — Par la question 6) et la question 7).

On utilise, comme il est usuel, l'existence de deux variables aléatoires indépendantes Y_1 et Y_2 définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de lois respectives $BN(r, p)$ et $BN(s - r, p)$ (avec $s - r > 0$). D'après 6), $Y_1 + Y_2$ suit la loi $BN(s, p)$, c'est-à-dire la loi de Z . Comme $Y_2 \geq 0$, $Y_1 \leq Y_1 + Y_2$ en tout point, et 7) donne, pour tout réel x :

$$P([Y \geq x]) = P([Y_1 \geq x]) \leq P([Y_1 + Y_2 \geq x]) = P([Z \geq x])$$

Méthode 2 — Par la question 9), sans construire de variables.

Notons $b_k = \frac{r^{<k>}}{k!} p^r (1-p)^k$ et $c_m = \frac{(s-r)^{<m>}}{m!} p^{s-r} (1-p)^m$ les probabilités des lois $BN(r, p)$ et $BN(s - r, p)$. Le calcul de 6), qui n'utilise que 2) c), donne l'identité numérique

$$P([Z = n]) = \sum_{k=0}^n b_k c_{n-k}.$$

Pour $j \in \mathbb{N}$, en échangeant deux sommes finies :

$$P([Z \leq j]) = \sum_{n=0}^j \sum_{k=0}^n b_k c_{n-k} = \sum_{k=0}^j b_k \sum_{m=0}^{j-k} c_m \leq \sum_{k=0}^j b_k = P([Y \leq j])$$

car

$$\sum_{m=0}^{j-k} c_m \leq \sum_{m=0}^{+\infty} c_m = 1.$$

D'après 9), Y est stochastiquement inférieure à Z .

La méthode 1 donne l'intuition (on obtient Z en ajoutant à Y une quantité positive), mais utilise l'existence admise de variables indépendantes de lois données ; la méthode 2 ne manipule que les lois, à l'aide de sommes finies.

Conclusion

Y est stochastiquement inférieure à Z .

b) Montrons d'abord que Z est stochastiquement inférieure à W . Notons $b = \frac{p}{1-p}$ et $b' = \frac{q}{1-q}$; comme $x \mapsto \frac{x}{1-x}$ est strictement croissante sur $]0, 1[$ et $q < p$, on a $0 < b' < b$. Notons $g_s(u) = \frac{u^{s-1}e^{-u}}{\Gamma(s)}$ pour $u > 0$.

D'après 16) b), Z suit la loi $\mathcal{P}_f$ pour la densité f de 16) associée à (s, p) . Pour $k \in \mathbb{N}$, par linéarité (somme finie) puis par le changement de variable affine $u = bt$:

$$P([Z \leq k]) = \sum_{n=0}^k \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} F(t, k) f(t) dt = \int_0^{+\infty} F\left(\frac{u}{b}, k\right) g_s(u) du$$

car $f(t) dt = \frac{b^s}{\Gamma(s)} t^{s-1} e^{-bt} dt = g_s(u) du$. De même,

$$P([W \leq k]) = \int_0^{+\infty} F\left(\frac{u}{b'}, k\right) g_s(u) du. \text{ Pour } u > 0, \quad \frac{u}{b} < \frac{u}{b'}, \text{ et } t \mapsto F(t, k) \text{ est}$$

décroissante (question 11) b)), donc $F\left(\frac{u}{b}, k\right) \geq F\left(\frac{u}{b'}, k\right)$. Comme $g_s \geq 0$, la croissance de l'intégrale donne $P([Z \leq k]) \geq P([W \leq k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et par 9), Z est stochastiquement inférieure à W .

Enfin, avec a), pour tout réel x : $P([Y \geq x]) \leq P([Z \geq x]) \leq P([W \geq x])$.

Conclusion

Y est stochastiquement inférieure à W . (Interprétation : W correspond à une intensité de Poisson $\frac{U}{b'}$ plus grande que l'intensité $\frac{U}{b}$ de Z .)

Relevé des adaptations

- 11) a) : Code adapté en Python. La fonction Pascal `suite(k : integer ; t : real) : real` devient la fonction Python `def suite(k, t) :` ; l'usage de `np.exp` est indiqué dans l'énoncé. Justification : seul Python est autorisé.
- 13) : rectification d'un oubli du document fourni. La convention $F(t, -1) = 0$ est ajoutée. Justification : $F(n\theta, S_n - 1)$ intervient en 13) b) alors que $S_n - 1$ vaut -1 sur $[S_n = 0]$, et $F(t, k)$ n'était défini que pour $k \in \mathbb{N}$; cette convention correspond à $G(-1) = 0$ dans la question 12).
- 16) a) : Question adaptée au programme actuel. « Reconnaître la loi de T . Donner (sans démonstration) l'espérance et la variance de T » devient « Montrer que $\frac{p}{1-p}T$ suit la loi gamma de paramètre r . En déduire l'espérance et la variance de T ». Justification : le référentiel ne connaît la loi gamma qu'avec le taux 1.