



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques

2013

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé — HEC, mathématiques, option scientifique, 2013

Partie I. Quelques propriétés de suites matricielles

La convergence d'une suite de matrices est toujours entendue coefficient par coefficient, comme dans l'énoncé. Les passages à la limite dans les sommes et produits de matrices utilisent les propriétés admises dans le préambule.

1. (a) Diagonalisation de la matrice de coefficients 1

Méthode 1 — Théorème spectral

La matrice A est réelle et symétrique, car $a_{i,j} = a_{j,i} = 1$. Le théorème spectral assure qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormale, donc diagonalisable sur les réels.

Méthode 2 — Construction d'une base de vecteurs propres

Notons $e_1, \dots, e_p$ les colonnes de la base canonique et $V = e_1 + \dots + e_p$. Pour toute colonne $U = (u_1, \dots, u_p)^t$, chaque ligne du produit donne

$$AU = (u_1 + \dots + u_p)V.$$

Ainsi $AV = pV$ et $A(e_i - e_p) = 0$ pour $1 \leq i < p$. Pour $p \geq 2$, la famille $(V, e_1 - e_p, \dots, e_{p-1} - e_p)$ est libre : dans une combinaison nulle, la somme des coordonnées donne p fois le coefficient de V , donc ce coefficient est nul ; les $p - 1$ premières coordonnées donnent ensuite la nullité des autres coefficients.

Cette famille de p vecteurs est donc une base de vecteurs propres. Pour $p = 1$, la seule colonne V est déjà une telle base. Dans tous les cas, A est diagonalisable.

La première méthode reconnaît une symétrie ; la seconde fournit explicitement les directions propres.

1. (b) Calcul de AV

Chaque coefficient de AV est la somme de p nombres égaux à 1, donc $AV = pV$. Comme $V \neq 0$, p est une valeur propre de A et V un vecteur propre associé.

1. (c) Noyau et valeur propre 0

Question adaptée au programme actuel : la présence de la valeur propre 0 n'est affirmée que pour $p \geq 2$. Dans le PDF, cette affirmation sans restriction est fausse pour $p = 1$, où $A = [1]$.

Pour $U = (u_1, \dots, u_p)^t$,

$$AU = \left(\sum_i u_i \right) V.$$

Puisque $V \neq 0$,

$$AU = 0 \iff \sum_{i=1}^p u_i = 0.$$

Le noyau est donc l'hyperplan défini par une forme linéaire non nulle, et $\dim \text{Ker } A = p - 1$. On peut aussi appliquer le théorème du rang : l'image est $\text{Vect}(V)$, de dimension 1, car $AV = pV \neq 0$; ainsi $\dim \text{Ker } A = p - 1$.

Pour $p \geq 2$, ce noyau contient des vecteurs non nuls. Le réel 0 est alors une valeur propre et son sous-espace propre est $\text{Ker } A$, de dimension $p - 1$. Pour $p = 1$, le noyau est réduit à $\{0\}$ et 0 n'est pas une valeur propre; la seule valeur propre est 1.

1. (d) Puissances de A

Pour tout (i, j) ,

$$(A^2)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^p a_{i,\ell} a_{\ell,j} = p.$$

Ainsi $A^2 = pA$.

Une récurrence donne $A^k = p^{k-1}A$ pour tout $k \geq 1$: la formule est vraie pour $k = 1$, et $A^{k+1} = p^{k-1}A^2 = p^kA$.

Par conséquent,

$$T_{A,n}(x) = I_p + \left(\sum_{k=1}^n \frac{p^{k-1}x^k}{k!} \right) A \in \text{Vect}(I_p, A).$$

Pour $n = 0$, la somme entre parenthèses est vide et $T_{A,0}(x) = I_p$, ce qui appartient également à cet espace.

1. (e) Limite de $T_{A,n}(x)$

La série exponentielle converge pour tout réel px , et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^{k-1}x^k}{k!} = \frac{1}{p} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(px)^k}{k!} - 1 \right) = \frac{e^{px} - 1}{p}.$$

Le nombre p est strictement positif. En prenant la limite dans la formule de 1(d), coefficient par coefficient,

$$T_A(x) = I_p + \frac{e^{px} - 1}{p} A.$$

1. (f) Produit et inverse de $T_A(x)$

On a immédiatement $T_A(0) = I_p$.

Méthode 1 — Développement du produit

Posons $c_x = (e^{px} - 1)/p$. Avec $A^2 = pA$,

$$T_A(x)T_A(y) = (I_p + c_x A)(I_p + c_y A) = I_p + (c_x + c_y + pc_x c_y)A.$$

Or

$$c_x + c_y + pc_x c_y = \frac{e^{px} - 1 + e^{py} - 1 + (e^{px} - 1)(e^{py} - 1)}{p} = \frac{e^{p(x+y)} - 1}{p}.$$

Ainsi $T_A(x)T_A(y) = T_A(x+y)$. En prenant $y = -x$, les deux produits $T_A(x)T_A(-x)$ et $T_A(-x)T_A(x)$ valent I_p . Donc $T_A(x)$ est inversible et

$$T_A(x)^{-1} = T_A(-x) = I_p + \frac{e^{-px} - 1}{p}A.$$

Méthode 2 — Décomposition à l'aide d'un projecteur

Posons $P_0 = A/p$. L'identité $A^2 = pA$ donne $P_0^2 = P_0$. On a

$$T_A(x) = (I_p - P_0) + e^{px}P_0.$$

Les produits croisés sont nuls : $(I_p - P_0)P_0 = P_0(I_p - P_0) = 0$, et $(I_p - P_0)^2 = I_p - P_0$. Ainsi,

$$T_A(x)T_A(y) = (I_p - P_0) + e^{p(x+y)}P_0 = T_A(x+y).$$

Le produit avec $(I_p - P_0) + e^{-px}P_0$ est I_p , dans les deux ordres ; c'est donc l'inverse $T_A(-x)$. Cette méthode distingue l'action sur le noyau du projecteur, où la matrice agit comme l'identité, et sur son image, où elle multiplie par e^{px} .

2. (a) Majoration des coefficients des puissances

Pour chaque (i, j) , l'identité $A^{k+1} = AA^k$ donne

$$|a_{i,j}^{(k+1)}| = \left| \sum_{\ell=1}^p a_{i,\ell} a_{\ell,j}^{(k)} \right| \leq \sum_{\ell=1}^p \mu_1 \mu_k = p \mu_1 \mu_k.$$

On en déduit $\mu_{k+1} \leq p\mu_1\mu_k$. Établissons maintenant la borne demandée par récurrence sur k .

Pour $k = 0$, $\mu_1 \leq p^0\mu_1$ est une égalité. Si $\mu_{k+1} \leq p^k\mu_1^{k+1}$, alors

$$\mu_{k+2} \leq p\mu_1\mu_{k+1} \leq p^{k+1}\mu_1^{k+2}.$$

Ainsi $\mu_{k+1} \leq p^k\mu_1^{k+1}$ pour tout $k \geq 0$. Aucun quotient par μ_1 n'a été utilisé ; le raisonnement vaut aussi pour $A = 0$.

2. (b) Convergence de la série majorante

Comme $A^0 = I_p$, $\mu_0 = 1$. Pour $k \geq 1$, la question 2(a) donne $\mu_k \leq p^{k-1}\mu_1^k$. Pour tout réel x ,

$$\left| \frac{\mu_k x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{p} \frac{(p\mu_1|x|)^k}{k!} \quad (k \geq 1).$$

La série de droite converge : c'est une partie de la série exponentielle de paramètre réel positif ou nul $p\mu_1|x|$. Le terme d'indice 0 est fini. Par comparaison,

$$\sum_{k \geq 0} \mu_k x^k / k!$$

converge absolument, donc converge.

2. (c) Convergence des séries de coefficients

Pour tout (i, j) et tout $k \geq 0$, $|a_{i,j}^{(k)}| \leq \mu_k$. Ainsi

$$\left| \frac{a_{i,j}^{(k)} x^k}{k!} \right| \leq \frac{\mu_k |x|^k}{k!}.$$

La série majorante converge d'après 2(b), appliquée à $|x|$. Chaque série de coefficients converge donc absolument.

2. (d) Définition de $T_A(x)$ et cas scalaire

Le coefficient (i, j) de $T_{A,n}(x)$ est la somme partielle

$$\sum_{k=0}^n a_{i,j}^{(k)} x^k / k!.$$

Par 2(c), ce coefficient converge vers

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{i,j}^{(k)} x^k / k!.$$

En définissant $T_A(x)$ par ces p^2 limites, on obtient la convergence matricielle demandée.

Si $p = 1$ et $A = [a]$, on a $A^k = [a^k]$, avec $a^0 = 1$ même si $a = 0$. La série exponentielle donne

$$T_A(x) = [e^{ax}].$$

3. (a) Diagonalité de $T_{D,n}(x)$

Notons $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_p)$. Pour $k \geq 1$, $D^k = \text{diag}(d_1^k, \dots, d_p^k)$, et $D^0 = I_p$ est aussi diagonale. Toute somme finie de ces matrices est diagonale. Ainsi

$$T_{D,n}(x) = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(x d_1)^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^n \frac{(x d_p)^k}{k!} \right).$$

3. (b) Expression de $T_D(x)$

Les coefficients hors diagonale des sommes partielles sont nuls ; leurs limites sont donc nulles. Chaque coefficient diagonal converge, par la série exponentielle, vers $e^{x d_i}$. Par conséquent,

$$T_D(x) = \text{diag}(e^{x d_1}, \dots, e^{x d_p}).$$

3. (c) Limite de D_r

La matrice D_r est diagonale et son coefficient diagonal d'indice i est $r(e^{d_i/r} - 1)$. Si $d_i = 0$, ce coefficient est nul pour tout r . Si $d_i \neq 0$,

$$r(e^{d_i/r} - 1) = d_i \frac{e^{d_i/r} - 1}{d_i/r} \rightarrow d_i,$$

car $(e^t - 1)/t \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow 0$, résultat de la dérivabilité de l'exponentielle en 0. Tous les coefficients convergent vers ceux de D , donc $D_r \rightarrow D$.

4. (a) Compatibilité avec une similitude

Pour $k \geq 0$, $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$. Pour $k = 0$, les deux membres valent I_p . Pour le passage de k à $k + 1$, les facteurs adjacents PP^{-1} se simplifient, ce qui établit la formule par récurrence.

Ainsi, pour tout $n \geq 0$,

$$T_{A',n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} P^{-1}A^kP = P^{-1}T_{A,n}(x)P.$$

La convergence des sommes partielles a été établie en 2(d). En passant à la limite dans ce produit avec deux matrices fixes, $T_{A'}(x) = P^{-1}T_A(x)P$.

4. (b) Premier terme du reste

Méthode 1 — Diagonalisation, conformément à l'indication

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour un réel d , la formule de Taylor-Young de l'exponentielle à l'ordre $n + 1$ donne, lorsque $z \rightarrow 0$,

$$e^z = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{z^k}{k!} + o(z^{n+1}).$$

Pour $d \neq 0$, on prend $z = d/r$ et on obtient

$$r^{n+1} \left(e^{d/r} - \sum_{k=0}^n \frac{d^k}{r^k k!} \right) \rightarrow \frac{d^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour $d = 0$, le membre de gauche est identiquement nul et la même limite vaut 0. En appliquant ce résultat à chaque coefficient diagonal de D , on obtient

$$r^{n+1} (T_D(1/r) - T_{D,n}(1/r)) \rightarrow \frac{D^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Si A est diagonalisable, il existe P inversible et D diagonale avec $A = PDP^{-1}$. Par 4(a) et son identité pour les sommes finies, le reste pour A est le conjugué par P du reste pour D . Le passage à la limite donne

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{n+1} (T_A(1/r) - T_{A,n}(1/r)) = P \frac{D^{n+1}}{(n+1)!} P^{-1} = \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Méthode 2 — Contrôle du reste par les coefficients

La majoration de 2(a) permet même de traiter une matrice réelle quelconque. Pour chaque coefficient, retranchons au reste son premier terme d'indice $n+1$. Il reste la série convergente des termes d'indices $k \geq n+2$. Pour $r \geq 1$, sa valeur absolue après multiplication par r^{n+1} est au plus

$$\sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\mu_k}{k!} r^{n+1-k} \leq \frac{1}{r} \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\mu_k}{k!}.$$

En effet, $n+1-k \leq -1$ pour tous ces indices. La dernière série converge d'après 2(b), avec $x = 1$, et sa somme est indépendante de r . Cette borne tend donc vers 0.

Coefficient par coefficient, le reste multiplié par r^{n+1} tend vers $a_{i,j}^{(n+1)} / (n+1)!$. Cela établit (*) pour toute matrice réelle, en particulier pour les matrices diagonalisables de

la question.

La première méthode utilise les valeurs propres ; la seconde utilise seulement une majoration des puissances et justifie aussi l'extension admise dans la suite du PDF.

Partie II. Polynômes annulateurs et matrices de Kalman

Dans cette version, tous les espaces et tous les scalaires sont réels. Les questions 5 à 8 construisent une forme triangulaire par blocs de tailles 1 ou 2 au lieu d'imposer des blocs de taille 1. Aucun résultat général de réduction n'est supposé connu : la construction et le polynôme annulateur seront démontrés.

5. (a) Existence d'un polynôme annulateur et factorisation réelle

Question adaptée au programme actuel : on travaille dans un espace réel et on factorise en facteurs réels de degrés 1 ou 2.

Dans une base de E , l'espace $\mathcal{L}(E)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Sa dimension vaut donc p^2 .

La famille $(\text{id}_E, \varphi, \dots, \varphi^{p^2})$ comporte $p^2 + 1$ éléments de cet espace de dimension p^2 ; elle est liée. Il existe donc des réels $c_0, \dots, c_{p^2}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=0}^{p^2} c_k \varphi^k = 0.$$

Le polynôme non nul

$$P(X) = \sum_{k=0}^{p^2} c_k X^k$$

est annulateur de φ et de degré au plus p^2 . Il ne peut être constant : si $P = c \neq 0$, alors $P(\varphi) = c \text{id}_E \neq 0$, puisque $\dim E \geq 1$.

La factorisation réelle des polynômes donne $P = cQ_1 \cdots Q_r$, avec $c \neq 0$ et des facteurs unitaires de degrés 1 ou 2, les facteurs quadratiques n'ayant pas de racine réelle. Un

facteur quadratique $X^2 + \alpha X + \beta$ sans racine réelle s'écrit

$$\left(X + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right),$$

avec $\beta - \alpha^2/4 > 0$. On peut donc le mettre sous la forme $(X - a)^2 + b^2$, $b > 0$. Les facteurs linéaires sont de la forme $X - a$. Puisque $c \neq 0$, le produit $Q_1 \cdots Q_r$ est lui aussi annulateur.

5. (b) Sous-espace stable de dimension 1 ou 2

Question adaptée au programme actuel : on établit l'existence d'une droite ou d'un plan stable, ce qui remplace l'affirmation d'existence systématique d'une valeur propre.

Les endomorphismes $Q_j(\varphi)$ commutent, car ils sont des polynômes en un même endomorphisme. Leur produit est nul. Ils ne peuvent pas être tous inversibles : sinon leur produit serait inversible, tandis que l'endomorphisme nul d'un espace non nul ne l'est pas.

Il existe donc un facteur Q_j tel que $Q_j(\varphi)$ n'est pas inversible. Par le théorème du rang en dimension finie, son noyau contient un vecteur $v \neq 0$.

Si $Q_j = X - a$, l'égalité $Q_j(\varphi)(v) = 0$ donne $\varphi(v) = av$. La droite $L = \text{Vect}(v)$ est stable et la matrice de la restriction dans la base (v) est $[a]$.

Si $Q_j = (X - a)^2 + b^2$, avec $b > 0$, posons $w = (\varphi(v) - av)/b$. Par définition,

$$\varphi(v) = av + bw.$$

L'identité $((\varphi - a \text{id}_E)^2 + b^2 \text{id}_E)(v) = 0$ donne

$$(\varphi - a \text{id}_E)(w) = -bv, \text{ donc } \varphi(w) = -bv + aw.$$

Les vecteurs v et w sont libres. En effet, s'ils étaient liés, $w = tv$ pour un réel t , puisque $v \neq 0$. On aurait $(\varphi - a \text{id}_E)v = btv$, donc $((\varphi - a \text{id}_E)^2 + b^2 \text{id}_E)v = b^2(t^2 + 1)v \neq 0$, contradiction.

Ainsi $L = \text{Vect}(v, w)$ est un plan stable et la matrice de la restriction dans la base (v, w) est

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas, le sous-espace construit est non nul et sa dimension est 1 ou 2, nécessairement au plus $\dim E$.

6. (a) Endomorphisme induit sur un supplémentaire

Question adaptée au programme actuel : on cherche un sous-espace stable de dimension 1 ou 2 pour l'endomorphisme réel sur H .

Le projecteur π est linéaire et son image est H . Ainsi $\psi = (\pi \circ \varphi)|_H$ est bien un endomorphisme de H . Cet espace est non nul, car $\dim H = p - k \geq 1$.

On applique la question 5(b) à H et à ψ . Il existe un sous-espace non nul $L \subset H$, stable par ψ , de dimension 1 ou 2, et une base de L dans laquelle la restriction de ψ possède l'une des deux formes annoncées.

6. (b) Stabilité de $F \oplus L$

Question adaptée au programme actuel : $\text{Vect}(v)$ est remplacé par le sous-espace L obtenu en 6(a).

Puisque $L \subset H$ et $F \cap H = \{0\}$, on a $F \cap L = \{0\}$. La somme $F + L$ est donc directe.

Pour $f \in F$ et $\ell \in L$, la stabilité de F donne $\varphi(f) \in F$. Décomposons $\varphi(\ell)$ à l'aide du projecteur :

$$\varphi(\ell) = \pi(\varphi(\ell)) + (\text{id}_E - \pi)(\varphi(\ell)).$$

Le premier terme est $\psi(\ell) \in L$, et le second appartient à F , car $\text{id}_E - \pi$ projette sur F . Ainsi $\varphi(f + \ell) \in F + L$. La somme directe $F \oplus L$ est stable par φ .

7. Construction d'une base donnant une matrice triangulaire par blocs

Question adaptée au programme actuel : les blocs diagonaux réels ont taille 1 ou 2. On démontre la construction par récurrence forte sur la dimension, sans utiliser un théorème général de réduction.

Pour $p = 1$, tout endomorphisme a une matrice $[a]$ dans une base ; l'affirmation est vraie.

Supposons le résultat établi pour toutes les dimensions strictement inférieures à p , et soit $\dim E = p$. Par 5(b), il existe un sous-espace stable F de dimension $d \in \{1, 2\}$ et une base de F donnant un bloc D_1 de l'une des formes requises.

Si $d = p$, cette base est une base de E et la construction est terminée. Sinon, choisissons un supplémentaire H de F et le projecteur π sur H parallèlement à F . L'endomorphisme $\psi = (\pi \circ \varphi)|_H$ agit sur un espace de dimension $p - d$, comprise entre 1 et $p - 1$.

Par l'hypothèse de récurrence, H possède une base dans laquelle la matrice M_H de ψ est triangulaire supérieure par blocs avec les blocs diagonaux demandés. Concaténons la base de F et cette base de H .

Dans cette base de $E = F \oplus H$, la stabilité de F et la définition de ψ donnent la matrice

$$M = \begin{pmatrix} D_1 & R \\ 0 & M_H \end{pmatrix},$$

où R est une matrice réelle de taille $d \times (p - d)$. En effet, les composantes dans H de $\varphi(h)$ sont celles de $\psi(h)$, et celles de $\varphi(f)$ sont nulles pour $f \in F$. La matrice entière a donc la forme voulue.

La récurrence forte établit l'existence d'une telle base pour tout $p \geq 1$. Les sommes des sous-espaces correspondant aux premiers blocs sont stables, ce qui rejoint le mécanisme d'agrandissement établi en 6(b).

8. (a) Action des polynômes associés aux blocs

Question adaptée au programme actuel : à chaque bloc réel de taille 1 ou 2, on associe un facteur annulateur de même degré.

Pour un bloc $D_j = [a_j]$, $Q_j(D_j) = D_j - a_j I_1 = 0$.

Pour un bloc $D_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$, on a

$$D_j - a_j I_2 = \begin{pmatrix} 0 & -b_j \\ b_j & 0 \end{pmatrix}, \quad (D_j - a_j I_2)^2 = -b_j^2 I_2.$$

Ainsi $Q_j(D_j) = (D_j - a_j I_2)^2 + b_j^2 I_2 = 0$.

La forme triangulaire par blocs rend F_j stable par φ . Pour un vecteur de F_j , notons c le groupe de ses coordonnées dans le bloc numéro j . Les coordonnées de φ dans ce même bloc sont $D_j c$, car les coordonnées dans les blocs suivants sont nulles. Par itération, les coordonnées dans ce bloc de φ^m sont $D_j^m c$.

Par combinaison linéaire, les coordonnées dans ce bloc de $Q_j(\varphi)$ sont donc $Q_j(D_j)c = 0$. L'image reste dans F_j et son dernier groupe de coordonnées est nul. Elle appartient ainsi à F_{j-1} :

$$Q_j(\varphi)(F_j) \subset F_{j-1}.$$

Le raisonnement vaut aussi pour $j = 1$, où le sous-espace d'arrivée est $F_0 = \{0\}$.

8. (b) Polynôme annulateur de degré p

Question adaptée au programme actuel : le produit des facteurs linéaires ou quadratiques remplace le produit de facteurs tous linéaires.

Posons $Q = Q_1 \cdots Q_r$. Les endomorphismes $Q_j(\varphi)$ commutent et leur produit est $Q(\varphi)$. Pour un vecteur de $E = F_r$, l'action successive de $Q_r(\varphi)$, puis de $Q_{r-1}(\varphi)$, jusqu'à $Q_1(\varphi)$, l'envoie dans

$$F_r, F_{r-1}, \dots, F_1, F_0 = \{0\}.$$

Ainsi $Q(\varphi) = 0$. En passant aux matrices dans la base $\mathcal{B}$, on obtient $Q(M) = 0$.

Chaque Q_j est unitaire et de degré d_j , la taille du bloc correspondant. La somme des tailles vaut p , donc $\deg Q = d_1 + \cdots + d_r = p$. Le polynôme est réel et non nul. C'est bien

un polynôme annulateur réel de M de degré p .

9. Polynôme annulateur d'une matrice réelle quelconque

À $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, associons l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ dont la matrice canonique est A . Par 7 et 8(b), il existe une base donnant une matrice M et un polynôme réel Q de degré p tel que $Q(M) = 0$.

Si P est la matrice de passage correspondante, $A = PMP^{-1}$. Les identités sur les puissances utilisées en 4(a) donnent

$$Q(A) = PQ(M)P^{-1} = 0.$$

La matrice A possède donc un polynôme annulateur réel de degré p . La démonstration découle entièrement de la construction des questions 5 à 8 ; elle n'utilise ni déterminant ni théorème extérieur sur les polynômes de matrices.

10. (a) Stabilisation des espaces engendrés

Méthode 1 — Polynôme annulateur, dans la continuité de la partie II

Par la question 9, il existe un polynôme annulateur réel de degré p . En le divisant par son coefficient dominant non nul, on peut le supposer unitaire :

$$Q(X) = X^p + c_{p-1}X^{p-1} + \dots + c_0.$$

L'égalité $Q(A) = 0$ donne

$$A^p = - \sum_{j=0}^{p-1} c_j A^j.$$

En multipliant par B , on en déduit $A^p B \in \mathcal{G}_p$.

L'espace $\mathcal{G}_p$ est stable par multiplication par A : les générateurs $B, AB, \dots, A^{p-2}B$ sont envoyés sur les générateurs suivants, et le dernier $A^{p-1}B$ est envoyé sur $A^p B \in \mathcal{G}_p$. Par

réurrence, toutes les colonnes $A^m B$ appartiennent à $\mathcal{G}_p$.

Si $q \geq p$, les générateurs de $\mathcal{G}_p$ font partie de ceux de $\mathcal{G}_q$, donc $\mathcal{G}_p \subset \mathcal{G}_q$. Tous les générateurs de $\mathcal{G}_q$ appartiennent à $\mathcal{G}_p$, d'où l'inclusion inverse. Ainsi $\mathcal{G}_q = \mathcal{G}_p$.

Méthode 2 — Première dépendance dans la suite des colonnes

Si $B = 0$, tous les espaces sont nuls et l'égalité est immédiate. Supposons $B \neq 0$. Les $p + 1$ colonnes $B, AB, \dots, A^p B$ sont liées dans l'espace de dimension p .

Soit $r \in \{1, \dots, p\}$ le premier indice tel que la famille $(B, AB, \dots, A^r B)$ soit liée. La famille des r colonnes précédentes est libre. Dans une relation de dépendance, le coefficient de $A^r B$ est donc non nul ; on peut l'isoler et obtenir

$$A^r B \in \text{Vect}(B, AB, \dots, A^{r-1} B) = \mathcal{G}_r.$$

Comme dans la première méthode, $\mathcal{G}_r$ est stable par A . Toutes les colonnes suivantes y appartiennent. Pour tout $q \geq r$, $\mathcal{G}_q = \mathcal{G}_r$; en particulier, $\mathcal{G}_q = \mathcal{G}_p$ si $q \geq p$.

La première méthode utilise un polynôme qui annule la matrice entière ; la seconde exploite uniquement les colonnes engendrées à partir du vecteur B .

10. (b) Caractérisation par orthogonalité

Munissons $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire euclidien $\langle U, V \rangle = {}^t UV$. Choisissons $\mathcal{S} = \mathcal{G}_p^\perp$.

Si $G \in \mathcal{G}_p$, on a ${}^t SG = 0$ pour tout $S \in \mathcal{S}$, par définition de l'orthogonal.

Réciproquement, supposons ces égalités satisfaites. La décomposition orthogonale dans un espace euclidien de dimension finie donne $G = U + V$ avec $U \in \mathcal{G}_p$ et $V \in \mathcal{S}$. En prenant $S = V$,

$$0 = {}^t VG = {}^t VU + {}^t VV = \|V\|^2.$$

Ainsi $V = 0$, donc $G = U \in \mathcal{G}_p$. Cela fournit exactement l'équivalence demandée.

10. (c) Stabilité par passage à la limite

Soit $G_n \in \mathcal{G}_p$ avec $G_n \rightarrow G$. Pour un $S \in \mathcal{S}$ fixé, la question 10(b) donne ${}^tSG_n = 0$ pour tout n .

Le produit tSG_n est une somme finie de coefficients convergents ; il tend vers tSG . Donc ${}^tSG = 0$. Cela vaut pour tout $S \in \mathcal{S}$, et 10(b) implique $G \in \mathcal{G}_p$.

10. (d) Appartenance de $T_A(x)B$

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 0$,

$$T_{A,n}(x)B = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} A^k B.$$

Toutes les colonnes $A^k B$ appartiennent à $\mathcal{G}_p$ par 10(a), donc cette combinaison linéaire finie y appartient. Par 2(d) et les règles de passage à la limite du préambule, $T_{A,n}(x)B \rightarrow T_A(x)B$.

La question 10(c) montre que la limite reste dans $\mathcal{G}_p$. Ainsi $T_A(x)B \in \mathcal{G}_p$ pour tout réel x .

Partie III. Contrôle de systèmes linéaires

11. (a) Résolution du système scalaire

Soit $u \in C^0$ et supposons f dérivable, vérifiant les conditions de l'énoncé. Comme f est continue et $f' = af + bu$, sa dérivée est continue. La fonction $h(t) = f(t)e^{-at}$ est donc de classe C^1 , et

$$h'(t) = f'(t)e^{-at} - af(t)e^{-at} = bu(t)e^{-at}.$$

On a $h(0) = f(0) = 0$. En intégrant sur $[0, t]$,

$$h(t) = b \int_0^t u(x)e^{-ax} dx.$$

Après multiplication par e^{at} , on obtient $f(t) = b \int_0^t u(x)e^{a(t-x)} dx$.

Réciproquement, définissons $U(t) = \int_0^t u(x)e^{-ax} dx$. L'intégrande est continu, donc U est de classe C^1 et $U'(t) = u(t)e^{-at}$. La fonction $f(t) = be^{at}U(t)$ vérifie $f(0) = 0$ et $f'(t) = af(t) + bu(t)$.

La formule donne donc l'existence et l'unicité de la solution pour chaque contrôle continu, sans utiliser une dérivation sous une intégrale à paramètre.

11. (b) Contrôle constant et contrôlabilité

Si $u(x) = c$ pour tout $x \in [0, 1]$, la formule de 11(a) donne

$$f(t) = \begin{cases} bc \frac{e^{at} - 1}{a} & \text{si } a \neq 0, \\ bct & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

En effet, pour $a \neq 0$, $\int_0^t e^{a(t-x)} dx = (e^{at} - 1)/a$, tandis que pour $a = 0$ l'intégrande vaut 1.

Posons $L_a = \int_0^1 e^{a(1-x)} dx$. Ce nombre est strictement positif, quel que soit a , et vaut $(e^a - 1)/a$ si $a \neq 0$, ou 1 si $a = 0$.

Si $b \neq 0$, pour atteindre une cible y , on choisit le contrôle constant $c = y/(bL_a)$. La division est licite et $f(1) = bcL_a = y$. Par l'unicité établie en 11(a), toute solution associée à ce contrôle atteint la cible.

Si $b = 0$, la formule de 11(a) donne $f = 0$ pour tout contrôle; la cible $y = 1$ ne peut pas être atteinte. Ainsi (a, b) est contrôlable si et seulement si $b \neq 0$.

12. (a) Appartenance de l'intégrale à $\mathcal{G}_p$

Pour $x \in [0, 1]$, 10(d), appliquée au réel $1 - x$, donne $W(x) = T_A(1 - x)B \in \mathcal{G}_p$. Comme $\mathcal{G}_p$ est un sous-espace vectoriel, $u(x)W(x) \in \mathcal{G}_p$.

Méthode 1 — Caractérisation orthogonale

Prenons $\mathcal{S}$ comme dans 10(b). Pour tout $S \in \mathcal{S}$ et tout x , ${}^tS(u(x)W(x)) = 0$. En intégrant, et en utilisant la linéarité d'une somme finie d'intégrales,

$${}^tS\left(\int_0^1 u(x)W(x) dx\right) = \int_0^1 u(x){}^tSW(x) dx = 0.$$

Les intégrales existent, car u et chaque W_k sont continues sur le segment. La caractérisation de 10(b) implique que l'intégrale appartient à $\mathcal{G}_p$.

Méthode 2 — Sommes de Riemann

Pour $n \geq 1$, définissons la colonne

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} u(j/n)W(j/n).$$

Chaque terme appartient à $\mathcal{G}_p$, donc $R_n \in \mathcal{G}_p$. Pour chaque coordonnée k , la fonction uW_k est continue sur $[0, 1]$; ses sommes de Riemann convergent vers $\int_0^1 u(x)W_k(x) dx$.

Ainsi R_n converge coefficient par coefficient vers $\int_0^1 u(x)W(x) dx$. La question 10(c) assure que cette limite appartient à $\mathcal{G}_p$.

La première méthode utilise des équations linéaires caractérisant le sous-espace; la seconde construit l'intégrale comme limite de combinaisons linéaires finies.

12. (b) Annulation de tZW

La fonction $g(x) = {}^tZW(x)$ est continue sur $[0, 1]$, car ses coefficients sont une combinaison linéaire des fonctions continues W_k .

L'hypothèse vaut pour tout contrôle continu ; on peut donc choisir $u = g$. Elle donne

$$\int_0^1 g(x)^2 dx = 0.$$

La fonction g^2 est continue et positive ou nulle. Si elle était strictement positive en un point, elle serait minorée par une constante positive sur un intervalle de longueur positive, éventuellement unilatéral à une extrémité. Son intégrale serait alors positive, contradiction.

Ainsi $g(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, c'est-à-dire ${}^tZW(x) = 0$ sur tout le segment.

12. (c) Annulation des produits avec les puissances de A

Posons $t = 1 - x$. Par 12(b), on sait que

$${}^tZT_A(t)B = 0 \quad (t \in [0, 1]).$$

La définition de la série donne $T_A(0) = I_p$. En prenant $t = 0$, on obtient ${}^tZB = 0$, première égalité demandée.

Procédons par récurrence sur m pour établir ${}^tZA^mB = 0$, jusqu'à $m = p - 1$. Supposons que cette égalité soit vraie pour les exposants $0, \dots, m - 1$, où $m \geq 1$.

Pour $r \geq 1$, $1/r \in [0, 1]$, donc ${}^tZT_A(1/r)B = 0$. De plus,

$${}^tZT_{A,m-1}(1/r)B = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{r^j j!} {}^tZA^jB = 0.$$

On en déduit

$${}^tZ \left[r^m (T_A(1/r) - T_{A,m-1}(1/r)) \right] B = 0.$$

La relation $(*)$, avec $n = m - 1$, et le passage à la limite dans les produits avec Z et B fixes donnent $\frac{1}{m!} {}^tZA^mB = 0$. Comme $m! > 0$, le produit est nul.

L'initialisation et l'hérédité donnent ${}^tZA^{k-1}B = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$. Autrement dit, ${}^tZK_p = 0$.

12. (d) Critère de contrôlabilité

Nécessité. Si le couple est contrôlable, toute colonne $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est une intégrale de la forme étudiée en 12(a). Cette question implique $Y \in \mathcal{G}_p$. Ainsi $\mathcal{G}_p = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Les colonnes de K_p engendrent donc l'espace de dimension p . Comme K_p est carrée de taille p , elle est de rang p , donc inversible.

Pour la suffisance, supposons désormais K_p inversible.

Méthode 1 — Image de l'application de contrôle

Définissons l'application linéaire $\Phi : C^0 \rightarrow \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ par $\Phi(u) = \int_0^1 u(x)W(x) dx$. Sa linéarité résulte de celle des intégrales. Son image $\mathcal{U}$ est un sous-espace du même espace euclidien de dimension p .

Si $\mathcal{U}$ était un sous-espace strict, son orthogonal aurait une dimension positive. Il existerait donc $Z \neq 0$ tel que ${}^t Z \Phi(u) = 0$ pour tout $u \in C^0$. Par linéarité finie, cette égalité est précisément l'hypothèse de 12(b).

Les questions 12(b) et 12(c) impliqueraient alors ${}^t Z K_p = 0$. La multiplication à droite par K_p^{-1} donnerait ${}^t Z = 0$, contradiction.

Ainsi $\mathcal{U}$ est l'espace entier. Pour chaque cible Y , il existe u avec $\Phi(u) = Y$: le couple est contrôlable.

Méthode 2 — Construction explicite d'un contrôle

Définissons la matrice réelle $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ coefficient par coefficient par

$$C = \int_0^1 W(x) {}^t W(x) dx.$$

Elle est symétrique, et, pour toute colonne Z ,

$${}^t Z C Z = \int_0^1 ({}^t Z W(x))^2 dx \geq 0.$$

Si $Z \neq 0$ et si cette intégrale était nulle, la continuité impliquerait ${}^t Z W(x) = 0$ pour tout x . L'hypothèse de 12(b) serait alors satisfaite pour tous les contrôles, et 12(c) donnerait ${}^t Z K_p = 0$, impossible puisque K_p est inversible.

Ainsi ${}^t Z C Z > 0$ pour tout $Z \neq 0$. En particulier, $C Z = 0$ impose $Z = 0$; C est donc inversible par le théorème du rang.

Pour une cible Y , choisissons le contrôle continu $u(x) = {}^t W(x) C^{-1} Y$. La linéarité des intégrales, appliquée coefficient par coefficient, donne

$$\int_0^1 u(x) W(x) dx = \left(\int_0^1 W(x) {}^t W(x) dx \right) C^{-1} Y = C C^{-1} Y = Y.$$

Cette seconde méthode construit directement un contrôle. L'inversibilité de la matrice utilisée a été démontrée; aucun résultat particulier sur les systèmes de contrôle n'est supposé connu.

On conclut dans les deux cas : (A, B) est contrôlable si et seulement si K_p est inversible.

13. (a) État final du système discret

Une récurrence sur k donne

$$X_{s,k} = \sum_{j=1}^k s_j A^{k-j} B \quad (1 \leq k \leq q).$$

Pour $k = 1$, la relation de récurrence donne $X_{s,1} = s_1 B$, ce qui est la formule annoncée. Si elle vaut à l'indice $k - 1$, alors

$$X_{s,k} = A \sum_{j=1}^{k-1} s_j A^{k-1-j} B + s_k B = \sum_{j=1}^{k-1} s_j A^{k-j} B + s_k A^0 B,$$

ce qui établit l'hérédité.

Pour $k = q$, on obtient

$$X_{s,q} = s_q B + s_{q-1} AB + \dots + s_1 A^{q-1} B.$$

Les colonnes de K_q sont rangées dans l'ordre $B, AB, \dots, A^{q-1}B$. Il faut donc renverser l'ordre des commandes :

$$C_s = \begin{pmatrix} s_q \\ s_{q-1} \\ \vdots \\ s_1 \end{pmatrix}, \quad X_{s,q} = K_q C_s.$$

13. (b) Existence d'un contrôle atteignant la cible

On suppose K_p inversible et $q \geq p$. Pour une cible Y , posons $Z = K_p^{-1}Y$ et construisons la colonne $C \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ dont les p premières coordonnées sont celles de Z et les $q - p$ suivantes sont nulles.

Les p premières colonnes de K_q forment K_p , donc $K_q C = K_p Z = Y$. En définissant s par renversement des coordonnées de C , on a $C_s = C$. La question 13(a) donne alors $X_{s,q} = Y$.

Cette construction reste valable pour $q = p$, avec aucun zéro supplémentaire. Elle peut aussi se lire comme la surjectivité de l'application de matrice K_q , dont les p premières colonnes sont déjà une base.

14. (a) Unique point critique sous contrainte

Le renversement $s \mapsto C_s$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^q$ qui conserve la norme euclidienne. On peut donc étudier le problème dans la variable colonne $C = C_s$:

$$\text{minimiser } j(C) = {}^t C C \quad \text{sous la contrainte } K_q C = Y.$$

Le changement linéaire bijectif transporte les directions admissibles et les points critiques. L'ensemble des contraintes est non vide par 13(b), et ses directions sont les colonnes $D \in \text{Ker } K_q$.

La fonction j est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^q$, avec $\nabla j(C) = 2C$ et $\nabla^2 j(C) = 2I_q$. Un point admissible C est critique sous la contrainte si et seulement si la dérivée dans chaque direction admissible est nulle :

$$\left. \frac{d}{dt} j(C + tD) \right|_{t=0} = 2 {}^t C D = 0 \quad (D \in \text{Ker } K_q).$$

Cette condition signifie $C \in (\text{Ker } K_q)^\perp$. Or

$$(\text{Ker } K_q)^\perp = \text{Im}({}^t K_q).$$

Pour le vérifier, toute colonne ${}^t K_q \lambda$ est orthogonale à $\text{Ker } K_q$, car ${}^t D {}^t K_q \lambda = {}^t (K_q D) \lambda = 0$. De plus, K_q est de rang p puisque ses p premières colonnes forment K_p , inversible. Son noyau a dimension $q - p$, et son orthogonal a dimension p . L'image de ${}^t K_q$ a également dimension p , par l'égalité des rangs d'une matrice et de sa transposée. L'inclusion est donc une égalité.

Ainsi un point critique admissible est nécessairement de la forme $C = {}^t K_q \lambda$ avec $\lambda \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. La contrainte devient

$$K_q {}^t K_q \lambda = Y.$$

L'inversibilité de $K_q {}^t K_q$ est admise dans la question. Elle donne l'unique valeur $\lambda = (K_q {}^t K_q)^{-1} Y$, puis

$$C^* = {}^t K_q (K_q {}^t K_q)^{-1} Y.$$

Réciproquement, $K_q C^* = Y$ et $C^* \in \text{Im}({}^t K_q)$, donc les dérivées dans toutes les directions admissibles s'annulent. Cette colonne est bien critique. Le renversement des coordonnées donne l'unique contrôle critique s^* avec $C_{s^*} = C^*$.

La matrice inverse admise peut également être justifiée directement : pour $Z \neq 0$,

$${}^t Z K_q {}^t K_q Z = \| {}^t K_q Z \|^2 > 0.$$

En effet, ${}^t K_q Z = 0$ impliquerait ${}^t K_p Z = 0$, puis $Z = 0$, car K_p est inversible. Le noyau de $K_q {}^t K_q$ est donc nul.

14. (b) Minimum global

Soit $C = C_s$ une colonne admissible. Comme $K_q C = K_q C^* = Y$, la différence $D = C - C^*$ appartient à $\text{Ker } K_q$.

La colonne $C^* = {}^t K_q \lambda$ est orthogonale à ce noyau : ${}^t C^* D = {}^t \lambda K_q D = 0$. Par l'identité de Pythagore,

$$j(C) = \|C^* + D\|^2 = \|C^*\|^2 + \|D\|^2 \geq \|C^*\|^2 = j(C^*).$$

Le renversement conserve les normes, donc $J(s) \geq J(s^*)$ pour tout contrôle admissible. L'égalité a lieu si et seulement si $D = 0$, c'est-à-dire $C = C^*$ et $s = s^*$.

Ainsi s^* réalise l'unique minimum global du coût sous la contrainte $X_{s,q} = Y$. La conclusion découle d'une comparaison exacte des valeurs sur l'ensemble affine admissible ; on n'applique pas un critère d'extremum sans tenir compte de la contrainte.

Sa valeur peut être exprimée par

$$J(s^*) = {}^t Y (K_q {}^t K_q)^{-1} Y.$$

En effet, $N = K_q {}^t K_q$ est symétrique inversible, donc N^{-1} est symétrique ; en substituant $C^* = {}^t K_q N^{-1} Y$ dans ${}^t C^* C^*$, on obtient ${}^t Y N^{-1} N N^{-1} Y = {}^t Y N^{-1} Y$.

Relevé des adaptations

- Question 1(c) : rectification du cas $p = 1$, où $A = [1]$ ne possède pas la valeur propre 0. Le noyau est étudié pour tout $p \geq 1$ et l'affirmation concernant 0 est conservée pour $p \geq 2$.
- Questions 5(a) et 5(b), avec le préambule de la partie II : espace et scalaires réels, factorisation en facteurs linéaires et quadratiques réels ; construction d'une droite ou d'un plan stable. Une indication pour le cas quadratique est fournie dans le sujet.
- Questions 6(a) et 6(b) : remplacement du vecteur propre du projecteur composé par un sous-espace stable réel de dimension 1 ou 2, puis étude de sa somme directe avec F .

- Question 7 : construction, entièrement démontrée, d'une base donnant une matrice triangulaire supérieure par blocs réels de tailles 1 ou 2.
- Questions 8(a) et 8(b) : remplacement des facteurs linéaires par les facteurs réels correspondant aux blocs. L'abaissement des sous-espaces successifs et le produit annulateur sont établis, avec un degré total toujours égal à p .

La question 9 et les questions suivantes conservent leurs objectifs et leurs énoncés mathématiques. La conséquence réelle de degré p nécessaire aux matrices de Kalman a été démontrée ; aucun résultat supplémentaire n'a été admis pour remplacer la partie II.