



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2010

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème :

- toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$;
- pour tout réel $t > 0$, X_t désigne une variable aléatoire à valeurs strictement positives qui suit la loi gamma de paramètre t , notée $\gamma(t)$;
- U désigne une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1]$;
- l'espérance et la variance d'une variable aléatoire A sont notées respectivement $E(A)$ et $V(A)$;
- la notation $\exp$ désigne la fonction exponentielle de base e .

On rappelle ou on admet sans démonstration les résultats suivants :

- la fonction Γ définie pour tout réel $t > 0$ par $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{t-1} du$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$; on note Γ' et Γ'' les dérivées première et seconde de la fonction Γ . Pour tout réel $t > 0$, les intégrales $\int_0^{+\infty} (\ln u) e^{-u} u^{t-1} du$ et $\int_0^{+\infty} (\ln u)^2 e^{-u} u^{t-1} du$ sont convergentes et valent respectivement $\Gamma'(t)$ et $\Gamma''(t)$;
- on a pour tout réel $t > 0$: $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$;
- pour tout réel $t > 0$, une densité f_{X_t} de X_t est donnée par : $f_{X_t}(x) = \frac{1}{\Gamma(t)} e^{-x} x^{t-1}$ si $x > 0$, et $f_{X_t}(x) = 0$ si $x \leq 0$;
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

L'objet du problème est de démontrer quelques propriétés de la fonction Γ en utilisant des méthodes essentiellement probabilistes.

Partie I. Quelques résultats préliminaires

1) On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On considère les deux suites $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\gamma_n = h_n - \ln n$ et $v_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n$.

a) Montrer que la série de terme général v_n est convergente.

b) En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$; on note γ sa limite.

c) On pose pour tout réel $t > 0$: $d_{n,t} = \gamma + \ln(t+n) - h_n$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_{n,t}$.

2) a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $E(X_t)$ et $V(X_t)$.

b) On note pour tout réel $t > 0$, $\psi(t) = \Gamma'(t)/\Gamma(t)$, et ψ' la dérivée de ψ . Montrer que $E(\ln(X_t)) = \psi(t)$ et $V(\ln(X_t)) = \psi'(t)$.

3) a) Montrer que pour tout réel $t > 1$, $E(1/X_t)$ existe et calculer sa valeur.

b) Établir pour tout réel $x > 0$, l'encadrement : $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$.

En déduire que l'on a : $(\ln x)^2 \leq \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + (x-1)^2$.

c) À l'aide des questions précédentes, établir les inégalités suivantes :

pour tout réel $t > 0$, $E\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \leq 0$;

pour tout réel $t > 1$, $E\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \geq -\frac{1}{t-1}$;

pour tout réel $t > 2$, $E\left(\ln^2\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \leq \frac{2t}{(t-2)^2}$.

d) Soit t un réel fixé strictement positif. Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0.

4) Soit $(A_n)_{n \geq 1}$, $(B_n)_{n \geq 1}$ et $(C_n)_{n \geq 1}$ trois suites de variables aléatoires à densité qui convergent en probabilité vers 0. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $D_n = A_n + B_n + C_n$. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle qui converge vers u . On considère deux variables aléatoires réelles à densité M et N , et une suite $(N_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires ayant toutes la même loi que N , telles que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, M est de même loi que $N_n + D_n + u_n$.

a) Montrer pour tout réel $\varepsilon > 0$, l'inclusion :

$$[|D_n| > \varepsilon] \subset [|A_n| > \varepsilon/3] \cup [|B_n| > \varepsilon/3] \cup [|C_n| > \varepsilon/3].$$

En déduire que la suite $(D_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0.

b) On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $V_n = D_n + u_n - u$. Montrer que la suite de variables aléatoires $(V_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0.

Soit x un réel et ε un réel strictement positif. Établir, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'encadrement :

$$P([N_n \leq x - u - \varepsilon]) - P([|V_n| > \varepsilon]) \leq P([N_n + u + V_n \leq x]) \leq P([N_n \leq x - u + \varepsilon]) + P([|V_n| > \varepsilon])$$

c) Montrer que les variables aléatoires M et $N + u$ sont de même loi.

5) Soit (α, β) un couple de réels strictement positifs, et X_α et X_β deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\beta)$. On pose : $T_{\alpha, \beta} = \frac{X_\alpha}{X_\beta}$,

$$Q_{\alpha,\beta} = \ln(T_{\alpha,\beta}) \text{ et } B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

- a) Préciser $Q_{\alpha,\beta}(\Omega)$. Déterminer une densité de $\ln(X_\alpha)$ et de $-\ln(X_\beta)$ respectivement.
- b) En déduire qu'une densité $f_{Q_{\alpha,\beta}}$ de $Q_{\alpha,\beta}$ est donnée par : pour tout réel x ,

$$f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+\beta)y} \exp(-e^y(1+e^{-x})) dy$$

- c) À l'aide du changement de variable $u = e^y(1+e^{-x})$, dont on justifiera la validité, établir la formule suivante : pour tout x réel,

$$f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \times \frac{e^{\alpha x}}{(1+e^x)^{\alpha+\beta}}$$

- d) En déduire une densité $f_{T_{\alpha,\beta}}$ de $T_{\alpha,\beta}$.
- e) On pose : $J_{\alpha,\beta} = \frac{X_\alpha}{X_\alpha + X_\beta}$. Montrer qu'une densité $f_{J_{\alpha,\beta}}$ de $J_{\alpha,\beta}$ est donnée par :

$$f_{J_{\alpha,\beta}}(z) = 0 \text{ si } z \notin]0, 1[, \text{ et } f_{J_{\alpha,\beta}}(z) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} \text{ si } z \in]0, 1[.$$

Partie II. Étude de la variable aléatoire $\ln(X_t)$

Soit $(Y_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de même loi exponentielle de paramètre 1. On suppose que, pour toute famille finie $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ de réels strictement positifs deux à deux distincts et pour tout entier $K \geq 1$, les variables aléatoires $X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_q}, Y_1, \dots, Y_K$ sont mutuellement indépendantes.

On pose : $S_0 = 0$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$,

$$S_k = \sum_{i=1}^k Y_i.$$

6) Rappeler sans démonstration la loi de S_k ainsi que les valeurs respectives de $E(S_k)$ et $V(S_k)$.

7) a) Justifier pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité suivante :

$$\ln(X_t) = \ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k} \right) + \ln(X_t + S_n).$$

b) Montrer que pour tout entier m de $\mathbb{N}^*$, la loi de $X_t + S_m$ est celle de X_{t+m} .

On admet jusqu'à la fin du problème les résultats suivants :

- soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes. Alors, pour tout p de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, pour toutes fonctions réelles φ_1 et φ_2 continues, les variables aléatoires $\varphi_1(A_1, \dots, A_p)$ et $\varphi_2(A_{p+1}, \dots, A_n)$ sont indépendantes ;
- si A et B sont deux variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors AB admet une espérance et $E(AB) = E(A)E(B)$;
- pour tout couple (α, β) de réels strictement positifs, si les variables aléatoires X_α et X_β sont indépendantes, de lois respectives $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\beta)$, alors les variables aléatoires $\frac{X_\alpha}{X_\alpha + X_\beta}$ et $X_\alpha + X_\beta$ sont indépendantes ;
- soit p un entier de $\mathbb{N}^*$. Si $A_1, \dots, A_p$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, si $B_1, \dots, B_p$ sont des variables aléatoires mutuellement

indépendantes et si, pour tout i de $\llbracket 1, p \rrbracket$, A_i et B_i sont de même loi, alors $A_1 + \dots + A_p$ et $B_1 + \dots + B_p$ sont de même loi.

8) On pose pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $R_{t,k} = \frac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k}$.

a) Montrer que $R_{t,1}$ et $R_{t,2}$ sont indépendantes. On admet dans la suite que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $R_{t,1}, \dots, R_{t,n}$ et $X_t + S_n$ sont mutuellement indépendantes.

b) En déduire à l'aide des questions précédentes que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $\ln(X_t)$ et

$$\sum_{k=1}^n \ln(R_{t,k}) + \ln(X_{t+n})$$

sont de même loi.

9) a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $-\ln U$.

b) À l'aide de la question 5.e, calculer une densité $f_{R_{t,k}}$ de la variable aléatoire $R_{t,k}$.

c) Soit $(U_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U .
Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $R_{t,k}$ et

$$\frac{1}{U_k^{t+k-1}}$$

sont de même loi.

d) Déduire des questions précédentes que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\ln(X_t)$ est de même loi que la variable aléatoire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Y_{k+1}}{t+k} \right) + \ln \left(\frac{X_{t+n}}{t+n} \right) + d_{n,t} - \gamma$$

- 10) En utilisant les résultats des questions 1.c, 2.b, 3.c et 9.d, montrer que pour tout réel $t > 0$, on a :

$$E(\ln(X_t)) = \psi(t) = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{t+k} \right)$$

et

$$V(\ln(X_t)) = \psi'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2}$$

- 11) En utilisant la question 3.c, calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\psi(t) - \ln t)$.

- 12) On pose : $W = U^{1/\mu}$, où μ désigne un paramètre réel strictement positif inconnu. Afin d'estimer μ , on considère pour p supérieur ou égal à 3, un p -échantillon $(W_1, W_2, \dots, W_p)$ i.i.d. de la loi de W .

On pose :

$$G_p = -p \left(\sum_{i=1}^p \ln W_i \right)^{-1}.$$

Justifier que la variable aléatoire G_p est un estimateur du paramètre μ . Est-il sans biais ? Est-il convergent ?

- 13) On rappelle que, après l'instruction `import numpy as np`, l'appel `np.random.random()` a pour résultat un réel pris au hasard (selon la loi uniforme) dans l'intervalle $[0, 1[$.

a) Soit X la fonction Python suivante :

Python

```
import numpy as np

def X(lam):
    return -np.log(1 - np.random.random()) / lam
```

Cette fonction simule une variable aléatoire réelle (pour un réel lam strictement positif). Donner sa loi. Justifier votre réponse.

b) Écrire une fonction Python d'en-tête `def g(n):`, où n est un entier naturel non nul, simulant une variable aléatoire de loi $\gamma(n)$.

c) Soit m la fonction Python suivante :

Python

```
def m(p):
    return p / g(p)
```

On appelle la fonction m pour différentes valeurs de p de plus en plus grandes. Que devrait-on constater ?

Partie III. Quelques propriétés de la fonction Γ

Les notations sont celles des parties I et II.

14) Première application : les formules de Wilks et Legendre.

a) Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout réel $t > 0$, établir l'égalité :

$$2 \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{a_{k+1}}{t+k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{a_{2k+1}}{\frac{t}{2}+k} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{a_{2k+2}}{\frac{t+1}{2}+k} \right) \\ + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right)$$

b) Exprimer

$$w_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right)$$

en fonction de deux termes de la suite $(h_n)_{n \geq 1}$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ln 2$.

c) Pour $t > 0$, soit X_t et $X_{t+\frac{1}{2}}$ deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\gamma(t)$ et $\gamma(t+\frac{1}{2})$. En utilisant les questions 4 et 9.d, montrer que la variable aléatoire $2 \ln(X_t)$ est de même loi que la variable aléatoire $\ln(X_{\frac{t}{2}}) + \ln(X_{\frac{t+1}{2}}) + 2 \ln 2$.

d) On pose : $t = 2s$. Déduire de la question précédente que pour tout réel $r > 0$, $(X_{2s})^{2r}$ et $2^{2r}(X_s)^r(X_{s+\frac{1}{2}})^r$ sont de même loi.

e) En choisissant une valeur particulière de s , établir pour tout $r > 0$, la formule :

$$2^{2r-1} \Gamma(r) \Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right) = \Gamma(2r) \sqrt{\pi}$$

15) Deuxième application : la formule de Stirling.

a) Déterminer quatre réels a, b, c, d tels que pour tout réel $u > 0$, on a :

$$\frac{1}{u^2(u+1)^2} = \frac{a}{u^2} + \frac{b}{(u+1)^2} + \frac{c}{u} + \frac{d}{u+1}.$$

En déduire pour tout $t > 0$, la relation :

$$\psi'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2}.$$

On admet sans démonstration que pour tout $u > 0$, on a :

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{(u + \frac{1}{14})^3} - \frac{1}{(u + \frac{15}{14})^3} \right) \leq \frac{1}{u^2(u+1)^2} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{(u+1)^3} \right)$$

b) Dédurre des deux résultats précédents, pour tout $t > 0$, les deux encadrements :

$$\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6(t + \frac{1}{14})^3} \leq \psi'(t) - \frac{1}{t} \leq \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6t^3} \text{ et}$$

$$\ln t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{12t^2} \leq \psi(t) \leq \ln t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{12(t + \frac{1}{14})^2}$$

En déduire un équivalent de $E(\ln(X_t))$ et de $V(\ln(X_t))$ respectivement, lorsque t tend vers $+\infty$.

c) Calculer pour tout y vérifiant $y > t > 0$, l'intégrale : $\int_t^y \left(\psi(x) - \ln(x) + \frac{1}{2x} \right) dx$.

Montrer pour t fixé, l'existence de

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}} \right);$$

on note θ cette limite.

d) En utilisant la question 14.e et l'identité : $x^x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^x \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{-x}$, valable pour $x > 0$, calculer e^θ .

En déduire que $\Gamma(x)$ est équivalent à $\sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}$, lorsque x tend vers $+\infty$.