



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2010

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Rappels utilisés dans tout le corrigé.

Loi image par une fonction strictement monotone. Si A et B ont même loi, alors pour tous réels λ et c , $\lambda A + c$ et $\lambda B + c$ ont même loi, et $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$ ont même loi pour toute fonction φ continue strictement monotone sur un intervalle contenant les valeurs de A et B : en effet, pour φ croissante, $P([\varphi(A) \leq x]) = P([A \leq \varphi^{-1}(x)])$ pour x dans l'image de φ (et cette probabilité vaut 0 ou 1 en dehors), et de même pour B . Deux variables de même loi ont même espérance et même variance (sous réserve d'existence).

Lemme des coalitions (programme). Si $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendantes, toute variable fonction de $(A_1, \dots, A_p)$ est indépendante de toute variable fonction de $(A_{p+1}, \dots, A_n)$, et des fonctions de sous-familles disjointes sont mutuellement indépendantes.

Loi gamma. Pour $t > 0$ et $s > -t$, en posant Γ comme dans l'énoncé, le théorème de transfert (fonction positive) donne $E(X_t^s) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} x^{s+t-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(t+s)}{\Gamma(t)}$, l'intégrale convergeant car $t+s > 0$.

Partie I. Quelques résultats préliminaires

1) a) On étudie le signe et la taille de v_n .

Pour $n \geq 1$:

$$v_n = h_{n+1} - h_n - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Méthode 1 — Encadrement et série télescopique.

Pour $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ (concavité de $\ln$, tangente en 1), et pour $x \geq 0$, $\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$ (appliquer l'inégalité précédente à $\frac{-x}{1+x}$: $\ln \frac{1}{1+x} \leq \frac{-x}{1+x}$). Avec

$$x = \frac{1}{n}, \quad \frac{x}{1+x} = \frac{1}{n+1}, \text{ donc :}$$

$$0 \leq -v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

La série télescopique de terme général $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ converge (ses sommes partielles valent $1 - \frac{1}{N+1}$). Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum (-v_n)$$

converge, donc

$$\sum v_n$$

aussi.

Méthode 2 — Équivalent.

Par le développement limité $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$:

$$v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\text{donc } -v_n \sim \frac{1}{2n^2}.$$

La série de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge, et $-v_n \geq 0$; par équivalence de séries à termes positifs,

$$\sum v_n$$

converge.

La méthode 1 donne de plus la majoration explicite du reste; la méthode 2 est la démarche standard par équivalent.

Conclusion

la série de terme général v_n converge.

b) Pour $n \geq 2$,

$$\gamma_n = \gamma_1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$$

(télescopage), avec $\gamma_1 = 1$. Les sommes partielles de la série convergente

$$\sum v_k$$

ont une limite finie.

Conclusion

(γ_n) converge; sa limite est

$$\gamma = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k.$$

c) Pour $t > 0$ et $n \geq 1$:

$$d_{n,t} = \gamma - (h_n - \ln n) + \ln(t+n) - \ln n = (\gamma - \gamma_n) + \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right)$$

Le premier terme tend vers 0 par b), le second vers $\ln 1 = 0$ par continuité du logarithme.

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_{n,t} = 0.$$

2) a) Résultat du cours (ou rappel initial avec $s = 1$ et $s = 2$: $E(X_t) = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t)} = t$,
 $E(X_t^2) = (t+1)t$).

Conclusion

$$E(X_t) = t \text{ et } V(X_t) = t.$$

b) On applique le théorème de transfert à $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto (\ln x)^2$.

Existence. La fonction $u \mapsto (\ln u)e^{-u}u^{t-1}$ est négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$; l'intégrale admise étant convergente, ses deux morceaux convergent, donc elle est absolument convergente. Ainsi $\ln(X_t)$ admet une espérance et, par transfert :

$$E(\ln X_t) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} (\ln x)e^{-x}x^{t-1}dx = \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = \psi(t)$$

De même, l'intégrande $(\ln u)^2 e^{-u}u^{t-1}$ est positive et son intégrale converge, donc $E((\ln X_t)^2) = \frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)}$. Par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(\ln X_t) = \frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)} - \left(\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}\right)^2 = \frac{\Gamma''(t)\Gamma(t) - \Gamma'(t)^2}{\Gamma(t)^2}$$

Or $\Gamma > 0$ est de classe C^2 , donc $\psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ est dérivable et $\psi' = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2}$.

Conclusion

$$E(\ln X_t) = \psi(t) \text{ et } V(\ln X_t) = \psi'(t).$$

3) a) On applique le rappel initial avec $s = -1$, licite car $t - 1 > 0$: la fonction positive $x \mapsto \frac{1}{x} f_{X_t}(x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et :

$$E\left(\frac{1}{X_t}\right) = \frac{\Gamma(t-1)}{\Gamma(t)} = \frac{\Gamma(t-1)}{(t-1)\Gamma(t-1)} = \frac{1}{t-1}$$

Conclusion

pour $t > 1$, $E(1/X_t)$ existe et vaut $\frac{1}{t-1}$. De même, pour $t > 2$, $E(1/X_t^2) = \frac{\Gamma(t-2)}{\Gamma(t)} = \frac{1}{(t-1)(t-2)}$, ce qui servira en c).

b) La fonction $\ln$ est concave sur $]0, +\infty[$, donc sous sa tangente en 1 : $\ln x \leq x - 1$. En appliquant cette inégalité à $\frac{1}{x} > 0$: $-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$, soit $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$.

Si $x \geq 1$: $0 \leq \ln x \leq x - 1$, donc $(\ln x)^2 \leq (x - 1)^2$. Si $0 < x < 1$: $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x < 0$, donc $(\ln x)^2 \leq \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$. Dans les deux cas, on majore encore en ajoutant l'autre carré, positif.

Conclusion

pour $x > 0$, $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ et $(\ln x)^2 \leq \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + (x - 1)^2$.

c) On applique b) à $x = \frac{X_t}{t} > 0$ et on utilise la croissance de l'espérance. La variable $\ln\left(\frac{X_t}{t}\right) = \ln X_t - \ln t$ admet une espérance et un moment d'ordre 2 d'après 2) b).

Première inégalité ($t > 0$) : $\ln \frac{X_t}{t} \leq \frac{X_t}{t} - 1$, donc $E\left(\ln \frac{X_t}{t}\right) \leq \frac{E(X_t)}{t} - 1 = 0$.

Deuxième inégalité ($t > 1$) : $\ln \frac{X_t}{t} \geq 1 - \frac{t}{X_t}$, et $\frac{1}{X_t}$ admet une espérance par a), donc

$$E\left(\ln \frac{X_t}{t}\right) \geq 1 - \frac{t}{t-1} = -\frac{1}{t-1}.$$

Troisième inégalité ($t > 2$). Par b) :

$$\ln^2\left(\frac{X_t}{t}\right) \leq \left(1 - \frac{t}{X_t}\right)^2 + \left(\frac{X_t}{t} - 1\right)^2$$

D'une part $E\left(\left(\frac{X_t}{t} - 1\right)^2\right) = \frac{V(X_t)}{t^2} = \frac{1}{t}$. D'autre part, par a) :

$$\begin{aligned} E\left(\left(1 - \frac{t}{X_t}\right)^2\right) &= 1 - \frac{2t}{t-1} + \frac{t^2}{(t-1)(t-2)} = \frac{(t-1)(t-2) - 2t(t-2) + t^2}{(t-1)(t-2)} \\ &= \frac{t+2}{(t-1)(t-2)} \end{aligned}$$

Donc $E\left(\ln^2 \frac{X_t}{t}\right) \leq \frac{1}{t} + \frac{t+2}{(t-1)(t-2)}$. Comparons au majorant voulu, en multipliant par $t(t-1)(t-2)^2 > 0$:

$$(t-1)(t-2)^2 + t(t+2)(t-2) = (t^3 - 5t^2 + 8t - 4) + (t^3 - 4t) = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 4$$

et $2t^2(t-1) = 2t^3 - 2t^2$. La différence vaut $3t^2 - 4t + 4$, trinôme de discriminant $16 - 48 < 0$, donc strictement positif. Ainsi $\frac{1}{t} + \frac{t+2}{(t-1)(t-2)} \leq \frac{2t}{(t-2)^2}$.

Conclusion

$$E\left(\ln \frac{X_t}{t}\right) \leq 0 \text{ pour } t > 0, \quad E\left(\ln \frac{X_t}{t}\right) \geq -\frac{1}{t-1} \text{ pour } t > 1, \text{ et } E\left(\ln^2 \frac{X_t}{t}\right) \leq \frac{2t}{(t-2)^2} \text{ pour } t > 2.$$

- d) On applique l'inégalité de Markov au carré. Notons $Z_n = \ln \left(\frac{X_{t+n}}{t+n} \right)$ et soit $\varepsilon > 0$. Pour $n > 2$, $t+n > 2$ et Z_n^2 est une variable positive admettant une espérance; par l'inégalité de Markov et c) :

$$P(|Z_n| \geq \varepsilon) = P(Z_n^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(Z_n^2)}{\varepsilon^2} \leq \frac{2(t+n)}{\varepsilon^2(t+n-2)^2}$$

Le majorant est équivalent à $\frac{2}{\varepsilon^2 n}$ et tend vers 0.

Conclusion

$\left(\ln \left(\frac{X_{t+n}}{t+n} \right) \right)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0. On remarque que ce résultat ne dépend que des lois des X_{t+n} ; il s'applique donc à toute sous-suite, par exemple à $\left(\ln \left(\frac{X_{t+2n}}{t+2n} \right) \right)_{n \geq 1}$.

- 4) Question adaptée au programme actuel : dans l'énoncé original, la même variable N figurait pour tout n , la seconde partie de b) demandait la limite en probabilité de $(N+u) + V_n$ et c) admettait que la convergence en probabilité entraîne la convergence en loi. Comme en 14) c) la variable jouant le rôle de N dépend de n , l'énoncé adapté considère une suite (N_n) de variables de même loi que N et établit directement l'égalité des lois par un encadrement des fonctions de répartition.
- a) Soit $\varepsilon > 0$ et ω tel que $|A_n(\omega)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $|B_n(\omega)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $|C_n(\omega)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Par l'inégalité triangulaire, $|D_n(\omega)| \leq \varepsilon$. Par contraposée, si $|D_n(\omega)| > \varepsilon$, l'un au moins des trois réels dépasse $\frac{\varepsilon}{3}$ en valeur absolue : c'est l'inclusion demandée. Par croissance et sous-additivité de P :

$$0 \leq P(|D_n| > \varepsilon) \leq P(|A_n| > \varepsilon/3) + P(|B_n| > \varepsilon/3) + P(|C_n| > \varepsilon/3)$$

et chaque terme tend vers 0 (convergences en probabilité vers 0, appliquées avec $\frac{\varepsilon}{3}$).

Conclusion

(D_n) converge en probabilité vers 0.

b) Convergence de (V_n) . Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \rightarrow u$, il existe n_0 tel que $|u_n - u| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geq n_0$. Pour de tels n , $|V_n| \leq |D_n| + \frac{\varepsilon}{2}$, donc $[|V_n| > \varepsilon] \subset [|D_n| > \varepsilon/2]$ et $P([|V_n| > \varepsilon]) \leq P([|D_n| > \varepsilon/2]) \rightarrow 0$ par a). Donc (V_n) converge en probabilité vers 0.

Encadrement. Soit x réel, $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$.

Si $|V_n(\omega)| \leq \varepsilon$ et $N_n(\omega) + u + V_n(\omega) \leq x$, alors $N_n(\omega) \leq x - u - V_n(\omega) \leq x - u + \varepsilon$. Donc $[N_n + u + V_n \leq x] \subset [N_n \leq x - u + \varepsilon] \cup [|V_n| > \varepsilon]$, d'où la majoration.

Si $|V_n(\omega)| \leq \varepsilon$ et $N_n(\omega) \leq x - u - \varepsilon$, alors $N_n(\omega) + u + V_n(\omega) \leq x - \varepsilon + \varepsilon = x$. Donc $[N_n \leq x - u - \varepsilon] \subset [N_n + u + V_n \leq x] \cup [|V_n| > \varepsilon]$, d'où

$$P([N_n \leq x - u - \varepsilon]) \leq P([N_n + u + V_n \leq x]) + P([|V_n| > \varepsilon]),$$

qui est la minoration.

Conclusion

(V_n) converge en probabilité vers 0 et l'encadrement demandé est vrai pour tout n .

c) On compare les fonctions de répartition F_M et F_{N+u} .

Notons F_N la fonction de répartition de N ; elle est continue sur $\mathbb{R}$ car N est à densité.

Comme $N_n + D_n + u_n = N_n + u + V_n$ a la loi de M et N_n celle de N , l'encadrement de

b) s'écrit, pour tout x réel, tout $\varepsilon > 0$ et tout n :

$$F_N(x - u - \varepsilon) - P([|V_n| > \varepsilon]) \leq F_M(x) \leq F_N(x - u + \varepsilon) + P([|V_n| > \varepsilon])$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ ($F_M(x)$ ne dépend pas de n) :

$F_N(x - u - \varepsilon) \leq F_M(x) \leq F_N(x - u + \varepsilon)$. En faisant tendre ε vers 0, la continuité de F_N donne $F_M(x) = F_N(x - u) = P([N + u \leq x])$.

Conclusion

M et $N + u$ ont la même fonction de répartition, donc la même loi.

5) Les résultats de cette question ne dépendent que des lois de X_α , X_β et de leur indépendance.

a) Comme X_α et X_β sont à valeurs strictement positives, $T_{\alpha,\beta}$ est à valeurs dans $]0, +\infty[$ et $Q_{\alpha,\beta}(\Omega) \subset \mathbb{R}$; on prend $\mathbb{R}$ comme ensemble des valeurs de $Q_{\alpha,\beta}$ (on verra en c) que sa densité est strictement positive sur $\mathbb{R}$).

Densité de $\ln(X_\alpha)$. Pour x réel, $F_{\ln X_\alpha}(x) = P([X_\alpha \leq e^x]) = F_{X_\alpha}(e^x)$. La fonction F_{X_α} est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, de dérivée f_{X_α} (continue sur cet intervalle), et $x \mapsto e^x$ est C^1 de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$; donc $F_{\ln X_\alpha}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et une densité est :

$$g_\alpha(x) = e^x f_{X_\alpha}(e^x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{\alpha x} \exp(-e^x)$$

Densité de $-\ln(X_\beta)$. Pour x réel, $P([-\ln X_\beta \leq x]) = P([X_\beta \geq e^{-x}]) = 1 - F_{X_\beta}(e^{-x})$ (F_{X_β} est continue). Cette fonction est C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$k_\beta(x) = e^{-x} f_{X_\beta}(e^{-x}) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} e^{-\beta x} \exp(-e^{-x})$$

Conclusion

$\ln(X_\alpha)$ admet la densité $x \mapsto \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{\alpha x} \exp(-e^x)$ et $-\ln(X_\beta)$ la densité $x \mapsto \frac{1}{\Gamma(\beta)} e^{-\beta x} \exp(-e^{-x})$, sur $\mathbb{R}$. Ces densités sont continues et bornées sur $\mathbb{R}$ (elles tendent vers 0 en $\pm\infty$).

- b) On applique le produit de convolution. $Q_{\alpha,\beta} = \ln X_\alpha + (-\ln X_\beta)$ est la somme de deux variables à densité indépendantes (fonctions respectives de X_α et X_β). Par le théorème de convolution, sous réserve que la fonction h ci-dessous soit définie et continue sur $\mathbb{R}$ (ce que donne la formule explicite de c)), une densité de $Q_{\alpha,\beta}$ est :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(y) k_\beta(x-y) dy = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha y} \exp(-e^y) e^{-\beta(x-y)} \exp(-e^{y-x}) dy$$

En regroupant $e^{\alpha y} e^{\beta y} = e^{(\alpha+\beta)y}$ et $-e^y - e^{y-x} = -e^y(1 + e^{-x})$:

$$h(x) = \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+\beta)y} \exp(-e^y(1 + e^{-x})) dy$$

Conclusion

$f_{Q_{\alpha,\beta}} = h$ a l'expression demandée (la convergence de l'intégrale et la continuité de h sont établies en c)).

- c) Soit x réel fixé et $c = 1 + e^{-x} > 0$. L'application $\varphi : y \mapsto ce^y$ est de classe C^1 , strictement croissante, et réalise une bijection de $] -\infty, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$; le changement de variable $u = \varphi(y)$ est donc valide pour les intégrales impropres (les deux intégrales sont de même nature et égales). On a $y = \ln u - \ln c$, $dy = \frac{du}{u}$ et $e^{(\alpha+\beta)y} = \frac{u^{\alpha+\beta}}{c^{\alpha+\beta}}$. Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+\beta)y} \exp(-ce^y) dy = \frac{1}{c^{\alpha+\beta}} \int_0^{+\infty} u^{\alpha+\beta-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+e^{-x})^{\alpha+\beta}}$$

intégrale convergente. Par suite :

$$f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{e^{-\beta x}}{(1+e^{-x})^{\alpha+\beta}} = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \cdot \frac{e^{-\beta x} e^{(\alpha+\beta)x}}{(e^x + 1)^{\alpha+\beta}} = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \cdot \frac{e^{\alpha x}}{(1+e^x)^{\alpha+\beta}}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, ce qui achève de justifier b).

Conclusion

$$\text{pour tout réel } x, \quad f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \times \frac{e^{\alpha x}}{(1+e^x)^{\alpha+\beta}}.$$

- d) $T_{\alpha,\beta} = \exp(Q_{\alpha,\beta}) > 0$. Pour $x \leq 0$, $F_T(x) = 0$. Pour $x > 0$,
 $F_T(x) = P([Q_{\alpha,\beta} \leq \ln x]) = F_Q(\ln x)$, où F_Q est C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f_{Q_{\alpha,\beta}}$
 (continue). Donc F_T est continue sur $\mathbb{R}$ (limite $F_Q(-\infty) = 0$ en 0^+), de classe C^1 sur
 $\mathbb{R}^*$, et pour $x > 0$:

$$F'_T(x) = \frac{1}{x} f_{Q_{\alpha,\beta}}(\ln x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{x^\alpha}{(1+x)^{\alpha+\beta}}$$

Conclusion

$$\text{une densité de } T_{\alpha,\beta} \text{ est } f_{T_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} \text{ pour } x > 0 \text{ et } f_{T_{\alpha,\beta}}(x) = 0 \text{ pour } x \leq 0.$$

- e) On écrit $J_{\alpha,\beta} = \frac{T_{\alpha,\beta}}{1+T_{\alpha,\beta}}$ (diviser numérateur et dénominateur par $X_\beta > 0$). La
 fonction $\phi : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est C^1 , strictement croissante, bijective de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$,
 de réciproque $z \mapsto \frac{z}{1-z}$. Donc $J_{\alpha,\beta}$ est à valeurs dans $]0, 1[: F_J(z) = 0$ si $z \leq 0$,
 $F_J(z) = 1$ si $z \geq 1$, et pour $z \in]0, 1[:$

$$F_J(z) = P\left(\left[T_{\alpha,\beta} \leq \frac{z}{1-z}\right]\right) = F_T\left(\frac{z}{1-z}\right)$$

F_J est continue sur $\mathbb{R}$ (limites 0 et 1 aux bornes) et de classe C^1 sur $]0, 1[$, avec, en posant
 $x = \frac{z}{1-z}$ (donc $1+x = \frac{1}{1-z}$) :

$$\begin{aligned} F'_J(z) &= \frac{1}{(1-z)^2} f_T(x) = \frac{1}{(1-z)^2} \cdot \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \cdot z^{\alpha-1} (1-z)^{1-\alpha} (1-z)^{\alpha+\beta} \\ &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} \end{aligned}$$

Conclusion

$J_{\alpha, \beta}$ admet la densité $z \mapsto \frac{1}{B(\alpha, \beta)} z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1}$ sur $]0, 1[$, nulle en dehors.

Partie II. Étude de la variable aléatoire $\ln(X_t)$

Hypothèse adaptée : dans l'énoncé original, on supposait seulement X_α indépendante de chacune des variables Y_k ; l'énoncé adapté suppose la mutuelle indépendance de toute famille finie formée de variables X_α d'indices distincts et de variables Y_k (voir le relevé des adaptations). Les Y_k peuvent être supposées strictement positives, quitte à négliger un événement de probabilité nulle.

- 6) Les Y_i sont mutuellement indépendantes de loi $\gamma(1)$ (la loi exponentielle de paramètre 1 est la loi $\gamma(1)$). Par stabilité des lois gamma (de même taux) pour la somme de variables indépendantes :

Conclusion

pour $k \geq 1$, S_k suit la loi $\gamma(k)$, $E(S_k) = k$ et $V(S_k) = k$ ($S_0 = 0$ est constante).

- 7) a) Comme $X_t > 0$ et $S_k \geq 0$, tous les termes $X_t + S_k$ sont strictement positifs. Le produit est télescopique :

$$\prod_{k=1}^n \frac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k} = \frac{X_t + S_0}{X_t + S_n} = \frac{X_t}{X_t + S_n}$$

donc

$$\ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k} \right) + \ln(X_t + S_n) = \ln X_t - \ln(X_t + S_n) + \ln(X_t + S_n) = \ln X_t.$$

Conclusion

l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- b) Par hypothèse, $X_t, Y_1, \dots, Y_m$ sont mutuellement indépendantes; par le lemme des coalitions, X_t et S_m sont indépendantes. X_t suit $\gamma(t)$ et S_m suit $\gamma(m)$ (question 6); par stabilité des lois gamma pour la somme de variables indépendantes, $X_t + S_m$ suit $\gamma(t + m)$.

Conclusion

$X_t + S_m$ a la loi de X_{t+m} .

- 8) a) On utilise le troisième résultat admis avec $\alpha = t, \beta = 1$, puis le lemme des coalitions.

$R_{t,1} = \frac{X_t}{X_t + Y_1}$ et $R_{t,2} = \frac{G}{G + Y_2}$ avec $G = X_t + Y_1$. Les variables X_t et Y_1 sont indépendantes, de lois $\gamma(t)$ et $\gamma(1)$: par le résultat admis, $R_{t,1}$ et G sont indépendantes. De plus Y_2 est indépendante de (X_t, Y_1) , donc de toute fonction de (X_t, Y_1) . Ainsi, pour tous intervalles I, J, K , l'indicatrice de $[R_{t,1} \in I] \cap [G \in J]$ étant une fonction de (X_t, Y_1) :

$$\begin{aligned} P([R_{t,1} \in I] \cap [G \in J] \cap [Y_2 \in K]) &= P([R_{t,1} \in I] \cap [G \in J])P([Y_2 \in K]) \\ &= P([R_{t,1} \in I])P([G \in J])P([Y_2 \in K]) \end{aligned}$$

Les variables $R_{t,1}, G, Y_2$ sont donc mutuellement indépendantes, et $R_{t,2}$ est une fonction de (G, Y_2) : par le lemme des coalitions, $R_{t,1}$ et $R_{t,2}$ sont indépendantes.

Conclusion

$R_{t,1}$ et $R_{t,2}$ sont indépendantes.

b) Par 7) a),

$$\ln X_t = \sum_{k=1}^n \ln(R_{t,k}) + \ln(X_t + S_n)$$

(égalité de variables aléatoires).

D'une part, d'après le résultat admis en a), $R_{t,1}, \dots, R_{t,n}, X_t + S_n$ sont mutuellement indépendantes, donc $\ln R_{t,1}, \dots, \ln R_{t,n}, \ln(X_t + S_n)$ aussi (lemme des coalitions).

D'autre part, X_{t+n} (indice $t+n \neq t$) est, par hypothèse, indépendante de $(X_t, Y_1, \dots, Y_n)$, donc de toute fonction de ce vecteur ; comme ci-dessus, pour des intervalles $I_1, \dots, I_n, J$, l'indicatrice de $\bigcap_k [R_{t,k} \in I_k]$ étant une fonction de $(X_t, Y_1, \dots, Y_n)$:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n [R_{t,k} \in I_k] \cap [X_{t+n} \in J]\right) = \prod_{k=1}^n P([R_{t,k} \in I_k]) \times P([X_{t+n} \in J])$$

Donc $\ln R_{t,1}, \dots, \ln R_{t,n}, \ln X_{t+n}$ sont mutuellement indépendantes. Enfin $\ln(X_t + S_n)$ et $\ln(X_{t+n})$ ont même loi par 7) b). Le quatrième résultat admis donne l'égalité des lois des sommes.

Conclusion

$\ln(X_t)$ et

$$\sum_{k=1}^n \ln(R_{t,k}) + \ln(X_{t+n})$$

sont de même loi.

9) a) $U \in]0, 1]$, donc $-\ln U \geq 0$. Pour $x < 0$, $P(-\ln U \leq x) = 0$; pour $x \geq 0$:

$$P(-\ln U \leq x) = P([U \geq e^{-x}]) = 1 - e^{-x}$$

Conclusion

$-\ln U$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

b) On applique 5) e) avec $\alpha = t + k - 1$, $\beta = 1$. En effet $R_{t,k} = \frac{X_t + S_{k-1}}{(X_t + S_{k-1}) + Y_k}$; $X_t + S_{k-1}$ suit $\gamma(t + k - 1)$ (7) b) pour $k \geq 2$, et X_t lui-même pour $k = 1$, Y_k suit $\gamma(1)$, et ces deux variables sont indépendantes (lemme des coalitions). Avec $B(t + k - 1, 1) = \frac{\Gamma(t + k - 1)\Gamma(1)}{\Gamma(t + k)} = \frac{1}{t + k - 1}$:

Conclusion

$f_{R_{t,k}}(z) = (t + k - 1)z^{t+k-2}$ si $z \in]0, 1[$, et $f_{R_{t,k}}(z) = 0$ sinon.

c) On compare les fonctions de répartition. Posons $a = t + k - 1 > 0$. Pour $z \in]0, 1[$,

$$F_{R_{t,k}}(z) = \int_0^z a s^{a-1} ds = z^a, \text{ et } F_{R_{t,k}} \text{ vaut } 0 \text{ sur }]-\infty, 0] \text{ et } 1 \text{ sur } [1, +\infty[.$$

$U_k^{1/a}$ est à valeurs dans $]0, 1]$ et, pour $z \in]0, 1[$, par stricte croissance de $s \mapsto s^{1/a}$: $P([U_k^{1/a} \leq z]) = P([U_k \leq z^a]) = z^a$; elle vaut aussi 0 pour $z \leq 0$ et 1 pour $z \geq 1$.

Conclusion

$R_{t,k}$ et

$$U_k^{\frac{1}{t+k-1}}$$

ont même fonction de répartition, donc même loi.

- d) On remplace chaque $\ln R_{t,k}$ par une variable de même loi, puis on vérifie les constantes.

Par c) et le rappel sur les lois images, $\ln R_{t,k}$ a la loi de

$$\frac{1}{t+k-1} \ln U_k = -\frac{1}{t+k-1} (-\ln U_k), \text{ et par a) la loi de } -\ln U_k \text{ est celle de } Y_k; \text{ donc}$$

$$\ln R_{t,k} \text{ a la loi de } -\frac{Y_k}{t+k-1}.$$

Les variables $-\frac{Y_1}{t}, \dots, -\frac{Y_n}{t+n-1}, \ln X_{t+n}$ sont mutuellement indépendantes (hypothèse de la partie II et lemme des coalitions), de même que

$\ln R_{t,1}, \dots, \ln R_{t,n}, \ln X_{t+n}$ (vu en 8) b)), avec des lois deux à deux égales. Par 8) b) et le quatrième résultat admis :

$\ln X_t$ a la loi de

$$\sum_{k=1}^n \left(-\frac{Y_k}{t+k-1} \right) + \ln X_{t+n} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{Y_{k+1}}{t+k} + \ln X_{t+n}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} + \ln \left(\frac{X_{t+n}}{t+n} \right) + d_{n,t} - \gamma = h_n + \ln X_{t+n} - \ln(t+n) + \gamma + \ln(t+n) - h_n - \gamma$$

$$= \ln X_{t+n}.$$

Conclusion

$\ln(X_t)$ a la même loi que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Y_{k+1}}{t+k} \right) + \ln \left(\frac{X_{t+n}}{t+n} \right) + d_{n,t} - \gamma.$$

10) Notons Z_n la variable de 9) d). Deux variables de même loi ont même espérance et même variance.

Espérance. Par 2) b), linéarité et $E(Y_{k+1}) = 1$:

$$\psi(t) = E(\ln X_t) = E(Z_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{t+k} \right) + E \left(\ln \frac{X_{t+n}}{t+n} \right) + d_{n,t} - \gamma$$

Pour n assez grand ($t+n > 1$), 3) c) donne $-\frac{1}{t+n-1} \leq E \left(\ln \frac{X_{t+n}}{t+n} \right) \leq 0$, donc ce terme tend vers 0; $d_{n,t} \rightarrow 0$ par 1) c). Ainsi la suite des sommes partielles

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{t+k} \right) = \psi(t) + \gamma - E \left(\ln \frac{X_{t+n}}{t+n} \right) - d_{n,t}$$

converge vers $\psi(t) + \gamma$: la série converge et

$$\psi(t) = -\gamma + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{t+k} \right).$$

Variance. Les variables $-\frac{Y_1}{t}, \dots, -\frac{Y_n}{t+n-1}, \ln \frac{X_{t+n}}{t+n}$ sont mutuellement indépendantes et admettent une variance; la variance de leur somme est la somme des variances, et les constantes ne changent pas la variance. Avec $V(Y_{k+1}) = 1$ et 2) b) :

$$\psi'(t) = V(Z_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(t+k)^2} + V \left(\ln \frac{X_{t+n}}{t+n} \right)$$

Pour $t+n > 2$,

$$0 \leq V \left(\ln \frac{X_{t+n}}{t+n} \right) \leq E \left(\ln^2 \frac{X_{t+n}}{t+n} \right) \leq \frac{2(t+n)}{(t+n-2)^2} \rightarrow 0$$

(3) c)). Donc les sommes partielles

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(t+k)^2}$$

convergent vers $\psi'(t)$.

Conclusion

$$E(\ln X_t) = \psi(t) = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{t+k} \right)$$

et

$$V(\ln X_t) = \psi'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2}.$$

11) Par 2) b), $\psi(t) - \ln t = E(\ln X_t) - \ln t = E\left(\ln \frac{X_t}{t}\right)$. Pour $t > 1$, 3) c) donne $-\frac{1}{t-1} \leq \psi(t) - \ln t \leq 0$; par encadrement :

Conclusion

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\psi(t) - \ln t) = 0.$$

12) On se ramène à une somme de variables exponentielles.

Loi de $-\ln W_i$. $W_i = U_i^{1/\mu}$ où U_i suit la loi uniforme sur $]0, 1]$ (avec $U_i = W_i^\mu$). Alors $-\ln W_i = \frac{1}{\mu}(-\ln U_i)$, et par 9) a), $E_i = -\ln U_i = -\mu \ln W_i$ suit la loi exponentielle de paramètre 1. Les E_i sont mutuellement indépendantes (fonctions des W_i indépendants). Posons

$$S = \sum_{i=1}^p E_i,$$

de loi $\gamma(p)$ (question 6). Alors

$$\sum_{i=1}^p \ln W_i = -\frac{S}{\mu}$$

et, S étant strictement positive presque sûrement :

$$G_p = \frac{p\mu}{S}$$

Estimateur. G_p est une fonction de l'échantillon $(W_1, \dots, W_p)$ qui ne fait pas intervenir μ ; elle est définie presque sûrement (la somme

$$\sum \ln W_i$$

est strictement négative presque sûrement). C'est donc un estimateur de μ .

Biais. Comme $p \geq 3 > 1$, 3) a) appliqué à S (de loi $\gamma(p)$) donne

$E(G_p) = p\mu E\left(\frac{1}{S}\right) = \frac{p\mu}{p-1}$. Le biais vaut $E(G_p) - \mu = \frac{\mu}{p-1} \neq 0$: G_p n'est pas sans biais (il est asymptotiquement sans biais).

Convergence. Comme $p \geq 3 > 2$, $E\left(\frac{1}{S^2}\right) = \frac{1}{(p-1)(p-2)}$ (fin de 3) a)), donc :

$$V(G_p) = p^2\mu^2 \left(\frac{1}{(p-1)(p-2)} - \frac{1}{(p-1)^2} \right) = \frac{p^2\mu^2}{(p-1)^2(p-2)}$$

Ainsi $E(G_p) \rightarrow \mu$ et $V(G_p) \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow +\infty$. D'après la condition suffisante du

cours, G_p est un estimateur convergent de μ . Détail : pour $\varepsilon > 0$ et p assez grand pour

que $b_p = \frac{\mu}{p-1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, on a $[|G_p - \mu| \geq \varepsilon] \subset [|G_p - E(G_p)| \geq \frac{\varepsilon}{2}]$, et l'inégalité de

Bienaymé-Tchebychev donne $P(|G_p - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{4V(G_p)}{\varepsilon^2} \rightarrow 0$.

Conclusion

G_p est un estimateur de μ , biaisé (biais $\frac{\mu}{p-1}$), et convergent.

13) Code adapté en Python : l'énoncé original utilisait le langage Pascal et sa fonction `random`; les fonctions sont réécrites en Python avec `np.random.random()`, qui renvoie un réel uniforme dans $[0, 1[$. Le paramètre `lambda` a été renommé `lam`, `lambda` étant un mot réservé en Python.

a) Si R suit la loi uniforme sur $[0, 1[$, alors $V = 1 - R$ suit la loi uniforme sur $]0, 1]$, de sorte que $\ln V$ est défini. La fonction renvoie une réalisation de $Z = -\frac{\ln V}{\lambda}$ (avec $\lambda = \text{lam} > 0$). Par 9) a), $-\ln V$ suit la loi exponentielle de paramètre 1 ; pour $x \geq 0$:

$$P([Z \leq x]) = P([- \ln V \leq \lambda x]) = 1 - e^{-\lambda x}, \text{ et } P([Z \leq x]) = 0 \text{ pour } x < 0.$$

Conclusion

la fonction `X(lam)` simule une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ (méthode d'inversion).

b) Par 6), une somme de n variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1 suit la loi $\gamma(n)$. Chaque appel à `X(1)` utilise un nouveau tirage de `np.random.random()`, ce qui modélise des variables indépendantes.

Python

```
import numpy as np

def X(lam):
    return -np.log(1 - np.random.random()) / lam

def g(n):
    s = 0
    for k in range(n): # n passages : k = 0, 1, ..., n-1
        s = s + X(1) # ajout d'une variable exponentielle de paramètre 1
    return s
```

La variable s contient la somme partielle ; après la boucle (exactement n passages, $\text{range}(n)$ excluant n), s est une réalisation de $Y_1 + \dots + Y_n$, de loi $\gamma(n)$.

- c) $m(p)$ renvoie $\frac{p}{g(p)}$, réalisation de $\frac{p}{S}$ avec S de loi $\gamma(p)$. C'est exactement la variable G_p de la question 12) dans le cas $\mu = 1$ (car $G_p = \frac{p\mu}{S}$). D'après 12), G_p converge en probabilité vers $\mu = 1$; on peut aussi le voir par la loi faible des grands nombres, $\frac{g(p)}{p}$ étant la moyenne empirique de p variables d'espérance 1.

Conclusion

pour p de plus en plus grand, les valeurs renvoyées par $m(p)$ devraient se rapprocher de 1, avec des fluctuations de plus en plus faibles (écart-type de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{p}}$, puisque $V(G_p) \sim \frac{1}{p}$).

Code exécuté (NumPy 2.4) : après `np.random.seed(1)`, les appels successifs `m(100)`, `m(1000)`, `m(10000)`, `m(100000)` ont donné environ 1,055 ; 1,003 ; 1,012 ; 0,9994. Cette observation expérimentale illustre le résultat de 12) sans le démontrer.

Partie III. Quelques propriétés de la fonction Γ

- 14) a) On sépare les indices pairs et impairs dans la somme de gauche. Pour $k = 2j$ ($0 \leq j \leq n-1$) et $k = 2j+1$ ($0 \leq j \leq n-1$), on parcourt une fois chaque $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$:

$$2 \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{a_{k+1}}{t+k} \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{2}{2j+1} - \frac{2a_{2j+1}}{t+2j} \right) + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{2}{2j+2} - \frac{2a_{2j+2}}{t+2j+1} \right)$$

Or $\frac{2}{t+2j} = \frac{1}{\frac{t}{2}+j}$ et $\frac{2}{t+2j+1} = \frac{1}{\frac{t+1}{2}+j}$. Pour les termes constants,

$\frac{2}{2j+2} = \frac{1}{j+1}$ et $\frac{2}{2j+1} = \frac{1}{j+1} + 2 \left(\frac{1}{2j+1} - \frac{1}{2j+2} \right)$ (car $\frac{1}{j+1} = \frac{2}{2j+2}$). En reportant :

Conclusion

l'égalité demandée est établie, pour toute suite (a_k) , tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t > 0$.

b)

$$w_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} \right) - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+2} = h_{2n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = h_{2n} - h_n.$$

Avec $h_m = \gamma_m + \ln m$: $w_n = \gamma_{2n} - \gamma_n + \ln(2n) - \ln n = \gamma_{2n} - \gamma_n + \ln 2$, et $\gamma_{2n} - \gamma_n \rightarrow \gamma - \gamma = 0$ (1) b)).

Conclusion

$w_n = h_{2n} - h_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ln 2$.

c) On écrit, grâce à 9) d) et 14) a), une variable de même loi que $2 \ln X_t$ sous la forme $N_n + D_n + u_n$ de la question 4 adaptée.

Par l'hypothèse de la partie II, les variables $X_{\frac{t}{2}}$ et $X_{\frac{t+1}{2}}$ (indices distincts) sont indépendantes, ainsi que les variables $Y_k, X_{t+2n}, X_{\frac{t}{2}+n}, X_{\frac{t+1}{2}+n}$ (indices distincts : $t+2n, \frac{t}{2}+n, \frac{t+1}{2}+n$ sont deux à deux différents car $t > 0$).

Étape 1. Par 9) d) avec $2n$ à la place de n , puis multiplication par 2, $M = 2 \ln X_t$ a la loi de :

$$2 \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Y_{k+1}}{t+k} \right) + 2 \ln \frac{X_{t+2n}}{t+2n} + 2d_{2n,t} - 2\gamma$$

Étape 2. Par 14) a) avec $a_k = Y_k$, cette variable s'écrit $N_n + A_n + B_n + C_n + u_n$, où :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Y_{2k+1}}{\frac{t}{2} + k} \right) + \ln \frac{X_t}{\frac{t}{2} + n} + d_{n, \frac{t}{2}} - \gamma$$

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Y_{2k+2}}{\frac{t+1}{2} + k} \right) + \ln \frac{X_{t+1}}{\frac{t+1}{2} + n} + d_{n, \frac{t+1}{2}} - \gamma$$

$$N_n = P_n + Q_n, \quad A_n = 2 \ln \frac{X_{t+2n}}{t+2n},$$

$$B_n = -\ln \frac{X_t}{\frac{t}{2} + n},$$

$$C_n = -\ln \frac{X_{t+1}}{\frac{t+1}{2} + n}$$

$$u_n = 2w_n + 2d_{2n,t} - d_{n, \frac{t}{2}} - d_{n, \frac{t+1}{2}}$$

(les termes en $\frac{X_t}{\frac{t}{2} + n}$ et $\frac{X_{t+1}}{\frac{t+1}{2} + n}$ de P_n, Q_n se compensent avec B_n, C_n , et les deux $-\gamma$ de P_n, Q_n redonnent -2γ).

Étape 3 : loi de N_n . Par le calcul des constantes fait en 9) d),

$$P_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{Y_{2k+1}}{\frac{t}{2} + k} + \ln \frac{X_t}{\frac{t}{2} + n}.$$

Par 9) d) appliquée avec $\frac{t}{2}$ (et la même simplification), $\ln X_{\frac{t}{2}}$ a la loi de

$$-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{Y_{k+1}}{\frac{t}{2} + k} + \ln X_{\frac{t}{2} + n}.$$

Les familles $\left(-\frac{Y_{2k+1}}{\frac{t}{2} + k} \right)_{0 \leq k \leq n-1}, \ln X_{\frac{t}{2} + n}$ et $\left(-\frac{Y_{k+1}}{\frac{t}{2} + k} \right)_{0 \leq k \leq n-1}, \ln X_{\frac{t}{2} + n}$ sont

chacune mutuellement indépendantes, avec des lois deux à deux égales ; par le quatrième résultat admis, P_n a la loi de $\ln X_{\frac{t}{2}}$. De même, Q_n (construite avec

$Y_2, Y_4, \dots, Y_{2n}$ et $X_{\frac{t+1}{2} + n}$) a la loi de $\ln X_{\frac{t+1}{2}}$. P_n et Q_n sont fonctions de

sous-familles disjointes d'une famille mutuellement indépendante, donc indépendantes.

Par le quatrième résultat admis, $N_n = P_n + Q_n$ a la loi de $N = \ln X_{\frac{t}{2}} + \ln X_{\frac{t+1}{2}}$.

Étape 4 : hypothèses de la question 4. A_n, B_n, C_n sont à densité (images de variables gamma par des fonctions C^1 strictement monotones) et convergent en probabilité vers 0 par 3) d) (appliquée avec t et la sous-suite d'indices $2n$, avec $\frac{t}{2}$, avec $\frac{t+1}{2}$). Par 1) c) et 14) b), $u_n \rightarrow 2 \ln 2$. M est à densité (5) a)) ; N est à densité, somme de deux variables indépendantes dont les densités (5) a)) sont continues et bornées (théorème de convolution). Enfin M a la loi de $N_n + D_n + u_n$ pour tout n .

Par 4) c), M et $N + 2 \ln 2$ sont de même loi.

Conclusion

$2 \ln(X_t)$ a la même loi que $\ln(X_{\frac{t}{2}}) + \ln(X_{\frac{t+1}{2}}) + 2 \ln 2$, où $X_{\frac{t}{2}}$ et $X_{\frac{t+1}{2}}$ sont indépendantes.

d) Avec $t = 2s$ ($s > 0$), c) donne : $2 \ln X_{2s}$ a la loi de $\ln X_s + \ln X_{s+\frac{1}{2}} + 2 \ln 2$. Soit

$r > 0$. La fonction $x \mapsto e^{rx}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; par le rappel sur les lois images, $\exp(2r \ln X_{2s}) = X_{2s}^{2r}$ a la loi de

$$\exp \left(r \ln X_s + r \ln X_{s+\frac{1}{2}} + 2r \ln 2 \right) = 2^{2r} X_s^r X_{s+\frac{1}{2}}^r.$$

Conclusion

$(X_{2s})^{2r}$ et $2^{2r}(X_s)^r(X_{s+\frac{1}{2}})^r$ sont de même loi.

e) On prend les espérances. Par le rappel initial, $E(X_{2s}^{2r}) = \frac{\Gamma(2s+2r)}{\Gamma(2s)},$

$$E(X_s^r) = \frac{\Gamma(s+r)}{\Gamma(s)} \text{ et }$$

$$E(X_{s+\frac{1}{2}}^r) = \frac{\Gamma(s+r+\frac{1}{2})}{\Gamma(s+\frac{1}{2})}.$$

Les variables X_s^r et $X_{s+\frac{1}{2}}^r$ sont indépendantes et admettent une espérance, donc

(deuxième résultat admis) leur produit aussi, et d) donne :

$$\frac{\Gamma(2s+2r)}{\Gamma(2s)} = 2^{2r} \frac{\Gamma(s+r)}{\Gamma(s)} \cdot \frac{\Gamma(s+r+\frac{1}{2})}{\Gamma(s+\frac{1}{2})}$$

Choisissons $s = \frac{1}{2}$: $\Gamma(2s) = \Gamma(1) = 1$, $\Gamma(s+\frac{1}{2}) = \Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(s) = \sqrt{\pi}$. Il vient

$\Gamma(2r+1) = \frac{2^{2r}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(r+\frac{1}{2}) \Gamma(r+1)$. Avec $\Gamma(2r+1) = 2r\Gamma(2r)$ et $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$:

$$2r\Gamma(2r)\sqrt{\pi} = 2^{2r} r\Gamma(r)\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)$$

et en divisant par $2r > 0$:

Conclusion

pour tout $r > 0$, $2^{2r-1}\Gamma(r)\Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right) = \Gamma(2r)\sqrt{\pi}$ (formule de duplication de Legendre).

15) a) On part de la décomposition $\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$ et on l'élève au carré :

$$\frac{1}{u^2(u+1)^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{2}{u(u+1)} = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{2}{u} + \frac{2}{u+1}$$

donc $a = 1, b = 1, c = -2, d = 2$ conviennent.

Relation sur ψ' . Soit $t > 0$ et $K \in \mathbb{N}$. Avec $u = t + k$ et en sommant pour k de 0 à K :

$$\sum_{k=0}^K \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} = \sum_{k=0}^K \frac{1}{(t+k)^2} + \sum_{k=1}^{K+1} \frac{1}{(t+k)^2} - 2 \sum_{k=0}^K \left(\frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1} \right)$$

La dernière somme est télescopique et vaut $\frac{1}{t} - \frac{1}{t+K+1}$. Quand $K \rightarrow +\infty$, par 10)

les deux premières sommes tendent vers $\psi'(t)$ et $\psi'(t) - \frac{1}{t^2}$, et la troisième vers $\frac{1}{t}$.

Donc la série

$$\sum \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2}$$

converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} = 2\psi'(t) - \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t}$$

Conclusion

$a = b = 1, c = -2, d = 2$, et

$$\psi'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2}.$$

b) Encadrement de ψ' . On applique l'encadrement admis avec $u = t + k$ et on somme pour k de 0 à K . Les sommes des membres extrêmes sont télescopiques, car $t + k + \frac{15}{14} = t + (k+1) + \frac{1}{14}$:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{(t + \frac{1}{14})^3} - \frac{1}{(t + K + \frac{15}{14})^3} \right) \leq \sum_{k=0}^K \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{(t+K+1)^3} \right)$$

En faisant tendre K vers $+\infty$:

$$\frac{1}{3(t + \frac{1}{14})^3} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} \leq \frac{1}{3t^3}.$$

Avec a), en multipliant par $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6(t + \frac{1}{14})^3} \leq \psi'(t) - \frac{1}{t} \leq \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6t^3}$$

Encadrement de ψ . La fonction $\phi : x \mapsto \psi(x) - \ln x$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ (Γ est C^∞ et strictement positive), de dérivée $\psi'(x) - \frac{1}{x}$. Pour $y > t > 0$, en intégrant

l'encadrement de $\psi'(x) - \frac{1}{x}$ sur $[t, y]$ (croissance de l'intégrale) :

$$\int_t^y \left(\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6(x + \frac{1}{14})^3} \right) dx \leq \phi(y) - \phi(t) \leq \int_t^y \left(\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} \right) dx$$

Les primitives donnent

$$\left[-\frac{1}{2x} - \frac{1}{12(x + \frac{1}{14})^2} \right]_t^y$$

et $\left[-\frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} \right]_t^y$. Quand $y \rightarrow +\infty$, $\phi(y) \rightarrow 0$ par 11), et les crochets évalués en y tendent vers 0. On obtient :

$$\frac{1}{2t} + \frac{1}{12(t + \frac{1}{14})^2} \leq -\phi(t) \leq \frac{1}{2t} + \frac{1}{12t^2}$$

soit $\ln t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{12t^2} \leq \psi(t) \leq \ln t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{12(t + \frac{1}{14})^2}$.

Équivalents. Par 2) b) et l'encadrement de ψ , $E(\ln X_t) = \psi(t) = \ln t + O\left(\frac{1}{t}\right)$, donc

$\frac{\psi(t)}{\ln t} \rightarrow 1 : E(\ln X_t) \sim \ln t$. Et $V(\ln X_t) = \psi'(t) = \frac{1}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $t\psi'(t) \rightarrow 1 :$

$$V(\ln X_t) \sim \frac{1}{t}.$$

Conclusion

les deux encadrements sont établis, $E(\ln X_t) \sim \ln t$ et $V(\ln X_t) \sim \frac{1}{t}$ quand $t \rightarrow +\infty$.

c) Calcul de l'intégrale. Sur $]0, +\infty[$, $\ln \Gamma$ est dérivable de dérivée $\frac{\Gamma'}{\Gamma} = \psi$,

$x \mapsto x \ln x - x$ a pour dérivée $\ln x$ et $x \mapsto \frac{1}{2} \ln x$ a pour dérivée $\frac{1}{2x}$. Donc

$x \mapsto \ln \Gamma(x) - x \ln x + x + \frac{1}{2} \ln x = \ln \left(\frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}} \right)$ est une primitive de l'intégrande, continue sur $[t, y]$. Ainsi :

$$\int_t^y \left(\psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x} \right) dx = \ln \left(\frac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}} \right) - \ln \left(\frac{\Gamma(t)}{t^{t-\frac{1}{2}} e^{-t}} \right)$$

Existence de la limite. Par b), pour $x > 0$:

$$-\frac{1}{12x^2} \leq \psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x} \leq -\frac{1}{12(x + \frac{1}{14})^2} < 0. \text{ La fonction}$$

$F : y \mapsto \int_t^y \left(\psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x} \right) dx$ est donc décroissante sur $[t, +\infty[$ et minorée par

$-\int_t^y \frac{dx}{12x^2} \geq -\frac{1}{12t}$. Par le théorème de la limite monotone, $F(y)$ admet une limite finie quand $y \rightarrow +\infty$, donc aussi

$$\ln \left(\frac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}} \right) = F(y) + \ln \left(\frac{\Gamma(t)}{t^{t-\frac{1}{2}} e^{-t}} \right).$$

Conclusion

l'intégrale vaut

$$\ln \left(\frac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}} \right) - \ln \left(\frac{\Gamma(t)}{t^{t-\frac{1}{2}} e^{-t}} \right),$$

et

$$\theta = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}} \right)$$

existe.

d) Posons $L(x) = \frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}}$ pour $x > 0$; par c) et continuité de l'exponentielle,

$L(x) \rightarrow e^\theta > 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. On remplace chaque valeur de Γ dans 14) e) (avec $r = x$) :

$$\Gamma(x) = L(x) x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}, \quad \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = L\left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right)^{x-\frac{1}{2}} e^{-x-\frac{1}{2}},$$

$$\Gamma(2x) = L(2x) (2x)^{2x-\frac{1}{2}} e^{-2x}$$

La formule $2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2x)$ devient :

$$2^{2x-1} L(x) L\left(x + \frac{1}{2}\right) x^{x-\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2}\right)^{x-\frac{1}{2}} e^{-2x-\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} L(2x) 2^{2x-\frac{1}{2}} x^{2x-\frac{1}{2}} e^{-2x}$$

En simplifiant par $2^{2x-1} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-2x} > 0$ et en utilisant l'identité donnée,

$$\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^x}{x^x} = \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x :$$

$$L(x) L\left(x + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi} L(2x)$$

Quand $x \rightarrow +\infty$: $x \ln \left(1 + \frac{1}{2x}\right) \sim x \cdot \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$, donc $\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \rightarrow e^{\frac{1}{2}}$; $L(x)$,

$L(x + \frac{1}{2})$, $L(2x)$ tendent vers e^θ . Par passage à la limite :

$$e^{2\theta} = \sqrt{2\pi} e^\theta, \text{ d'où } e^\theta = \sqrt{2\pi} \text{ (car } e^\theta \neq 0 \text{)}.$$

$$\text{Enfin } \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}} = \frac{L(x)}{\sqrt{2\pi}} \rightarrow 1.$$

Conclusion

$e^\theta = \sqrt{2\pi}$ et $\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}$ quand $x \rightarrow +\infty$ (formule de Stirling, ici démontrée).

Relevé des adaptations

- Partie II, préambule : l'hypothèse « pour tout réel $\alpha > 0$, X_α est indépendante de chacune des variables aléatoires de la suite (Y_k) » (avec des Y_k indépendantes) est remplacée par la mutuelle indépendance de toute famille finie $X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_q}, Y_1, \dots, Y_K$ d'indices α_i distincts. Justification : une indépendance deux à deux ne suffit pas pour obtenir l'indépendance de X_t et S_m (7) b)), ni celle de X_{t+n} avec $(X_t, Y_1, \dots, Y_n)$ (8) b), 9) d)) ou des variables utilisées en 14) c).
- Résultats admis avant la question 8 : ajout du résultat « si $A_1, \dots, A_p$ sont mutuellement indépendantes, si $B_1, \dots, B_p$ le sont, et si A_i et B_i ont même loi pour tout i , alors

$$\sum A_i$$

et

$$\sum B_i$$

ont même loi». Justification : il est utilisé implicitement par l'énoncé original en 8) b), 9) d) et 14) c) et ne figure pas en ces termes au programme.

- 8) a) : le résultat admis «les variables $R_{t,k}$ ($k \geq 1$) sont indépendantes» est remplacé par «pour tout n , $R_{t,1}, \dots, R_{t,n}$ et $X_t + S_n$ sont mutuellement indépendantes». Justification : c'est la forme nécessaire en 8) b); ce résultat est vrai et sa démonstration demanderait des arguments d'indépendance sur des n -uplets hors programme.
- 4) : la variable N fixe est remplacée par une suite (N_n) de variables de même loi que N ; la seconde partie de b) (limite en probabilité de $(N + u) + V_n$) est remplacée par un encadrement de $P([N_n + u + V_n \leq x])$, et le résultat admis «la convergence en probabilité entraîne la convergence en loi» est supprimé de c). Justification : en 14) c), la variable jouant le rôle de N dépend de n , de sorte que l'énoncé original ne s'appliquait pas; l'encadrement par les fonctions de répartition fournit une preuve conforme, sans recours à un argument de type Slutsky.
- 13) : code adapté en Python (fonction random de Pascal remplacée par `np.random.random()`, fonctions X, g, m réécrites en Python, paramètre `lambda` renommé `lam`). Justification : seul le langage Python est au programme.